

## ΑΛΟΥΜΙΝΙΟ

### ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ

Μια εταιρεία αλουμινίου έχει αποθέματα βωξίτη στην περιοχή G, στην S και στην A. Επίσης, υπάρχουν εργοστάσια μετάλλου, όπου ο βωξίτης μετατρέπεται σε αλουμίνα (ένα ενδιάμεσο προϊόν) στην S, στην B, στην A και στην K.

Η αρχική μετατροπή σε αλουμίνα είναι σχετικά φθηνή παραγωγική διαδικασία. Η τήξη, εν τούτοις, είναι ακριβή, όπου ηλεκτρικοί κάμινοι χρησιμοποιούνται γι' αυτό τον λόγο. Ένας τόνο αλουμίνας παράγει 0,4 τόνους αλουμίνιο.

Τα ακόλουθα δεδομένα είναι διαθέσιμα στους Πίνακες 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17 και 6.18.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1**  
**Εξόρυξη Βωξίτη**

ΕΞΟΡΥΞΗ ΒΩΞΙΤΗ	ΚΟΣΤΟΣ ΕΞΟΡΥΞΗΣ (Χ.Μ / ΤΟΝΟ)	ΕΤΗΣΙΑ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΒΩΞΙΤΗ(ΤΟΝΟΙ)	ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ
G	4,2	36.000	6%
S	3,6	52.000	8%
A	5,4	28.000	6,2%

**ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2**  
**Μετατροπή Βωξίτη σε Αλουμίνα**

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΒΩΞΙΤΗ ΣΕ ΑΛΟΥΜΙΝΑ	ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ (Χ.Μ/ΤΟΝΟ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ)	ΕΤΗΣΙΑ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΒΩΞΙΤΟΥ (ΤΟΝΟΥΣ)
S	3,3	40.000
B	3,8	30.000
A	3,2	20.000
K	2,4	80.000

**ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3**  
**Τήξη**

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΤΗΞΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ	ΚΟΣΤΟΣ ΤΗΞΗΣ (Χ.Μ./ΤΟΝΟ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ)	ΕΤΗΣΙΑ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΤΗΞΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ (ΤΟΝΟΥΣ)
B	85	4.000
K	52	7.000

**ΠΙΝΑΚΑΣ 6.4**  
**Ζήτηση Τελικού Προϊόντος**

<b>ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΤΗΞΗΣ</b> <b>ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ</b>	<b>ΕΤΗΣΙΕΣ ΠΩΛΗΣΕΙΣ</b> <b>ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ (ΤΟΝΟΥΣ)</b>
B	1.000
K	1.200

**ΠΙΝΑΚΑΣ 6.5**  
**Κόστος Μεταφοράς Βωξίτη (Χ.Μ./ΤΟΝΟ)**

<b>ΑΠΟ-ΠΡΟΣ</b>	<b>S</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>K</b>
G	4,0	5,1	20,1	19,2
S	0,1	2,2	16,3	15,1
A	16,3	6,2	0,1	9,4

**ΠΙΝΑΚΑΣ 6.6**  
**Κόστος Μεταφοράς Αλουμίνας (Χ.Μ./ΤΟΝΟ)**

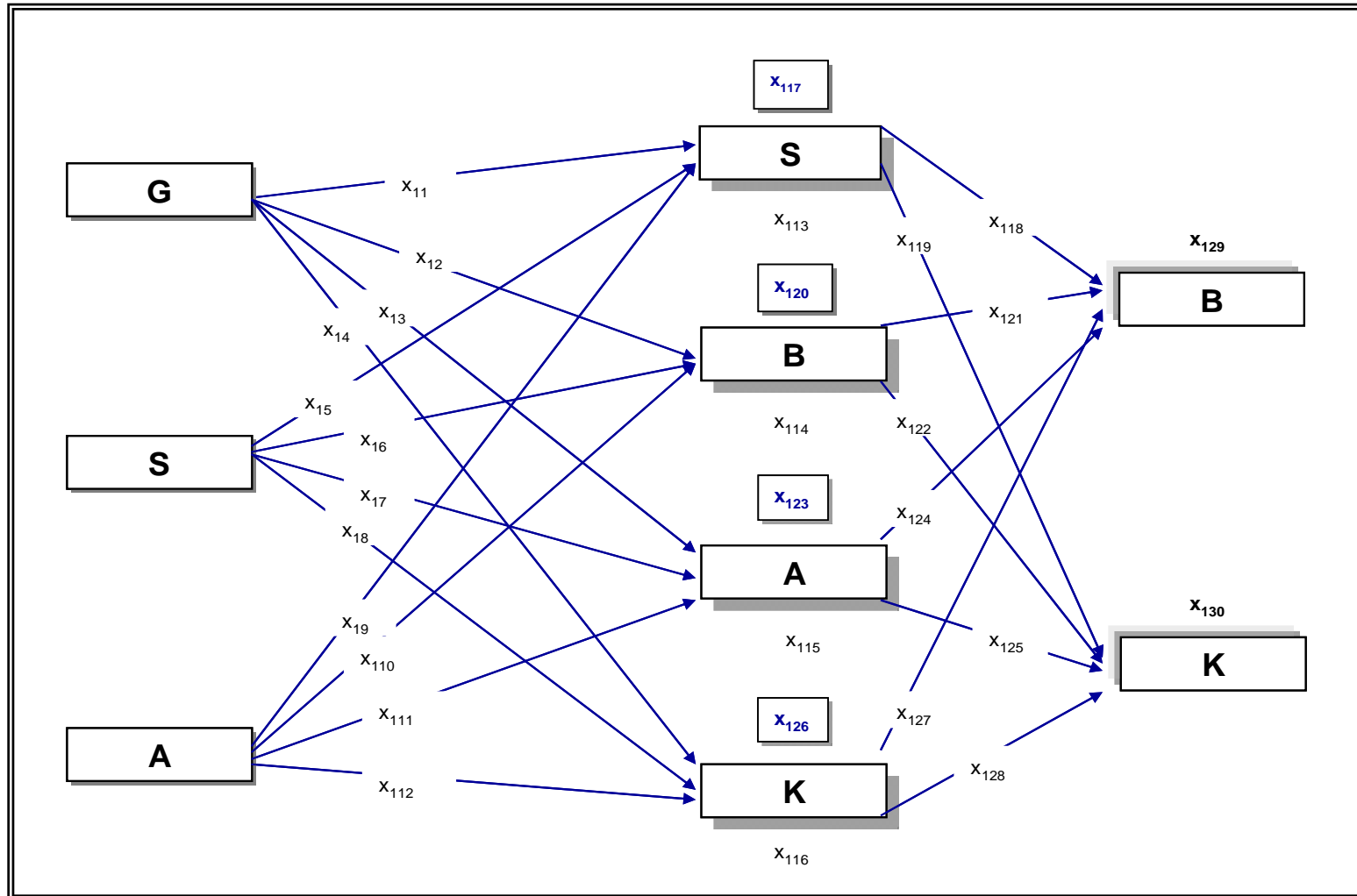
<b>ΑΠΟ - ΠΡΟΣ</b>	<b>B</b>	<b>K</b>
S	2,20	15,10
B	0,00	16,15
A	6,20	9,40
K	14,65	0,00

Σημειώνεται ότι τελικό προϊόν μετάλλου (αλουμινίου) δεν μεταφέρεται μεταξύ B, K.

Ζητούμενο του εν λόγω προβλήματος είναι να σχεδιαστεί η εξόρυξη, επεξεργασία και παραγωγή αλουμινίου έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ελαχιστοποίηση του κόστους.

Στην Εικόνα 6.2 απεικονίζεται σχηματικά η διαδικασία παραγωγής αλουμινίου.

**ΕΙΚΟΝΑ 6.1: Γραφική Απεικόνιση της Διαδικασίας Παραγωγής Αλουμινίου**



## ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΟΥ

### ΠΡΩΤΕΥΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

#### Σχέση Σκοπού

$$\begin{aligned}
 \text{ΕΛΑΧ } Z = & 8,2x_{11} + 9,3x_{12} + 24,7x_{13} + 23,4x_{14} + 3,7x_{15} + 5,8x_{16} + 19,9x_{17} + 18,7x_{18} + \\
 & + 21,7x_{19} + 11,6x_{110} + 5,5x_{111} + 14,8x_{112} + 3,3x_{113} + 3,8x_{114} + 3,2x_{115} + 2,4x_{116} + \\
 & + 0x_{117} + 2,2x_{118} + 15,10x_{119} + 0x_{120} + 0x_{121} + 16,15x_{122} + 0x_{123} + 6,20x_{124} + \\
 & + 9,40x_{125} + 0x_{126} + 14,65x_{127} + 0x_{128} + 85x_{129} + 52x_{130} + 0x_{131} + 0x_{132}
 \end{aligned}$$

#### Σύστημα Περιορισμών

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{17} + x_{13} + x_{14} & \leq 36.000 \\
 & \quad x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} & \leq 52.000 \\
 & \quad \quad x_{19} + x_{110} + x_{111} + x_{112} & \leq 28.000 \\
 x_{11} & + x_{15} & + x_{19} & - x_{113} & = 0 \\
 x_{12} & & + x_{16} & + x_{110} & - x_{114} & = 0 \\
 & x_{13} & + x_{17} & + x_{111} & - x_{115} & = 0 \\
 & & x_{14} & + x_{18} & + x_{112} & - x_{116} & = 0 \\
 0,06x_{11} + 0,08x_{15} & + 0,062x_{19} & & - x_{117} & = 0 \\
 0,06x_{12} + 0,08x_{16} & + 0,062x_{110} & & - x_{120} & = 0 \\
 0,06x_{13} + 0,08x_{17} & + 0,062x_{111} & & - x_{123} & = 0 \\
 0,06x_{14} + 0,08x_{18} & + 0,062x_{112} & & - x_{126} & = 0 \\
 & & & - x_{118} - x_{119} + x_{117} & = 0 \\
 & & & - x_{121} - x_{122} + x_{120} & = 0 \\
 & & & - x_{124} - x_{125} + x_{123} & = 0 \\
 & & & - x_{127} - x_{128} + x_{126} & = 0 \\
 & & & & x_{113} & \leq 40.000 \\
 & & & & x_{114} & \leq 30.000 \\
 & & & & x_{115} & \leq 20.000 \\
 & & & & x_{116} & \leq 80.000 \\
 & & & & x_{118} + x_{121} + x_{124} + x_{127} - x_{129} & = 0 \\
 & & & & x_{119} + x_{122} + x_{125} + x_{128} - x_{130} & = 0 \\
 & & & & x_{129} & \leq 4.000 \\
 & & & & x_{130} & \leq 7.000 \\
 & & & & - x_{131} + 0,4x_{129} & = 0 \\
 & & & & - x_{132} + 0,4x_{130} & = 0 \\
 & & & & x_{131} & \leq 1.000 \\
 & & & & x_{132} & \leq 1.200
 \end{aligned}$$

Για  $x_{1i} \geq 0$  με  $i=1,2,3\dots132$

## ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Το δυϊκό πρόβλημα έχει σκοπό τη μεγιστοποίηση του βαθμού αξιοποίησης των χρησιμοποιούμενων παραγωγικών συντελεστών. Συνεπώς:

### Σχέση Σκοπού

$$\begin{aligned} \text{ΜΕΓ } Y = & 36.000y_1 + 52.000y_2 + 28.000y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + 0y_8 + 0y_9 + 0y_{10} + \\ & + 0y_{11} + 0y_{12} + 0y_{13} + 0y_{14} + 0y_{15} + 40.000y_{16} + 30.000y_{17} + 20.000y_{18} + \\ & + 80.000y_{19} + 0y_{20} + 0y_{21} + 4.000y_{22} + 7.000y_{23} + 1.000y_{24} + 0y_{25} + 0y_{26} + \\ & + 1.200y_{27} \end{aligned}$$

### Σύστημα Περιορισμών

$$\begin{aligned} y_1 + y_4 + 0,06y_8 & \leq 8,2 & (1) \\ y_1 + y_5 + 0,06y_9 & \leq 9,3 & (2) \\ y_1 + y_6 + 0,06y_{10} & \leq 24,7 & (3) \\ y_1 + y_7 + 0,06y_{11} & \leq 23,4 & (4) \\ y_2 + y_4 + 0,08y_8 & \geq 3,7 & (5) \\ y_2 + y_5 + 0,08y_9 & \geq 5,8 & (6) \\ y_2 + y_6 + 0,08y_{10} & \geq 19,9 & (7) \\ y_2 + y_7 + 0,08y_{11} & \geq 18,7 & (8) \\ y_3 + y_4 + 0,062y_8 & \leq 21,7 & (9) \\ y_3 + y_5 + 0,062y_9 & \leq 11,6 & (10) \\ y_3 + y_6 + 0,062y_{10} & \leq 5,5 & (11) \\ y_3 + y_7 + 0,062y_{11} & \leq 14,8 & (12) \\ -y_4 + y_{16} & \leq 3,3 & (13) \\ -y_5 + y_{17} & \leq 3,8 & (14) \\ -y_6 + y_{18} & \leq 3,2 & (15) \\ -y_7 + y_{19} & \leq 2,4 & (16) \\ -y_8 + y_{12} & \leq 0 & (17) \\ -y_{12} + y_{20} & \leq 2,2 & (18) \\ y_{12} - y_{21} & \leq 15,1 & (19) \\ -y_9 + y_{13} & \leq 0 & (20) \\ y_{13} - y_{20} & \leq 0 & (21) \\ y_{13} - y_{21} & \leq 6,15 & (22) \\ -y_{10} + y_{14} & \leq 0 & (23) \\ y_{14} - y_{20} & \leq 6,2 & (24) \\ y_{14} - y_{21} & \leq 9,4 & (25) \\ -y_{11} + y_{15} & \leq 0 & (26) \\ y_{15} - y_{20} & \leq 14,65 & (27) \\ y_{15} - y_{21} & \leq 0 & (28) \\ -y_{20} + y_{22} + 0,4y_{24} & \geq 85 & (29) \\ -y_{21} + y_{23} + 0,4y_{25} & \geq 52 & (30) \\ -y_{24} + y_{26} & \leq 0 & (31) \\ -y_{25} + y_{27} & \leq 0 & (32) \end{aligned}$$

## Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η λύση του πρωτεύοντος προβλήματος παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.19 και είναι η ακόλουθη:

**ΠΙΝΑΚΑΣ 6.7**

**Τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών του Πρωτεύοντος Προβλήματος**

$x_{12} = 1.666,6$	$x_5 = 40.000$	$x_{16} = 12.000$
$x_{111} = 20.000$	$x_{113} = 40.000$	$x_{114} = 13.667$
$x_{115} = 20.000$	$x_{117} = 3.200$	$x_{118} = 1.440$
$x_{119} = 1.760$	$x_{120} = 1.060$	$x_{121} = 1.060$
$x_{123} = 1.240$	$x_{125} = 1.240$	$x_{129} = 2.500$
$x_{130} = 3.000$	$x_{131} = 1.000$	$x_{132} = 1.200$

Σημειώνεται ότι προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού ορίστηκαν βοηθητικές μεταβλητές, οι οποίες εκφράζουν την αργούσα παραγωγική δυναμικότητα της παραγωγικής μονάδας στην οποία αναφέρονται:

- $x'_{11}$ : Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του ορυχείου G:  $x'_{11}=34.333$
- $x'_{19}$ : Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του ορυχείου A:  $x'_{19}=8.000$
- $x'_{116}$ : Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου μετατροπής K βωξίτη σε αλουμίνα:  $x'_{116}=80.000$
- $x'_{114}$ : Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου μετατροπής B βωξίτη σε αλουμίνα:  $x'_{114}=16.333$
- $x'_{129}$ : Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου τήξης B:  $x'_{129}=1.500$
- $x'_{130}$ : Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου τήξης K:  $x'_{130}=4.000$

Όσον αφορά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προέκυψε από τη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος σημειώνεται ότι η παραγωγή του τελικού προϊόντος στα εργοστάσια B και K ποσού 1.000 ( $x_{131}$ ) και 1.200 ( $x_{132}$ ) τόνων θα πραγματοποιηθεί με ελάχιστο κόστος 1.000.933 χρηματικές μονάδες.

Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι δεν θα χρησιμοποιηθεί το εργοστάσιο μετατροπής αλουμίνας σε αλουμίνιο και επεξεργασίας βωξίτη K, σύμφωνα και με την Εικόνα 6.3. Παράλληλα παρατηρείται ότι ο βωξίτης που προέρχεται από τα ορυχεία του G, θα μεταφερθεί για μετατροπή σε αλουμίνα στο εργοστάσιο B. Ο βωξίτης που προέρχεται από τα ορυχεία του S θα αποσταλεί μερικώς στο εργοστάσιο μετατροπής του S και μερικώς στο αντίστοιχο εργοστάσιο B. Τέλος, ο βωξίτης προέλευσης ορυχείων A θα μεταφερθεί στο εργοστάσιο επεξεργασίας και μετατροπής του σε αλουμίνα στο A. Η αλουμίνα παραγωγής εργοστασίου S θα μεταφερθεί για τήξη μερικώς στο εργοστάσιο τήξης B και μερικώς στο εργοστάσιο τήξης K. Η αλουμίνα παραγωγής B, θα μεταφερθεί στο εργοστάσιο της B, ενώ τέλος η αλουμίνα παραγωγής A για τήξη στο εργοστάσιο τήξης B.

Η διερεύνηση της ύπαρξης σχολάζουσας παραγωγικής δυναμικότητας τόσο στα ορυχεία G, B, A, όσο και στα εργοστάσια μετατροπής S, B, A, K και τήξης B, K γίνεται με τον έλεγχο των τιμών που λαμβάνουν οι βοηθητικές μεταβλητές, οι οποίες παρουσιάζονται στην άριστη λύση.

Συγκεκριμένα από τη μελέτη των τιμών των βοηθητικών μεταβλητών προκύπτουν τα ακόλουθα:

Για τη Διαδικασία Εξόρυξης Βωξίτη:

- Η παραγωγική δυναμικότητα των ορυχείων G αξιοποιείται μόνο κατά 4,6% ( $x'_{11}=34.333 < 36.000$ ).
- Η παραγωγική δυναμικότητα των ορυχείων S αξιοποιείται πλήρως.
- Η παραγωγική δυναμικότητα των ορυχείων A αξιοποιείται κατά 71,4% ( $x'_{19}=8.000 < 28.000$ ).

Για τη Διαδικασία Μετατροπής Βωξίτη σε Αλουμίνα:

- Η παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου S, μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα αξιοποιείται πλήρως.
- Η παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου B, μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα αξιοποιείται κατά 45,5% ( $x'_{114}=16.333 < 30.000$ ).
- Η παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου A, μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα αξιοποιείται πλήρως.
- Τέλος, το εργοστάσιο μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα στο K, παραμένει πλήρως αναξιοποίητο ( $x'_{116}=80.000 = 80.000$ ).

Για τη Διαδικασία Τήξης Αλουμίνας σε Αλουμίνιο:

- Η παραγωγική δυναμικότητα τήξης αλουμίνας για παραγωγή αλουμινίου στο εργοστάσιο B αξιοποιείται κατά 62,5% ( $x'_{129}= 1.500 < 4.000$ ), ενώ η αντίστοιχη του εργοστασίου K κατά 42,8% ( $x'_{130}= 4.000 < 7.000$ ).

**ΕΙΚΟΝΑ 6.2**  
**Γραφική Απεικόνιση της Άριστης λύσης για τη Διαδικασία Παραγωγής Αλουμινίου**

