

# Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ

Κ.Ε. Κιουλάφας  
Επιχειρησιακός Ερευνητής  
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

*ΔΠΜΣ “Οικονομική & Διοίκηση Τηλεπικοινωνιακών Δικτύων”*

*Αθήνα, 2007*

## ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ

- Μια εταιρεία αλουμινίου έχει αποθέματα βωξίτη στην περιοχή G, στην S και στην A.
- Επίσης, υπάρχουν εργοστάσια μετάλλου, όπου ο βωξίτης μετατρέπεται σε αλουμίνα (ένα ενδιάμεσο προϊόν) στην S, στην B, στην A και στην K.
- Η αρχική μετατροπή σε αλουμίνα είναι σχετικά φθηνή παραγωγική διαδικασία.
- Η τήξη, εν τούτοις, είναι ακριβή, όπου ηλεκτρικοί κάμινοι χρησιμοποιούνται γι' αυτό τον λόγο. Ένας τόνος αλουμίνας παράγει 0,4 τόνους αλουμίνιο.

### Εξόρυξη Βωξίτη

ΕΞΟΡΥΞΗ ΒΩΞΙΤΗ	ΚΟΣΤΟΣ ΕΞΟΡΥΞΗΣ (Χ.Μ / ΤΟΝΟ)	ΕΤΗΣΙΑ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΒΩΞΙΤΗ (ΤΟΝΟΙ)	ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ
G	4,2	36.000	6%
S	3,6	52.000	8%
A	5,4	28.000	6,2%

### Μετατροπή Βωξίτη σε Αλουμίνα

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΒΩΞΙΤΗ ΣΕ ΑΛΟΥΜΙΝΑ	ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ (Χ.Μ/ΤΟΝΟ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ)	ΕΤΗΣΙΑ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΒΩΞΙΤΟΥ (ΤΟΝΟΥΣ)
S	3,3	40.000
B	3,8	30.000
A	3,2	20.000
K	2,4	80.000

# ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ

## Τήξη

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΤΗΞΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ	ΚΟΣΤΟΣ ΤΗΞΗΣ (Χ.Μ./ΤΟΝΟ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ)	ΕΤΗΣΙΑ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΤΗΞΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ (ΤΟΝΟΥΣ)
B	85	4.000
K	52	7.000

## Ζήτηση Τελικού Προϊόντος

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΤΗΞΗΣ ΑΛΟΥΜΙΝΑΣ	ΕΤΗΣΙΕΣ ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ (ΤΟΝΟΥΣ)
B	1.000
K	1.200

## Κόστος Μεταφοράς Βωξίτη (Χ.Μ./ΤΟΝΟ)

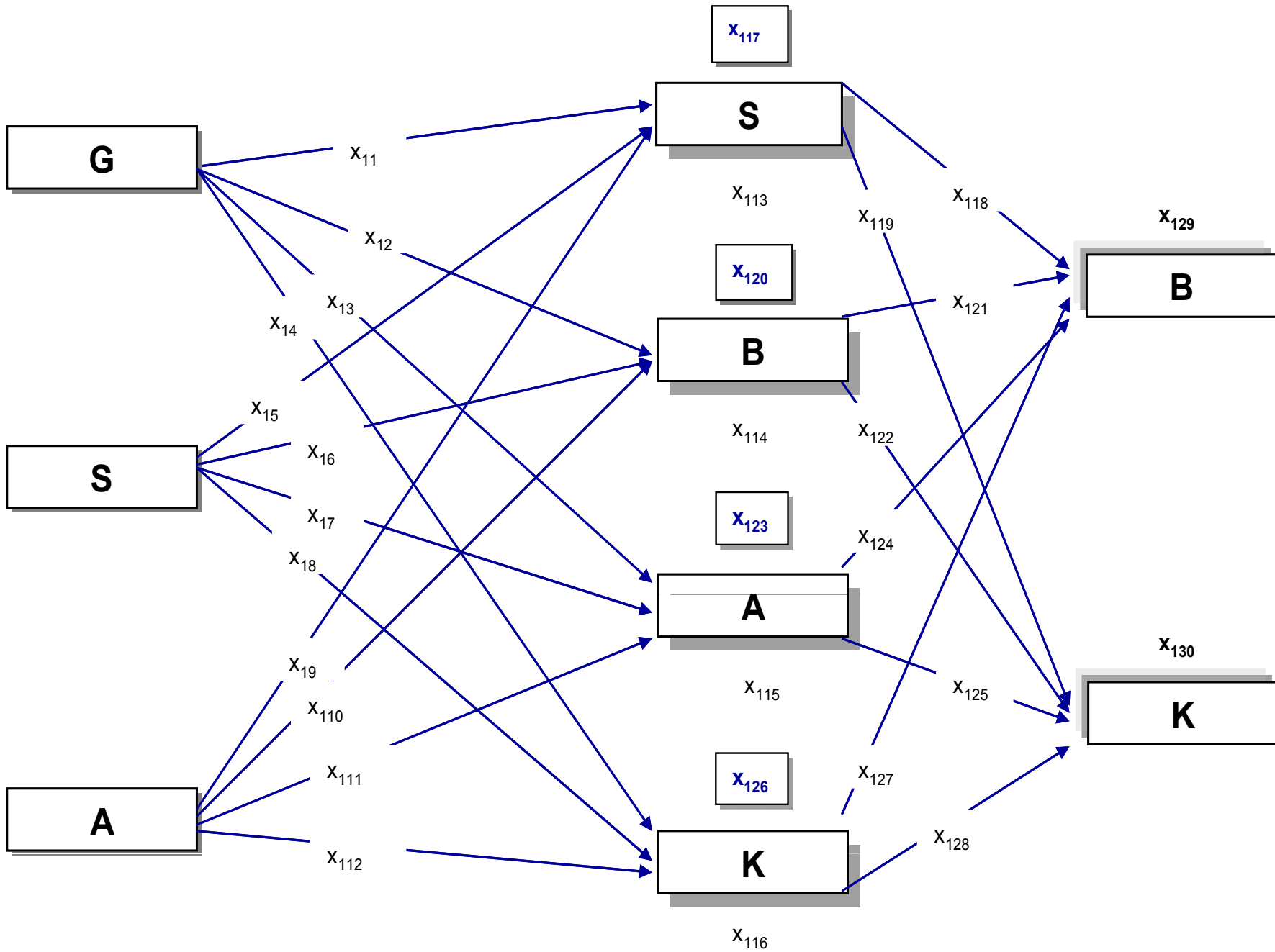
ΑΠΟ-ΠΡΟΣ	S	B	A	K
G	4,0	5,1	20,1	19,2
S	0,1	2,2	16,3	15,1
A	16,3	6,2	0,1	9,4

## Κόστος Μεταφοράς Αλουμίνας (Χ.Μ./ΤΟΝΟ)

ΑΠΟ - ΠΡΟΣ	B	K
S	2,20	15,10
B	0,00	16,15
A	6,20	9,40
K	14,65	0,00

## ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ

- Σχεδιασμός εξόρυξης, επεξεργασίας και παραγωγής αλουμινίου με το ελάχιστο κόστος
- Ζητείται από ένα νέο πελάτη προϊόν εξόρυξης του Ορυχείου G ύψους 30.000 μονάδων. Τί θα απαντήσουμε;
- Οι εργαζόμενοι ορυχείων S προβάλλουν απαιτήσεις υπερωριών. Τι θα απαντήσουμε?
- Οι εργαζόμενοι του εργοστασίου μετατροπής B σε αλουμίνα στο K κάνουν απεργία; ( Πως θα χειριστούμε την κατάσταση;)
- Μας ζητούν παραγωγή αλουμίνας από το εργοστάσιο B ύψους 2000 μονάδων παρέχοντας την πρώτη ύλη. Τι απαντούμε;
- Μεταξύ των ορυχείων S και του εργοστασίου μετατροπής καταστρέφεται ο δρόμος και αδυνατεί η τροφοδοσία του K σε ποσοστό 20%. Τι συνέπειες θα έχει;



# ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

## ΠΡΩΤΕΥΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σχέση Σκοπού

$$\begin{aligned} \text{ΕΛΑΧ } Z = & 8,2x_{11} + 9,3x_{12} + 24,7x_{13} + 23,4x_{14} + 3,7x_{15} + 5,8x_{16} + 19,9x_{17} + 18,7x_{18} + \\ & + 21,7x_{19} + 11,6x_{110} + 5,5x_{111} + 14,8x_{112} + 3,3x_{113} + 3,8x_{114} + 3,2x_{115} + 2,4x_{116} + \\ & + 0x_{117} + 2,2x_{118} + 15,10x_{119} + 0x_{120} + 0x_{121} + 16,15x_{122} + 0x_{123} + 6,20x_{124} + \\ & + 9,40x_{125} + 0x_{126} + 14,65x_{127} + 0x_{128} + 85x_{129} + 52x_{130} + 0x_{131} + 0x_{132} \end{aligned}$$

## Σύστημα Περιορισμών

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$	$\leq 36.000$
$x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18}$	$\leq 52.000$
$x_{19} + x_{110} + x_{111} + x_{112}$	$\leq 28.000$
$x_{11} + x_{15} + x_{19} - x_{113}$	$= 0$
$x_{12} + x_{16} + x_{110} - x_{114}$	$= 0$
$x_{13} + x_{17} + x_{111} - x_{115}$	$= 0$
$x_{14} + x_{18} + x_{112} - x_{116}$	$= 0$
$0,06x_{11} + 0,08x_{15} + 0,062x_{19} - x_{117}$	$= 0$
$0,06x_{12} + 0,08x_{16} + 0,062x_{110} - x_{120}$	$= 0$
$0,06x_{13} + 0,08x_{17} + 0,062x_{111} - x_{123}$	$= 0$

$0,06x_{14} + 0,08x_{18} + 0,062x_{112} - x_{126}$	$= 0$
$- x_{118} - x_{119} + x_{117}$	$= 0$
$- x_{121} - x_{122} + x_{120}$	$= 0$
$- x_{124} - x_{125} + x_{123}$	$= 0$
$- x_{127} - x_{128} + x_{126}$	$= 0$
$x_{113}$	$\leq 40.000$
$x_{114}$	$\leq 30.000$
$x_{115}$	$\leq 20.000$
$x_{116}$	$\leq 80.000$
$x_{118} + x_{121} + x_{124} + x_{127} - x_{129}$	$= 0$
$x_{119} + x_{122} + x_{125} + x_{128} - x_{130}$	$= 0$
$x_{129}$	$\leq 4.000$
$x_{130}$	$\leq 7.000$
$- x_{131} + 0,4x_{129}$	$= 0$
$- x_{132} + 0,4x_{130}$	$= 0$
$x_{131}$	$\leq 1.000$
$x_{132}$	$\leq 1.200$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

## ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

### Σχέση Σκοπού

$$\text{ΜΕΓ } Y = 36.000y_1 + 52.000y_2 + 28.000y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + 0y_8 + 0y_9 + 0y_{10} + 0y_{11} + 0y_{12} + 0y_{13} + 0y_{14} + 0y_{15} + 40.000y_{16} + 30.000y_{17} + 20.000y_{18} + 80.000y_{19} + 0y_{20} + 0y_{21} + 4.000y_{22} + 7.000y_{23} + 1.000y_{24} + 0y_{25} + 0y_{26} + 1.200y_{27}$$

### Σύστημα Περιορισμών

$y_1 + y_4 + 0,06y_8$	$\leq 8,2$
$y_1 + y_5 + 0,06y_9$	$\leq 9,3$
$y_1 + y_6 + 0,06y_{10}$	$\leq 24,7$
$y_1 + y_7 + 0,06y_{11}$	$\leq 23,4$
$y_2 + y_4 + 0,08y_8$	$\geq 3,7$
$y_2 + y_5 + 0,08y_9$	$\geq 5,8$
$y_2 + y_6 + 0,08y_{10}$	$\geq 19,9$
$y_2 + y_7 + 0,08y_{11}$	$\geq 18,7$
$y_3 + y_4 + 0,062y_8$	$\leq 21,7$
$y_3 + y_5 + 0,062y_9$	$\leq 11,6$
$y_3 + y_6 + 0,062y_{10}$	$\leq 5,5$
$y_3 + y_7 + 0,062y_{11}$	$\leq 14,8$

$-y_4 + y_{16}$	$\leq 3,3$
$-y_5 + y_{17}$	$\leq 3,8$
$-y_6 + y_{18}$	$\leq 3,2$
$-y_7 + y_{19}$	$\leq 2,4$
$-y_8 + y_{12}$	$\leq 0$
$-y_{12} + y_{20}$	$\leq 2,2$
$y_{12} - y_{21}$	$\leq 15,1$
$-y_9 + y_{13}$	$\leq 0$
$y_{13} - y_{20}$	$\leq 0$
$y_{13} - y_{21}$	$\leq 6,15$
$-y_{10} + y_{14}$	$\leq 0$
$y_{14} - y_{20}$	$\leq 6,2$
$y_{14} - y_{21}$	$\leq 9,4$
$-y_{11} + y_{15}$	$\leq 0$
$y_{15} - y_{20}$	$\leq 14,65$
$y_{15} - y_{21}$	$\leq 0$
$-y_{20} + y_{22} + 0,4y_{24}$	$\geq 85$

$-y_{21} + y_{23} + 0,4y_{25}$	$\leq 52$
$-y_{24} + y_{26}$	$\leq 0$
$-y_{25} + y_{27}$	$\leq 0$

## Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

### Τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών του Πρωτεύοντος Προβλήματος

$x_{12} = 1.666,6$	$x_{15} = 40.000$	$x_{16} = 12.000$
$x_{111} = 20.000$	$x_{113} = 40.000$	$x_{114} = 13.667$
$x_{115} = 20.000$	$x_{117} = 3.200$	$x_{118} = 1.440$
$x_{119} = 1.760$	$x_{120} = 1.060$	$x_{121} = 1.060$
$x_{123} = 1.240$	$x_{125} = 1.240$	$x_{129} = 2.500$
$x_{130} = 3.000$	$x_{131} = 1.000$	$x_{132} = 1.200$

Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού ορίστηκαν βοηθητικές μεταβλητές, οι οποίες εκφράζουν την αργούσα παραγωγική δυναμικότητα της παραγωγικής μονάδας στην οποία αναφέρονται:

- **x'11:** Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του ορυχείου G:  $x'11=34.333$
- **x'19:** Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του ορυχείου A:  $x'19=8.000$
- **x'116:** Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου μετατροπής K βωξίτη σε αλουμίνα:  $x'116=80.000$
- **x'114:** Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου μετατροπής B βωξίτη σε αλουμίνα:  $x'114=16.333$
- **x'129:** Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου τήξης B:  $x'129=1.500$
- **x'130:** Αργούσα παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου τήξης K:  $x'130=4.000$



# Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τη μελέτη των τιμών των βοηθητικών μεταβλητών προκύπτουν τα ακόλουθα:

Για τη Διαδικασία Εξόρυξης Βωξίτη:

- Η παραγωγική δυναμικότητα των ορυχείων G αξιοποιείται μόνο κατά 4,6% ( $x'_{11}=34.333 < 36.000$ ).
- Η παραγωγική δυναμικότητα των ορυχείων S αξιοποιείται πλήρως.
- Η παραγωγική δυναμικότητα των ορυχείων A αξιοποιείται κατά 71,4% ( $x'_{19}=8.000 < 28.000$ ).

Για τη Διαδικασία Μετατροπής Βωξίτη σε Αλουμίνα:

- Η παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου S, μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα αξιοποιείται πλήρως.
- Η παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου B, μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα αξιοποιείται κατά 45,5% ( $x'_{114}=16.333 < 30.000$ ).
- Η παραγωγική δυναμικότητα του εργοστασίου A, μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα αξιοποιείται πλήρως.
- Τέλος, το εργοστάσιο μετατροπής βωξίτη σε αλουμίνα στο K, παραμένει πλήρως αναξιοποίητο ( $x'_{116}=80.000 = 80.000$ ).

Για τη Διαδικασία Τήξης Αλουμίνας σε Αλουμίνιο:

- Η παραγωγική δυναμικότητα τήξης αλουμίνας για παραγωγή αλουμινίου στο εργοστάσιο B αξιοποιείται κατά 62,5% ( $x'_{129}= 1.500 < 4.000$ ), ενώ η αντίστοιχη του εργοστασίου K κατά 42,8% ( $x'_{130}= 4.000 < 7.000$ ).

# Γραφική Απεικόνιση της Άριστης λύσης για τη Διαδικασία Παραγωγής Αλουμινίου

