Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι
Εαρινό εξάμηνο 2005-2006

Πρώτη Άσκηση - Λύσεις

Άσκηση 1. Περιγράψτε προσεκτικά τον αλγόριθμο και την ανάλυση του πιθανοτικού αλγορίθμου για το MAX3SAT, καθώς και τη εφαρμογή της μεθόδου derandomization with conditional probabilities για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Λύση. Υπάρχει στις σημειώσεις.

Άσκηση 2. Δώστε μια απόδειξη της πρότασης: Αν $d(v)$ δηλώνει το βαθμό ενός κόμβου v, τότε το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο ενός γράφου έχει μέγεθος τουλάχιστον $\sum_{v\in V} 1/(1+d(v))$.

Λύση. Υπάρχει στις σημειώσεις.

Άσκηση 3. Έστω Y μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στους φυσικούς αριθμούς $\{0,1,2,\ldots\}$. Δείξτε ότι

$$E[Y]^2/E[Y^2] \leq P[Y \geq 1] \leq E[Y].$$

Λύση. Η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Markov:

$$P[Y \geq 1] \leq E[Y]/1.$$

Για την αριστερή ανισότητα, ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X που έχει ανάλογες πιθανότητες με την Y, με τη μοναδική εξαίρεση πως $P[X=0]=0$. Δηλαδή,

$$P[X=i] = \begin{cases} 0 & \text{αν } i=0 \\ P[Y=i]/(1-P[Y=0]) & \text{αν } i>0 \end{cases}$$

Έχουμε

$$E[X^2] = \sum_{i=1} i^2 \cdot P[X=i] = \sum_{i=1} i^2 \cdot P[Y=i]/(1-P[Y=0]) = E[Y^2]/(1-P[Y=0])$$

και

$$E[X]^2 = (\sum_{i=1} i \cdot P[X=i])^2 = (\sum_{i=1} i \cdot P[Y=i]/(1-P[Y=0]))^2 = E[Y]^2/(1-P[Y=0])^2.$$

Για τη μεταβλητή X (όπως και για κάθε τυχαία μεταβλητή: απόδειξη $0 \leq E[(X-E[X])^2)] = E[X^2]-E[X]^2$) έχουμε:

$$E[X^2] \geq E[X]^2,$$

που είναι ισοδύναμη με

$$(1-P[Y=0])E[Y^2] \geq E[Y]^2 \implies E[Y]^2/E[Y^2] \leq P[Y \geq 1].$$

Ένα λάθος που υπήρχε σε πολλές απαντήσεις ήταν η χρήση της second moment method ανισότητας. Αλλά, η αριστερή ανισότητα δεν προκύπτει μόνο από την ανισότητα της second moment method· είναι πιο ισχυρή.

Άσκηση 4. Έστω ένας τυχαίος γράφος του $G_{n,p}$ με $p = c/n$, όπου c κάποια σταθερά. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των τριγώνων (3-κλικών) σε ένα τέτοιο γράφο.

- Με τη βοήθεια της ανισότητας Markov δείξτε ότι $P[X >= 1] \leq c^3/6$.
- Με την second moment method δείξτε[1] ότι $Pr[X = 0] \leq (6 + 9c)/c^3$.

Λύση. Η πρώτη ερώτηση είναι εύκολη. Έχουμε $E[X] = \binom{n}{3}p^3 \leq c^3/6$. Με χρήση της ανισότητας Markov, $P[X \geq 1] \leq E[X] = c^3/6$.

Για τη δεύτερη ερώτηση θα χρησιμοποιήσουμε τη second moment method. Θα υπολογίσουμε πρώτα το $\mathrm{Var}[X]$.

Έστω $C_1, \dots, C_{\binom{n}{3}}$ όλες οι τριάδες των κόμβων, και έστω X_k η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει αν η τριάδα C_k είναι κλίκα. Προφανώς $X = \sum_k X_k$.

Έχουμε

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\sum_k X_k] = \sum_k \mathrm{Var}[X_k] + \sum_{k,l} Covar[X_k, X_l],$$

$$\mathrm{Var}[X_k] = E[X_k^2] - E[X]^2 = p^3 - p^6$$

Αν οι τριάδες C_k και C_l μοιράζονται το πολύ ένα κόμβο, τότε $\mathrm{Covar}[X_k, X_l] = 0$. Αν μοιράζονται δύο κόμβους τότε

$$\mathrm{Covar}[X_k, X_l] = E[X_k X_l] - E[X_k]E[X_l] = p^5 - p^6$$

Αν τα βάλουμε όλα μαζί, έχουμε

$$\mathrm{Var}[X] = \binom{n}{3}(p^3 - p^6) + \binom{n}{4}\binom{4}{2}(p^5 - p^6) \leq \binom{n}{3}p^3 + 6\binom{n}{4}p^5$$

και

$$\begin{aligned}
Pr[X=0] &\leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2} \\
&= \frac{\binom{n}{3}p^3 + 6\binom{n}{4}p^5}{\binom{n}{3}^2 p^6} \\
&= \frac{6(n-1)(n-2)}{n^2c^3} + \frac{9(n-3)}{(n-1)(n-2)c} \\
&\leq \frac{6}{c^3} + \frac{9}{nc}
\end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση δεν ξεπερνά το $\frac{6+9c}{c^3}$ για κάθε $c/n \leq 1$.

[1] Η αρχική εκφώνηση είχε κάπως διαφορετική έκφραση.