Περιεχόμενα

1 Εντοπισμός ριζών πολυωνύμου **2**

1.1 Πολυώνυμα 2

1.2 Αλυσίδα του Sturm 4

1.3 Φράγματα των ριζών πολυωνύμου 6

1.4 Μέθοδος του Bernoulli 8

1.5 Μέθοδος QD (Πηλίκων-Διαφορών) 11

1.6 Εύρεση ριζών πραγματικών πολυωνύμων - Μέθοδος Bairstow 14

1.7 Μιγαδικές ρίζες και μέθοδος Müller 20

2 Μη Γραμμικά Συστήματα **24**

2.1 Μέθοδος απαλοιφής 25

2.2 Γραφική μέθοδος 26

2.3 Επαναληπτικές μέθοδοι 27

2.4 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson(N-R) 30

2.5 Το δίλημμα στην επιλογή μεγέθους βήματος h 31

2.6 Βελτιωτικός τύπος του Richardson 33

2.7 Προσεγγιστικοί τύποι υψηλότερης τάξης για τις παραγώγους $f^{(k)}(x)$ 35

Κεφάλαιο 1

Εντοπισμός ριζών πολυωνύμου

Ο αριθμητικός υπολογισμός των ριζών ενός πολυωνύμου είναι ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα σε πολλούς τομείς της Αριθμητικής ανάλυσης όπως κατά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (ή συστημάτων διαφορικών εξισώσεων), ή όπου αλλού απαιτείται η εύρεση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα (πρόβλημα ιδιοτιμών).

Για τον αριθμητικό υπολογισμό των πραγματικών ριζών πολυωνύμου μπορούν να εφαρμοσθούν οι γνωστές μέθοδοι διχοτόμησης, τέμνουσας, Newton-Raphson. Ειδικότερα, λόγω του ενδιαφέροντος του προβλήματος και της ανάγκης να αναπτυχθούν μέθοδοι για τον υπολογισμό και των μιγαδικών ριζών ενός πολυωνύμου μελετούμε αναλυτικότερα το πρόβλημα αυτό.

1.1 Πολυώνυμα

Έστω το πολυώνυμο n βαθμού

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

όπου $n \geq 1,\ a_n \neq 0$ και $a_i \in \mathbb{C}$. Αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένες βασικές προτάσεις για τα πολυώνυμα, πολύ χρήσιμες για τον αριθμητικό υπολογισμό των ριζών αυτών.

Πρόταση 1.1. *Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Επομένως έχει ακριβώς n ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathbb{C}$ από τις οποίες μερικές ή ακόμη και όλες μπορεί να συμπίπτουν. Το πολυώνυμο γράφεται*

$$P(x) = a_n (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$$

Αν ισχύει $P(x) = (x - \rho)^k Q(x)$ με $Q(\rho) \neq 0, k \in \mathbb{N}^*$, τότε λέμε ότι η ρ είναι ρίζα πολλαπλότητας k.

Πρόταση 1.2. *Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ είναι οι ρίζες του $P(x)$, τότε ισχύουν οι γνωστοί τύποι Vieta:*

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_{n-1}\rho_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ \rho_1\rho_2\rho_3 \cdots \rho_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Πρόταση 1.3. *Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, αν έχει μια μιγαδική ρίζα $\rho = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$ τότε θα έχει ως ρίζα και τη συζυγή αυτής $\overline{\rho} = \alpha - \beta i$. Επομένως ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.*

Πρόταση 1.4. *Κανόνας του Descarte: Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_i \in \mathbb{R}$. Αν μ ο αριθμός των μεταβολών του προσήμου στην ακολουθία των συντελεστών a_n, a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots,$ a_1, a_0 (οι μηδενικοί συντελεστές, αν υπάρχουν, παραλείπονται), τότε ο αριθμός των θετικών ριζών του πολυωνύμου $P(x)$ ισούται με $k = \mu - 2\lambda$, όπου λ φυσικός με $0 \leq \lambda \leq \frac{\mu}{2}$.*

Εφαρμογή 1.1. Έστω $P(x) = x^7 - 2x^6 + x^4 - 3x^3 + 4$. Να βρείτε το μέγιστο αριθμό θετικών και αρνητικών ριζών του.

Έχουμε:

$$\begin{array}{cccccccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ & 1 & & 2 & 3 & & 4 & \end{array}$$

’ρα $\mu = 4$ και $0 \leq \lambda \leq 2$, οπότε $\lambda = 0, 1, 2$.

- Για $\lambda = 0 \Rightarrow k = \mu - 2\lambda = 4 - 2 \cdot 0 = \boxed{4}$
- Για $\lambda = 1 \Rightarrow k = \mu - 2\lambda = 4 - 2 \cdot 1 = 2$
- Για $\lambda = 2 \Rightarrow k = \mu - 2\lambda = 4 - 2 \cdot 2 = 0$

Επομένως το $P(x)$ έχει το πολύ 4 θετικές ρίζες.

Παρατήρηση 1.1. Η *Πρόταση 1.4* μπορεί να εφαρμοσθεί για να δώσει πληροφορίες σχετικά με τον αριθμό των αρνητικών ριζών ενός πολυωνύμου, αρκεί να θέσουμε στο $P(x)$ όπου x το $-x$: Είναι $P(x) = 0 \iff P_1(x) \equiv P(-x) = 0$, οπότε αν ρ είναι θετική ρίζα του P_1 τότε το $-\rho$ είναι αρνητική ρίζα του $P(x)$.

Εφαρμογή 1.2. Θέτουμε $P_1(x) = P(-x) = -x^7 - 2x^6 + x^4 + 3x^3 + 4$. Τότε στην ακολουθία των συντελεστών $-1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4$ έχουμε $\mu = 1$ αλλαγή προσήμου και $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, οπότε $\lambda = 0$. 'ρα $k = 1 - 2 \cdot 0 = \boxed{1}$.

Επομένως το $P_1(x)$ έχει μία το πολύ θετική ρίζα, οπότε το $P(x)$ έχει μία το πολύ αρνητική ρίζα *.

Πρόταση 1.5. *Για κάθε ρίζα ρ του $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ισχύει ο παρακάτω τύπος φράγματος:*

$$|\rho| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \cdot + |a_n|}{|a_n|}$$

1.2 Αλυσίδα του Sturm

Ορισμός 1.1. *Αν οι συναρτήσεις $f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x)$ είναι ορισμένες στο $[\alpha, \beta]$ και ικανοποιούν τις προϋποθέσεις:*

α') $f_i \in C([\alpha, \beta]),\ \forall\, i = 0(1)n$

β') $f_0(\alpha) \neq 0,\ f_0(\beta) \neq 0$ *και* $f_n(x) \neq 0,\ \forall\, x \in [\alpha, \beta]$

γ') *Αν για* $\xi \in [\alpha, \beta]$ *ισχύει* $f_i(\xi) = 0$, *τότε* $f_{i-1}(\xi) \cdot f_{i+1}(\xi) < 0$, *όπου* $1 \leq i \leq n-1$

δ') *Αν για* $\xi \in [\alpha, \beta]$ *ισχύει* $f_0(\xi) = 0$ *τότε υπάρχει* $h > 0$ *οσοδήποτε μικρό τέτοιο ώστε* $f_0(\xi - h) f_1(\xi) < 0$ *και* $f_0(\xi + h) f_1(\xi) > 0$.

Τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $f_i(x),\ i = 0(1)n$ αποτελούν μια αλυσίδα Sturm στο $[\alpha, \beta]$.

Πρόταση 1.6. *Αν οι συναρτήσεις $f_i(x),\ i = 0(1)n$ αποτελούν μια αλυσίδα Sturm στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συμβολίσουμε με $\mu(\xi)$ το πλήθος των μεταβολών του προσήμου στην ακολουθία των αριθμών:*

$$f_0(\xi),\ f_1(\xi), \ldots,\ f_n(\xi)$$

Τότε η διαφορά $\mu(\alpha) - \mu(\beta)$ ισούται με τον αριθμό των ριζών της $f_0(x)$ στο $[\alpha, \beta]$.

*Το εν λόγω πολυώνυμο έχει στην πραγματικότητα δυο ζεύγη συζυγών μιγαδικών ριζών, 2 θετικές πραγματικές ρίζες και μια αρνητική.

Πρόταση 1.7. *Έστω $f_0(x) = P_n(x)$ ένα πολυώνυμο $n-$βαθμού χωρίς πολλαπλές ρίζες. Θέτουμε $f_1(x) = f_0'(x)$ και κατασκευάζουμε την ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη ως εξής:*

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= f_1(x)\pi_1(x) - f_2(x) \\
f_1(x) &= f_2(x)\pi_2(x) - f_3(x) \\
&\vdots \\
f_{n-2}(x) &= f_{n-1}(x)\pi_{n-1}(x) - f_n(x)
\end{aligned}$$

όπου τα $\pi_i(x)$ είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού.

Τότε η ακολουθία των συμαρτήσεων $f_0(x),\ f_1(x), \ldots,\ f_n(x)$ αποτελεί μια αλυσίδα Sturm σε κάθε διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f_0(\alpha) \neq 0$ και $f_0(\beta) \neq 0$.

Παρατήρηση 1.2. Αν το πολυώνυμο $f_0(x)$ έχει στο (α, β) πολλαπλές ρίζες τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε όπως παραπάνω τις συναρτήσεις $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_k$ όπου $k < n$ και $f_{k+1} = 0$. Τότε όμως δεν σχηματίζεται αλυσίδα Sturm. Ισχύει όμως πάλι ότι η διαφορά $\mu(\alpha) - \mu(\beta)$ ισούται με το πλήθος των ριζών της $f_0(x)$ στο $[\alpha, \beta]$, όπου η κάθε μια ρίζα λαμβάνεται μόνο μια φορά ανεξάρτητα από την πολλαπλότητά της.

Εφαρμογή 1.3. Έστω $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \\
f_1(x) &= f_0'(x) = 4x^3 - 4x + 3 \\
f_2(x) &= x^2 - \frac{9}{4}x + 1 \\
f_3(x) &= -\frac{49}{4}x + 6 \\
f_4(x) &= -\frac{331}{2401}
\end{aligned}$$

και άρα έχουμε τον πίνακα:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$\mu(x)$	Συμπέρασμα
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\frac{331}{2401}$	3	$3-3=0$ καμία ρίζα στο $(-\infty, -2)$
-2	13	-21	$\frac{19}{2}$	$-\frac{37}{2}$	$-\frac{331}{2401}$	3	$3-2=1$ ρίζα στο $[-2, 0]$
0	-1	3	1	6	$-\frac{331}{2401}$	2	$2-1=1$ ρίζα στο $[0, 1]$
1	1	3	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{25}{4}$	$-\frac{331}{2401}$	1	$1-1=0$ καμία ρίζα στο $(1, +\infty)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{331}{2401}$	1	

Για τη διευκόλυνση στην εκτέλεση των διαδοχικών διαιρέσεων του Ευκλειδείου αλγορίθμου, δίνουμε έναν αλγόριθμο με τον οποίο εκτελείται η διαίρεση ενός πολυωνύμου

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

με ένα άλλο πολυώνυμο:

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \qquad \text{όπου} \qquad m \leq n$$

Αλγόριθμος 1.1. *Διαίρεση Πολυωνύμων.*

1. *Διάβασε* $n,\ a_i,\ i = 0(1)n,\ m,\ b_i,\ i = 0(1)m$
2. *Για* $k = n - m(-1)0$
   2.1. $c_k = \dfrac{a_{m+k}}{b_m}$
   2.2. *Για* $j = m + k - 1(-1)k$
   $a_j = a_j - c_k b_{j-k}$
3. *Τύπωσε[Πηλίκο:* $c_k,\ k = n - m(-1)0$, *Υπόλοιπο:* $a_j,\ j = m - 1(-1)0$*]*

Στον ανωτέρω αλγόριθμο θέτουμε τους συντελεστές των διαδοχικών υπολοίπων στις θέσεις των συντελεστών a_j για λόγους οικονομίας μνήμης. Έτσι προκύπτουν τελικά οι συντελεστές $a_j,\ j = m - 1(-1)0$ του τελικού υπολοίπου. Τα $c_k,\ k = n - m(-1)0$ είναι οι συντελεστές του πηλίκου.

1.3 Φράγματα των ριζών πολυωνύμου

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, όπου $a_k \in \mathbb{R}$ ή $a_k \in \mathbb{C}$. Για την εύρεση διαστήματος του $\mathbb{R}$ ή δίσκου του $\mathbb{C}$, μέσα στο οποίο βρίσκονται όλες οι ρίζες ρ_k του $P(x)$, έχει δοθεί ένα πλήθος τύπων. Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένους σταθερούς αριθμούς r τέτοιους ώστε να ισχύει: $|\rho_k| \leq r\ ,\ \forall\, k = 1(1)n$

1. $r = 1 + A \ \ ,\ \ A = \max\limits_{k=1(1)n} \{|a_k|\}$
2. $r = (1 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$
3. $r = |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \sqrt[3]{|a_3|} + \cdots + \sqrt[n]{|a_n|}$

4. $r = \max\left\{B, \sqrt[n]{B}\right\} = \begin{cases} B & ,B \geq 1 \\ \sqrt[n]{B} & ,B < 1 \end{cases}, \quad B = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

5. $r = \min\{C, D\}, \quad C = \max\{1, B\}, \quad D = \max\{1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|, |a_n|\}$

6. $r = \max\limits_{k=1(1)n} \left\{ \sqrt[k]{n|a_k|} \right\}$

7. $r = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 2E}\right), \quad E = \max\limits_{k=1(1)n} \{|a_1 a_k - a_{k+1}|\}, \quad a_{n+1} = 0$

8. $r = 1 + \sqrt{F}, \quad F = \max\limits_{k=1(1)n} \{|(1 - a_1)a_k - a_{k+1}|\}, \quad a_{n-1} = 0$

9. $r = \dfrac{1}{2}\left(1 + |a_1| + \sqrt{(1 - a_1)^2 + 4A_1}\right) \quad , \quad A_1 = \max\limits_{k=2(1)n} \{|a_k|\}$

10. $r = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{(1 + A)^n}\right) A, \quad A = \max\limits_{k=1(1)n} \{|a_k|\}$

Εκτός από τα ανωτέρω φράγματα, που ορίζονται μέσω των σταθερών αριθμών r, ένα (άνω και κάτω) φράγμα πολύ χρήσιμο στην πράξη, το οποίο φράσσει το μέτρο όλων των ριζών ρ του πολυωνύμου $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, $a_k \in \mathbb{R}$ ή $a_k \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ είναι το εξής:

$$\frac{|a_n|}{|a_n| + A_2} \leq |\rho| \leq \frac{|a_0| + A_1}{|a_0|}$$

όπου $A_1 = \max\limits_{k=1(1)n} \{|a_k|\}$, $A_2 = \max\limits_{k=0(1)n-1} \{|a_k|\}$.

Αν το δοθέν πολυώνυμο $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ έχει πραγματικούς συντελεστές και όλες του οι ρίζες είναι πραγματικές τότε αυτές βρίσκονται μέσα στο διάστημα, του οποίου τα άκρα είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$nz^2 + 2a_1 z + 2(n-1)a_2 - (n-2)a_1^2 = 0$$

Παρατήρηση 1.3. Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο $Q(x) = x^n P(\frac{1}{x}) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + 1$ τότε για κάθε ρίζα ρ_k του $P(x)$ ισχύει

$$\frac{1}{r} \leq |\rho_k| \quad , \quad \forall\, k = 1(1)n$$

όπου r η σταθερά που προσδιορίζεται από τους ανωτέρω τύπους 1 έως 10 σε σχέση με το πολυώνυμο $Q(x)$.

Έτσι λοιπόν π.χ. σύμφωνα με τον τύπο 1 και για το πολυώνυμο $Q(x)$ θα έχουμε:

$$r_q = 1 + A_q \quad \text{όπου} \quad A_q = \max_{k=0(1)n-1} \left\{ \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right\} \ , \ a_0 = 1$$

οπότε για κάθε ρίζα t_k του $Q(x)$ θα ισχύει

$$|t_k| \le r_q \quad , \quad \forall\, k = 1(1)n$$

ενώ για κάθε ρίζα του $P(x)$, αφού $\rho_k = \dfrac{1}{t_k}$, έπεται

$$|\rho_k| \ge \frac{1}{r_q} = \frac{1}{1 + A_q}$$

1.4 Μέθοδος του Bernoulli

Με τη μέθοδο Bernoulli μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυο πρώτες μικρότερες κατά μέτρο ρίζες ενός πολυωνύμου. Θεωρούμε το πολυώνυμο $n-$βαθμού

$$P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \quad , \quad c_i \in \mathbb{C},\ c_n \ne 0$$

και υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το πολυώνυμο αυτό έχει ακριβώς n διακεκριμένες μη μηδενικές ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$.

Η αρίθμηση έχει γίνει κατ΄ αύξουσα σειρά ως προς το μέτρο, δηλαδή $0 < |\rho_1| < |\rho_2| \le \cdots \le |\rho_n|$. Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση

$$R(x) = \frac{1}{P_n(x)}$$

Προφανώς οι πόλοι της $R(x)$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P_n(x)$ και αντίστροφα. ΄ρα το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των πόλων της συνάρτησης $R(x)$.

Αλγόριθμος 1.2. *Μέθοδος Bernoulli*

1. *Αναπτύσσουμε σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και ακτίνα ρ_1 τη συνάρτηση $R(x)$ και έχουμε:*

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$$

Επειδή $P_n(0) \ne 0$ έχουμε $c_0 \ne 0$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε $c_0 = 1$.

΄ρα $1 = (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n)(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots)$. Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = 1\\
&\beta_1 + \beta_0 c_1 = 0\\
&\beta_2 + \beta_1 c_1 + \beta_0 c_2 = 0\\
&\beta_3 + \beta_2 c_1 + \beta_1 c_2 + \beta_0 c_3 = 0\\
&\vdots\\
&\beta_n + \beta_{n-1} c_1 + \beta_{n-2} c_2 + \cdots + \beta_0 c_n = 0\\
\text{για } k > n \qquad &\beta_k + \beta_{k-1} c_1 + \beta_{k-2} c_2 + \cdots + \beta_{k-n} c_n = 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό λύνεται εύκολα ως προς $\beta_0, \beta_1, \ldots$ και είναι

$$\beta_k = -\sum_{\lambda=1}^{\mu} c_\lambda \beta_{k-\lambda} \qquad \text{όπου} \qquad \mu = \min\{k, n\}$$

2. *Υπολογίζουμε τους όρους $q_k,\ \varepsilon_k,\ p_k$ από τους τύπους*

$$q_k = \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} \quad , \quad \varepsilon_k = q_{k+1} - q_k \quad , \quad p_k = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} q_k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

3. *Οι ακολουθίες $q_k,\ p_k$ συγκλίνουν αντίστοιχα προς τις αντίστροφες τιμές των ριζών: $\frac{1}{\rho_1},\ \frac{1}{\rho_2}$. Αν επιπλέον ισχύει $|\rho_2| < |\rho_3|$ η σύγκλιση είναι γραμμική με συντελεστή σύγκλισης $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.*

Παρατήρηση 1.4. Αν οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι μιγαδικές συζυγείς, δηλαδή ισχύει $0 < |\rho_1| = |\rho_2| \le \cdots \le |\rho_n|$ τότε οι ακολουθίες q_k και p_k δεν συγκλίνουν προς τις αντίστροφες τιμές των ριζών $\rho_1,\ \rho_2$ (διότι δεν ισχύει $|\rho_1| < |\rho_2|$), αλλά αποδεικνύεται ότι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$q_{k-1} p_k x^2 - (q_k + p_k) x + 1 = 0$$

συγκλίνουν για $k \to \infty$ προς τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα.

Αξίζει να αναφερθεί ότι ο αλγόριθμος QD (Πηλίκων-Διαφορών) είναι μια επέκταση της μεθόδου Bernoulli για τον υπολογισμό όλων των ριζών ενός πολυωνύμου(με την υπόθεση $0 < |\rho_1| < |\rho_2| < \cdots < |\rho_n|$).

Αν αναλύσουμε τη συνάρτηση $R(x) = \frac{1}{P_n(x)}$ σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$R(x) = \frac{a_1}{x - \rho_1} + \frac{a_2}{x - \rho_2} + \cdots + \frac{a_n}{x - \rho_n} \qquad \text{όπου} \qquad a_i \in \mathbb{C},\ a_i \neq 0$$

Για κάθε x με $|x| < |\rho_i|$ ισχύει (από τον τύπο της γεωμετρικής σειράς)

$$\frac{a_i}{x - \rho_i} = -\frac{a_i}{\rho_i - x} = -\frac{a_i}{\rho_i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{\rho_i}} = -\frac{a_i}{\rho_i}\left(1 + \frac{x}{\rho_i} + \frac{x^2}{\rho_i^2} + \cdots\right) = -a_i\left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{x}{\rho_i^2} + \frac{x^2}{\rho_i^3} + \cdots\right)$$

Επομένως για $|x| < |\rho_1|$ η $R(x)$ αναπτύσσεται στη δυναμοσειρά

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \quad \text{όπου} \quad \beta_k = -\left(\frac{a_1}{\rho_1^{k+1}} + \frac{a_2}{\rho_2^{k+1}} + \cdots + \frac{a_n}{\rho_n^{k+1}} \right) \tag{1.1}$$

Έστω τώρα ότι ισχύει $|\rho_1| < |\rho_2|$ τότε από την (1.1) έχουμε:

$$q_k := \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} = \frac{\frac{a_1}{\rho_1^{k+1}} + \frac{a_2}{\rho_2^{k+1}} + \cdots + \frac{a_n}{\rho_n^{k+1}}}{\frac{a_1}{\rho_1^{k}} + \frac{a_2}{\rho_2^{k}} + \cdots + \frac{a_n}{\rho_n^{k}}} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1 + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_n}\right)^{k+1}}{1 + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_n}\right)^{k}} \tag{1.2}$$

Επειδή $|\rho_1| < |\rho_i|$ έχουμε $\left|\frac{\rho_1}{\rho_i}\right| < 1$ για κάθε $i = 2, 3, \ldots, n$ και άρα:

$$\lim_{k\to\infty} q_k = \frac{1}{\rho_1}$$

Ας μελετήσουμε τώρα την ταχύτητα σύγκλισης της ακολουθίας q_k, η οποία είναι $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}}$, όπου $\varepsilon_k = q_{k+1} - q_k$. Από την (1.2) έχουμε

$$\frac{1}{\rho_1} - q_k = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\frac{a_2}{a_1}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k + \frac{a_3}{a_1}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^k + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_n}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_n}\right)^k}{1 + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k + \frac{a_3}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^k + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_n}\right)^k}$$

ή

$$\frac{\frac{1}{\rho_1} - q_k}{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\frac{a_2}{a_1}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + \frac{a_3}{a_1}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^k + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_n}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_n}\right)^k}{1 + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k + \frac{a_3}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^k + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_n}\right)^k} \tag{1.3}$$

Αν υποθέσουμε ότι επιπλέον ισχύει $|\rho_2| < |\rho_3|$ και θέσουμε στην (1.3) όπου k το $k+1$ τότε διαιρώντας κατά μέλη και παίρνοντας το όριο καθώς $k \to \infty$ έχουμε:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\rho_1} - q_{k+1}}{\frac{1}{\rho_1} - q_k} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

'ρα η σύγκλιση είναι γραμμική με συντελεστή σύγκλισης $\frac{\rho_1}{\rho_2}$. Αν θέσουμε $\varepsilon_k = q_{k+1} - q_k$ τότε με απλούς μετασχηματισμούς βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

'ρα για την ακολουθία

$$p_k = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} q_k$$

ισχύει

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \frac{1}{\rho_2}$$

1.5 Μέθοδος QD (Πηλίκων-Διαφορών)

Η σύγκλιση της μεθόδου QD είναι γραμμική (και συνεπώς αργή) και ευαίσθητη ως προς την επίδραση σφαλμάτων στρογγύλευσης, αλλά είναι πολύ χρήσιμη για την εύρεση αρχικών προσεγγίσεων των πραγματικών ριζών και των δευτεροβαθμίων παραγόντων που αντιστοιχούν σε κάθε ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών. Αυτές οι προσεγγίσεις είναι απαραίτητες ως αρχικές τιμές σε μια πιο γρήγορα συγκλίνουσα μέθοδο, π.χ. τη μέθοδο Newton-Raphson.

Στη μέθοδο QD για την προσέγγιση των ριζών της πολυωνυμικής εξίσωσης $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ δημιουργούνται οι παρακάτω ακολουθίες πραγματικών αριθμών

$$\begin{array}{lll} \left\{e_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\infty} & \forall\, k = 1, 2, \ldots, n+1 & (n+1 \text{ το πλήθος}) \\ \left\{q_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\infty} & \forall\, k = 1, 2, \ldots, n & (n \text{ το πλήθος}) \end{array}$$

όπου

$$\begin{array}{lll} e_i^{(1)} & = 0 & \text{για } i = 1, 2, \ldots \\ e_i^{(n+1)} & = 0 & \text{για } i = 1, 2, \ldots \\ e_1^{(k)} & = \frac{a_{n-k}}{a_{n-k+1}} & \text{για } k = 2, 3, \ldots, n \\ q_1^{(1)} & = -\frac{a_{n-1}}{a_n} & \\ q_1^{(k)} & = 0 & \text{για } k = 2, 3, \ldots, n \\ q_{i+1}^{(k)} & = e_i^{(k+1)} + q_i^{(k)} - e_i^{(k)} & \text{για } k = 1, 2, \ldots, n \text{ και } i = 1, 2, \ldots \\ e_{i+1}^{(k)} & = \frac{q_{i+1}^{(k)} \cdot e_i^{(k)}}{q_{i+1}^{(k-1)}} & \text{για } k = 2, 3, \ldots, n \text{ και } i = 1, 2, \ldots \end{array}$$

Αν και η κατασκευή των ακολουθιών φαίνεται πολύπλοκη, στην πράξη μπορεί να υλοποιηθεί πολύ απλά με τη χρήση ενός πίνακα που κατασκευάζουμε εισάγοντας αρχικά όλες τις τιμές για τα $q_1^{(k)}$, $e_1^{(k)}$, $e_i^{(1)}$ και $e_i^{(n+1)}$:

i	$e_i^{(1)}$	$q_i^{(1)}$	$e_i^{(2)}$	$q_i^{(2)}$	$e_i^{(3)}$	$q_i^{(3)}$	$\cdots$	$e_i^{(n)}$	$q_i^{(n)}$	$e_i^{(n+1)}$
1	0	$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$	$\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$	0	$\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}$	0	$\cdots$	$\frac{a_0}{a_1}$	0	0
2	0									0
3	0									0
$\vdots$	$\vdots$									$\vdots$

Το επόμενο βήμα κατασκευάζει τις εισόδους $q_2^{(k)}$ στη δεύτερη γραμμή παίρνοντας το στοιχείο αμέσως πάνω και δεξιά, δηλαδή το $e_1^{(k+1)}$, προσθέτοντας το αμέσως από πάνω στοιχείο $q_1^{(k)}$ και αφαιρώντας το στοιχείο πάνω αριστερά $e_1^{(k)}$:

i	$e_i^{(1)}$	$q_i^{(1)}$	$e_i^{(2)}$		$q_i^{(2)}$		$e_i^{(3)}$	$q_i^{(3)}$	$\cdots$	$e_i^{(n)}$	$q_i^{(n)}$	$e_i^{(n+1)}$
1	0	$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$	$\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$	$\xleftarrow{-}$	0	$\xleftarrow{+}$	$\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}$	0		$\frac{a_0}{a_1}$	0	0
				$\searrow^{=}$								
2	0	$q_2^{(1)}$			$\boxed{q_2^{(2)}}$			$q_2^{(3)}$			$q_2^{(n)}$	0
3	0											0
$\vdots$	$\vdots$											$\vdots$

Οι είσοδοι $e_2^{(k)}$ τώρα προκύπτουν παίρνοντας το δεξιό στοιχείο $q_2^{(k)}$, πολλαπλασιάζοντας με το από πάνω στοιχείο $e_1^{(k)}$ και διαιρώντας με το αριστερό στοιχείο $q_2^{(k-1)}$.

i	$e_i^{(1)}$	$q_i^{(1)}$	$e_i^{(2)}$	$q_i^{(2)}$		$e_i^{(3)}$		$q_i^{(3)}$	$\cdots$	$e_i^{(n)}$	$q_i^{(n)}$	$e_i^{(n+1)}$
1	0	$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$	$\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$	0		$\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}$		0		$\frac{a_0}{a_1}$	0	0
					$\div \swarrow$		$\nwarrow \times$					
2	0	$q_2^{(1)}$	$e_2^{(2)}$	$q_2^{(2)}$	$\xrightarrow{=}$	$\boxed{e_2^{(3)}}$		$q_2^{(3)}$	$\cdots$	$e_2^{(n)}$	$q_2^{(n)}$	0
3	0											0
$\vdots$	$\vdots$											$\vdots$

Παρατήρηση 1.5. Αν

$$\lim_{i\to\infty} e_i^{(k)} = \lim_{i\to\infty} e_i^{(k+1)} = 0$$

για κάποιο $k = 1, 2, \ldots, n$ τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει το $\lim\limits_{i\to\infty} q_i^{(k)}$, το οποίο είναι μια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. Επιπλέον, αν η ακολουθία $\left\{e_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει στο 0 για κάποιο k τότε οι ακολουθίες $\left\{\tau_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ και $\left\{s_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ όπου

$$\begin{aligned} \tau_i^{(k)} &= q_i^{(k-1)} + q_i^{(k)} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots \\ s_i^{(k)} &= q_{i-1}^{(k-1)} \cdot q_i^{(k)} \quad , \quad i = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

συγκλίνουν προς τους αριθμούς $\tau^{(k)}$ και $s^{(k)}$, αντίστοιχα, όπου το

$$x^2 - \tau^{(k)} x + s^{(k)}$$

είναι ένας δευτεροβάθμιος παράγοντας του $P_n(x)$ που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών.

Αλγόριθμος 1.3. *Μέθοδος QD*

1. *Διάβασε* n , $a_i, i = 0(1)n,\ M$

2. $e_1^{(1)} = 0,\quad e_1^{(n+1)} = 0,\quad q_1^{(1)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\quad i = 2,$
   $IND_1 = 1,\ IND_{n+1} = 1$ $\quad$ *(*$IND_k = 1$ *δηλώνει σύγκλιση της* $e_i^{(k)}$ *στο 0)*

3. *Για* $k = 2(1)n$
   $q_1^{(k)} = 0,\quad e_1^{(k)} = \frac{a_{n-k}}{a_{n-k+1}},\ IND_k = 0,\quad \tau_1^{(k)} = 0,\quad s_1^{(k)} = 0$

4. *Όσο* $i \leq M$ *επανάλαβε*

   4.1. $e_i^{(1)} = 0,\ e_i^{(n+1)} = 0,\ q_i^{(1)} = e_{i-1}^{(2)} + q_{i-1}^{(1)} - e_{i-1}^{(1)}$

   4.2. *Για* $k = 2(1)n$
   $q_i^{(k)} = e_{i-1}^{(k+1)} + q_{i-1}^{(k)} - e_{i-1}^{(k)}$
   $e_i^{(k)} = (q_i^{(k)} \cdot e_{i-1}^{(k)})/q_i^{(k-1)}$
   $\tau_i^{(k)} = q_i^{(k-1)} + q_i^{(k)}$
   $s_i^{(k)} = q_{i-1}^{(k-1)} \cdot q_i^{(k)}$

   4.3. *Για* $k = 2(1)n$
   Αν $e_j^{(k)} \to 0$ *τότε* $IND_k = 1$
   Αν $e_j^{(k)} \not\to 0$ *τότε* $IND_k = -1$ *(αν η εκλογή δεν είναι φανερή τότε* $IND_k = 0$*)*

   4.4. $NS = 0$ $\quad$ *(δηλώνει ότι όλες οι* $e_j^{(k)}$ *συγκλίνουν)*

   4.5. *Για* $k = 2(1)n$, *Αν* $IND_k = 0$ *τότε* $NS = 1$

   4.6. *Αν* $NS = 0$ *τότε*

   4.6.1. *Για* $k = 2(1)n + 1$
   Αν $IND_k = 1$ *και* $IND_{k-1} = 1$ *τότε Τύπωσε("Προσεγγιστική ρίζα: ",* q_i^{k-1}*)*
   αλλιώς Τύπωσε("Προσεγγιστικός δευτεροβάθμιος παράγοντας:", $x^2 - \tau_i^{(k)} x + s_i^{(k)}$*)*

   4.6.2. *Τέλος.*

   4.7. $i = i + 1$

5. *Τύπωσε("Υπέρβαση μέγιστου αριθμού επαναλήψεων:" ,* M*), Τέλος.*

Παρατήρηση 1.6. Είναι φανερό ότι η μέθοδος QD απαιτεί να μην υπάρχουν μηδενικοί συντελεστές στο πολυώνυμο. Έστω $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ και υπάρχει δείκτης k τέτοιος ώστε $a_k = 0$. Αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα *Taylor* του $P_n(x)$ με κέντρο κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k = \tilde{P}_n(\underbrace{x - x_0}_{y}) = \tilde{P}_n(y)$$

όπου $c_k = \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(x_0) = \Upsilon_{n-k}(x_0)$ (τα υπόλοιπα των διαδοχικών διαιρέσεων του $P_n(x)$ δια $x - x_0$, π.χ. $c_n = \Upsilon_0(x_0)$).

Επομένως όταν υπάρχουν μηδενικοί συντελεστές η μέθοδος QD μπορεί να εφαρμοστεί στο πολυώνυμο $\tilde{P}_n(y)$, με συντελεστές $c_k \neq 0$.

1.6 Εύρεση ριζών πραγματικών πολυωνύμων - Μέθοδος Bairstow

Η ευστάθεια των ηλεκτρικών ή μηχανικών συστημάτων σχετίζεται με το πραγματικό μέρος των μιγαδικών ριζών ορισμένων πολυωνύμων βαθμού τουλάχιστον 30 με πραγματικούς συντελεστές. Έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν γενικοί τύποι για τον υπολογισμό των ριζών πολυωνύμων βαθμού μεγαλύτερου από 4. Έτσι δεν υπάρχει άλλη επιλογή παρά μόνο η χρήση μιας αριθμητικής μεθόδου για την εύρεση των ριζών.

Αν μετατρέψουμε τις πραγματικές μεταβλητές σε μιγαδικές (τροποποιώντας κατάλληλα τις παραγράφους εισόδου/εξόδου) σε ένα πρόγραμμα FORTRAN της μεθόδου Newton-Raphson, μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικές τιμές των ριζών. Όμως αυτή η εργασία είναι αρκετά επίπονη αν δεν είναι αυτόματα διαθέσιμη μια αριθμητική μιγαδικών. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια περισσότερο επιθυμητή διαδικασία.

Η βασική ιδέα είναι να βρούμε τους δευτεροβάθμιους παράγοντες που αντιστοιχούν στις μιγαδικές ρίζες και έπειτα να βρούμε τις ρίζες αυτών των δευτεροβαθμίων πολυωνύμων με τους γνωστούς τύπους.

Γνωρίζουμε ότι αν μια πολυωνυμική εξίσωση

$$P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1} = 0$$

έχει μια μιγαδική ρίζα $\alpha + \beta i$ τότε θα έχει ρίζα και τη συζυγή της $\alpha - \beta i$, οπότε το πολυώνυμο:

$$R(x) = (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$$

είναι παράγοντας του $P(x)$.

Επειδή το $R(x)$ έχει μόνο πραγματικούς συντελεστές, είναι καταλληλότερο να εργασθούμε με αυτό παρά με τις ρίζες του.

Η ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $R(x)$ είναι

$$P(x) = R(x) \cdot Q(x) + Y(x)$$

όπου $Y(x) = ax + b$ και $Q(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n - 2$. Αν στην παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης του $P(x)$ με το δευτεροβάθμιο παράγοντα $R(x)$ συμβολίσουμε:

$$\begin{aligned}
R(x) &= x^2 - rx - s \\
Y(x) &= b_n(x - r) + b_{n+1} \\
Q(x) &= b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}
\end{aligned}$$

τότε η ταυτότητα γράφεται:

$$\underbrace{a_1 x^n + \cdots + a_n x + a_{n+1}}_{P(x)} = \underbrace{(x^2 - rx - s)}_{R(x)} \cdot \underbrace{(b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1})}_{Q(x)} + \underbrace{b_n(x - r) + b_{n+1}}_{Y(x)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων προκύπτουν οι ισότητες:

$$\begin{array}{rcl}
a_1 = b_1 & & b_1 = a_1 \\
a_2 = b_2 - rb_1 & & b_2 = a_2 + rb_1 \\
a_3 = b_3 - rb_2 - sb_1 & & b_3 = a_3 + rb_2 + sb_1 \\
a_4 = b_4 - rb_3 - sb_2 & \Longleftrightarrow & b_4 = a_4 + rb_3 + sb_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_n = b_n - rb_{n-1} - sb_{n-2} & & b_n = a_n + rb_{n-1} + sb_{n-2} \\
a_{n+1} = b_{n+1} - rb_n - sb_{n-1} & & b_{n+1} = a_{n+1} + rb_n + sb_{n-1}
\end{array}$$

Σχηματικά έχουμε

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\
 & & & & & & & & \\
\times s & 0 & 0 & sb_1 & sb_2 & \cdots & sb_{n-3} & sb_{n-2} & sb_{n-1} \\
 & & & \nearrow & \nearrow & & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\
\times r & 0 & rb_1 & rb_2 & rb_3 & \cdots & rb_{n-2} & rb_{n-1} & rb_n \\
\hline
 & & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \nearrow & \\
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_{n-1} & \boxed{b_n \quad b_{n+1}} &
\end{array}
$$

Παράδειγμα 1.1. Έστω $P(x) = x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 11x - 2, \quad R(x) = x^2 - 2x + 3$. Είναι $r = 2,\ s = -3$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & -2 & 7 & -4 & 11 & -2 \\
\times(-3) & 0 & 0 & -3 & 0 & -12 & -12 \\
\times 2 & 0 & 2 & 0 & 8 & 8 & 14 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & 4 & \boxed{7 \quad\quad 0} & \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6
\end{array}
$$

'ρα $Q(x) = x^3 + 4x + 4, \quad Y(x) = 7(x-2) + 0 = 7x - 14$.

Η μέθοδος του Bairstow βρίσκει δευτεροβάθμιους παράγοντες $R(x)$ του πολυωνύμου $P(x)$. Για να είναι το $Y(x) = b_n(x-r) + b_{n+1} = 0$, οπότε το $R(x) = x^2 - rx - s$ είναι δευτεροβάθμιος παράγοντας του $P(x)$ πρέπει να βρεθούν οι συντελεστές r και s έτσι ώστε: $b_n = 0$ και $b_{n+1} = 0$. Έστω $\overline{r}$ και $\overline{s}$ οι τιμές που μηδενίζουν τα $b_n,\ b_{n+1}$ και ας υποθέσουμε ότι $r,\ s$ είναι προσεγγίσεις των $\overline{r},\ \overline{s}$.

Αν οι διαφορές $dr = \overline{r} - r$ και $ds = \overline{s} - s$ είναι «μικρές» τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ολικά διαφορικά των $b_n,\ b_{n+1}$ για να πάρουμε τις προσεγγίσεις:

$$
\begin{aligned}
0 &= b_n(\overline{r}, \overline{s}) &&= b_n(r + dr, s + ds) &&\cong b_n(r,s) + \frac{\partial b_n}{\partial r} dr + \frac{\partial b_n}{\partial s} ds \\
0 &= b_{n+1}(\overline{r}, \overline{s}) &&= b_{n+1}(r + dr, s + ds) &&\cong b_{n+1}(r,s) + \frac{\partial b_{n+1}}{\partial r} dr + \frac{\partial b_{n+1}}{\partial s} ds
\end{aligned}
$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (r,s).

Επομένως αν r_k, s_k είναι οι τιμές των r και s στην k επανάληψη και συμβολίσουμε με $dr_k,\ ds_k$ τη λύση του παραπάνω συστήματος (αν αντικαταστήσουμε τα $\cong$ με $=$), τότε ορίζονται οι επόμενες προσεγγιστικές τιμές

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= r_k + dr_k \\ s_{k+1} &= s_k + ds_k \end{aligned}$$

οι οποίες πρέπει να είναι καλύτερες προσεγγίσεις των $\overline{r},\ \overline{s}$. Για να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο πρέπει να γνωρίζουμε τις τέσσερις τιμές των μερικών παραγώγων στο σημείο (r, s).

Αν εφαρμόσουμε τη συνθετική διαίρεση του $P(x)$ δια $R(x)$, αντικαθιστώντας τα a_i με τα b_i τότε προκύπτουν οι νέοι συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ως εξής:

$$\begin{array}{cccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \\ \times r & 0 & 0 & c_1 s & \ldots & c_{n-2}s \\ \times s & 0 & c_1 r & c_2 r & \ldots & c_{n-1}r \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_n \end{array}$$

Αποδεικνύεται (με επαγωγή) ότι οι μερικές παράγωγοι μπορούν να υπολογιστούν από τους τύπους:

$$\frac{\partial b_n}{\partial r} = c_{n-1} \quad , \quad \frac{\partial b_n}{\partial s} = c_{n-2}$$

$$\frac{\partial b_{n+1}}{\partial r} = c_n \quad , \quad \frac{\partial b_{n+1}}{\partial s} = c_{n-1}$$

Τελικά τα dr_k και ds_k προκύπτουν από τη λύση του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} c_{n-1}dr + c_{n-2}ds &= -b_n \\ c_n dr + c_{n-1}ds &= -b_{n+1} \end{aligned}$$

η οποία είναι

$$dr_k = \frac{b_n c_{n-1} - b_{n+1}c_{n-2}}{c_n c_{n-2} - c_{n-1}^2} \quad \text{και} \quad ds_k = \frac{b_{n+1}c_{n-1} - b_n c_n}{c_n c_{n-2} - c_{n-1}^2}$$

Οι αρχικές τιμές $r_0,\ s_0$ λαμβάνονται συνήθως ίσες με 0. Καλύτερες προσεγγίσεις επιτυγχάνονται επιλέγοντας

- Για μεγάλες κατά μέτρο ρίζες (και εφόσον $a_1 \neq 0$), $r_0 = -\dfrac{a_2}{a_1}$ και $s_0 = -\dfrac{a_3}{a_1}$.
- Για μικρές κατά μέτρο ρίζες (και εφόσον $a_{n-1} \neq 0$), $r_0 = -\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ και $s_0 = -\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$.

Αυτό γιατί για πολύ μεγάλες ρίζες $\overline{x}$ θα ισχύει:

$$0 = P(\overline{x}) \cong a_1\overline{x}^n + a_2\overline{x}^{n-1} + \overline{x}^{n-2} \quad \overset{\overline{x}\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \overline{x}^2 + \frac{a_2}{a_1}\overline{x} + \frac{a_3}{a_1} \cong 0$$

και παρόμοια για πολύ μικρές ρίζες θα είναι:

$$a_{n-1}\overline{x}^2 + a_n\overline{x} + a_{n+1} \cong 0 \quad \overset{\overline{x}\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \overline{x}^2 + \frac{a_n}{a_{n-1}}\overline{x} + \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \cong 0$$

Αλγόριθμος 1.4. *Μέθοδος Bairstow (εύρεση δευτεροβάθμιου παράγοντα $R(x) = x^2 - rx - s$ του $n-$βαθμού πολυωνύμου $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1},\ a_1 \neq 0$)*

1. *Διάβασε* $n,\ \ a_i,\ i = 1(1)n+1,\ \ M,\ NS,\ r_0,\ s_0$
2. $b_1 = a_1,\ c_1 = b_1,\ r = r_0,\ s = s_0,\ \varepsilon = 10^{-NS},\ k = 1$
3. *Όσο* $k \leq M$ *επανάλαβε*

   3.1. $b_2 = a_2 + b_1r, \quad c_2 = b_2 + c_1r$

   3.2. *Για* $i = 3(1)n+1$
   $b_i = a_i + rb_{i-1} + sb_{i-2}$
   $c_i = b_i + rc_{i-1} + sc_{i-2}$

   3.3. $D = c_nc_{n-2} - c_{n-1}^2$
   $dr = (b_nc_{n-1} - b_{n+1}c_{n-2})/D$
   $ds = (b_{n+1}c_{n-1} - b_nc_n)/D$
   $r = r + dr, \quad s = s + ds$

   3.4. *Αν* $|dr| \leq \varepsilon \cdot \max\{1, |r|\}$ *και* $|ds| \leq \varepsilon \cdot \max\{1, |s|\}$ *τότε*

      3.4.1. *Τύπωσε($R(x) = x^2 - rx - s$ είναι δευτεροβάθμιος παράγοντας του $P(x)$ και $Q(x) = b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x)/R(x)$)*

      3.4.2. *Τέλος.*

   3.5. $k = k + 1$

4. *Τύπωσε("Όχι σύγκλιση μετά από M επαναλήψεις"), Τέλος.*

Αλγόριθμος 1.5. *Τετραγωνικός υποβιβασμός(Quadratic Deflation για τον υπολογισμό όλων των ριζών ενός πραγματικού πολυωνύμου* $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}, \quad a_1 \neq 0$*)*

1. *Διάβασε* $n, \quad a_i, \ i = 1(1)n + 1$
2. *Όσο* $n \geq 2$ *επανάλαβε*
   - 2.1. *Εύρεση ενός πραγματικού δευτεροβάθμιου παράγοντα* $R(x)$ *ώστε* $P(x) = Q(x)R(x)$ *(μέθοδος Bairstow)*
   - 2.2. *Υπολογισμός των ριζών* $\rho_1, \ \rho_2$ *του* $R(x)$ *(τύποι δευτεροβάθμιας εξίσωσης)*
   - 2.3. *Τύπωσε*$(\rho_1, \ \rho_2)$
   - 2.4. $P(x) \leftarrow Q(x), \quad n \leftarrow n - 2$
3. *Αν* $n = 1$ *τότε Τύπωσε("τελευταία ρίζα:",* $\rho = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$*)*

Παράδειγμα 1.2. Έστω η εξίσωση $ax^2 + bc + c = 0$. Αν $b^2 - 4ac > 0$ τότε οι ρίζες της δίνονται από τον τύπο

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Έστω $b > 0$ και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη μικρότερη κατ΄ απόλυτο τιμή ρίζα εφαρμόζοντας τον τύπο

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Αν το $4ac$ είναι μικρό συγκριτικά με το b^2 τότε η ποσότητα $\sqrt{b^2 - 4ac}$ προσεγγίζεται από το b με ακρίβεια ορισμένων δεκαδικών ψηφίων. Επομένως, δοθέντος ότι υπολογίζουμε με αυτήν την προσέγγιση το ριζικό, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμητής του ανωτέρω τύπου και κατά συνέπεια η υπολογιζόμενη ρίζα θα είναι ακριβής σε ορισμένες θέσεις. Για να το αντιληφθούμε αυτό, δίνουμε το εξής παράδειγμα:

$$x^2 + 111.11x + 1.2121 = 0$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αριθμητική κινητής υποδιαστολής με 5 σημαντικά ψηφία και στρογγύλευση τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
b^2 &= 12345 \\
\sqrt{b^2 - 4ac} &= \sqrt{12345 - 4 \cdot 1 \cdot (1.2121)} = \sqrt{12340} = 111.09 \\
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{0.02}{2.1} = -0.01
\end{aligned}$$

ενώ η ακριβής τιμή της ρίζας (με 5 σημαντικά ψηφία) είναι $x_1 = -0.01091$.

Η απώλεια σημαντικών ψηφίων είναι δυνατό να αποφευχθεί αν χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό της μικρότερης κατ΄ απόλυτο τιμή ρίζας τον τύπο

$$x_1 = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-2\cdot(1.2121)}{111.11+111.09} = -\frac{2.4242}{222.2} = -0.01091$$

Η μετάδοση σφάλματος μελετάται κατάλληλα με τη βοήθεια των εννοιών *συνθήκη*(condition) και *αστάθεια*(instability). Η λέξη *συνθήκη* χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ευαισθησία της τιμής $f(x)$ μιας συνάρτησης σε μεταβολές της μεταβλητής x. Η συνθήκη συνήθως μετρείται ως εξής:

$$\mathrm{cond}(f) = \max\left\{\left|\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}\right| \Big/ \left|\frac{x-x^*}{x}\right| \quad : \quad |x-x^*| \ll 1\right\} \quad \cong \quad \left|\frac{xf'(x)}{x-x^*}\right|$$

Στην πράξη χρησιμοποιούμε την προσέγγιση

$$f(x) - f(x^*) \cong f'(x)\cdot(x-x^*)$$

Η έννοια της αστάθειας περιγράφει την ευαισθησία μιας αριθμητικής διαδικασίας για τον υπολογισμό του $f(x)$ σε αναπόφευκτα σφάλματα στρογγύλευσης που μεταφέρονται(διαδίδονται) κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης αυτής σε αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας.

1.7 Μιγαδικές ρίζες και μέθοδος Müller

Οι μέθοδοι που εξετάσαμε μέχρι τώρα βρίσκουν μια απομονωμένη ρίζα μιας συνάρτησης, αν είναι γνωστή μια προσέγγιση της ρίζας. Οι μέθοδοι αυτές δεν είναι αρκετά ικανοποιητικές όταν απαιτείται ο υπολογισμός όλων των ριζών μιας συνάρτησης ή όταν δεν διατίθενται καλές αρχικές προσεγγίσεις. Όπως είδαμε σε προηγούμενες παραγράφους για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχουν μέθοδοι που δίνουν συγχρόνως προσεγγίσεις όλων των ριζών (π.χ. μέθοδος QD). Στη συνέχεια μπορούν να εφαρμοσθούν οι γνωστές επαναληπτικές μέθοδοι (π.χ. Newton-Raphson, ΤέμνουσαςSecant) για να πετύχουμε πιο ακριβείς προσεγγίσεις των ριζών.

Μια ενδιαφέρουσα μέθοδος, έχει προταθεί από τον Müller και έχει εφαρμοσθεί με αξιοσημείωτη επιτυχία. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση ορισμένου αριθμού ριζών, πραγματικών ή μιγαδικών μιας οποιασδήποτε συνάρτησης. Η μέθοδος είναι επαναληπτική, συγκλίνει περίπου τετραγωνικά στην περιοχή μιας ρίζας, δεν απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης και επιτυγχάνει την εύρεση και των μιγαδικών ριζών, ακόμα και στην περίπτωση που οι ρίζες δεν είναι απλές (δηλαδή έχουν πολλαπλότητα $k > 1$).

Επίσης η μέθοδος είναι γενική υπό την έννοια ότι ο χρήστης δε χρειάζεται αρχική προσέγγιση. Στην παράγραφο αυτή περιγράφουμε σύντομα τη μέθοδο, παραλείποντας τη μελέτη σύγκλισής της και συζητούμε τη χρήση της για την εύρεση των πραγματικών και μιγαδικών ριζών. Θα εξετάσουμε ειδικά το πρόβλημα της εύρεσης μιγαδικών ριζών πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, καθώς αυτό το πρόβλημα έχει μεγάλο ενδιαφέρον σε πολλούς κλάδους της Μηχανικής.

Η μέθοδος Müller είναι μια φυσική επέκταση της μεθόδου της Τέμνουσας. Υπενθυμίζουμε ότι στη μέθοδο της Τέμνουσας προσδιορίζουμε από τις προσεγγίσεις $x_i,\ x_{i+1}$ μιας ρίζας της $f(x)=0$, τη νέα προσέγγιση ως τη ρίζα του πρωτοβάθμιου πολυωνύμου $p(x)$, το οποίο διέρχεται από τα δυο σημεία $(x_i, f(x_i))$ και $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

Στη μέθοδο Müller, η επόμενη προσέγγιση x_{i+1} βρίσκεται ως η ρίζα της παραβολής που διέρχεται από τα τρία σημεία

$$\Big(x_i, f(x_i)\Big) \quad , \quad \Big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\Big) \quad , \quad \Big(x_{i-2}, f(x_{i-2})\Big)$$

Σύμφωνα με τον τύπο παρεμβολής του Newton η παραβολή

$$p(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i-1}](x-x_i) + f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}](x-x_i)(x-x_{i-1})$$

είναι η μοναδική που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x)$ στα τρία σημεία $x_i,\ x_{i-1},\ x_{i-2}$.

Επειδή είναι

$$(x-x_i)(x-x_{i-1}) = (x-x_i)^2 + (x-x_i)(x_i-x_{i-1})$$

το $p(x)$ γράφεται ως

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(x_i) + f[x_i, x_{i-1}](x-x_i) + f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]\Big((x-x_i)^2 + (x-x_i)(x_i-x_{i-1})\Big) \\
&= f(x_i) + \Big(\underbrace{f[x_i, x_{i-1}] + f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}](x_i-x_{i-1})}_{c_i}\Big)(x-x_i) + f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}](x-x_i)^2 \\
&= f(x_i) + (x-x_i)c_i + f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}](x-x_i)^2
\end{aligned}$$

'ρα μια ρίζα ρ της παραβολής $p(x)$ ικανοποιεί τη σχέση

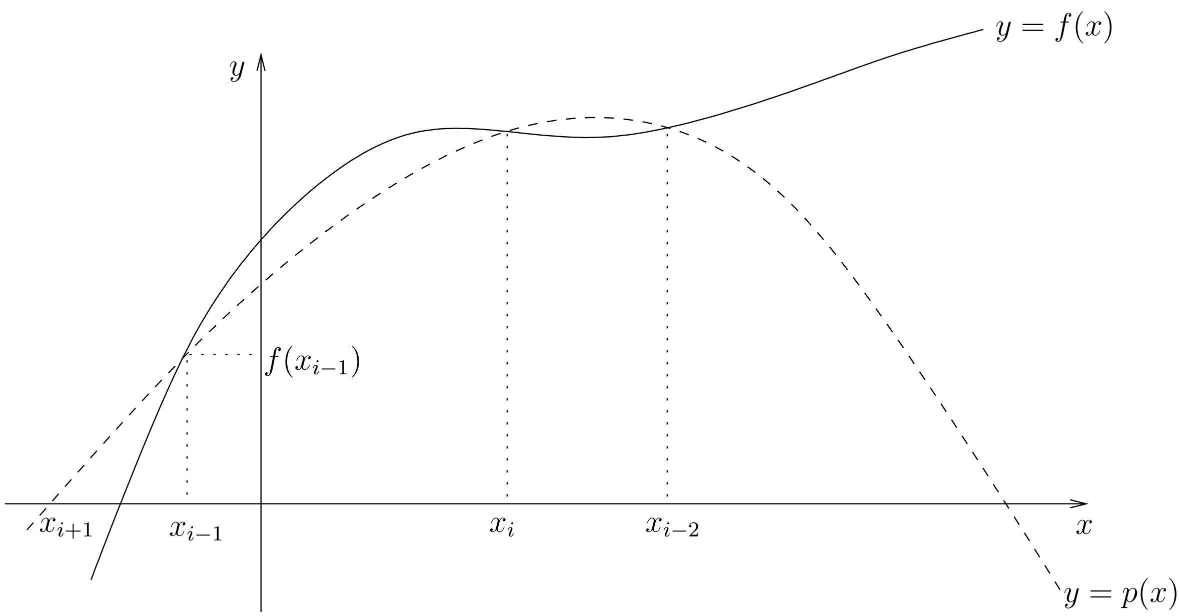
$$\rho - x_i \;=\; \frac{-2f(x_i)}{c_i \pm \Big(c_i^2 - 4f(x_i)f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]\Big)^{1/2}} \tag{1.4}$$

σύμφωνα με το γνωστό τύπο για την εύρεση της μικρότερης κατά μέτρο ρίζας.

Αν επιλέξουμε το πρόσημο στην (1.4) έτσι ώστε ο παρονομαστής να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερος και αν ονομάσουμε h_{i+1} το δεξί μέλος της (1.4), τότε η επόμενη προσέγγιση της f είναι

$$x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται χρησιμοποιώντας τις τρεις βασικές προσεγγίσεις $x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}$. Αν οι ρίζες που προκύπτουν από την (1.4) είναι πραγματικές, η κατάσταση φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Τονίζουμε ότι ακόμα και αν οι ρίζες είναι πραγματικές, μπορεί να προκύψουν μιγαδικές προσεγγίσεις, λόγω του ότι οι λύσεις που δίνει η (1.4) είναι μιγαδικές. Οπωσδήποτε, στις περιπτώσεις αυτές η φανταστική συντεταγμένη θα είναι τόσο μικρή ώστε να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Στην πράξη, στον αλγόριθμο που δίνεται παρακάτω κάποιες μιγαδικές συντεταγμένες που συναντώνται κατά την αναζήτηση μιας πραγματικής ρίζας παραλείπονται.

Δίνουμε τώρα τον αλγόριθμο της μεθόδου του Müller.

Αλγόριθμος 1.6. *Μέθοδος Müller*

1. *Διάβασε*

   $x_0,\ x_1,\ x_2$ *(αρχικές προσεγγίσεις της ρίζας* ξ *της* f*)*

   $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ *(ανεκτικότητες)*

   M *(μέγιστος επιτρεπτός αριθμός επαναλήψεων)*

2. $h_1 = x_1 - x_0,\ h_2 = x_2 - x_1,$
   $f[x_1, x_0] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}, \quad f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_2}, \quad i = 2$

3. *Επανάλαβε*

   3.1. $f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}] = \dfrac{f[x_i, x_{i-1}] - f[x_{i-1}, x_{i-2}]}{h_i + h_{i-1}}$

   3.2. $c_i = f[x_i, x_{i-1}] + h_i f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$

   3.3. $h_{i+1} = \dfrac{-2f(x_i)}{c_i \pm \sqrt{c_i^2 - 4f(x_i)f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]}}$
   (επιλογή του προσήμου έτσι ώστε ο παρονομαστής να είναι κατ,απόλυτη τιμη μέγιστος)

   3.4. $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}, \quad f[x_{i+1}, x_i] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}}$

   3.5. $i = i + 1$

   Έως ότου $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon_1 \cdot |x_i|$ *ή* $|f(x_i)| < \varepsilon_2$ *ή* $i > M$

4. *Αν* $i \leq M$ *Τύπωσε("Προσεγγιστική τιμή της ρίζας:",* x_i*)*
   αλλιώς Τύπωσε("Όχι σύγκλιση μετά από M επαναλήψεις")

Κεφάλαιο 2

Μη Γραμμικά Συστήματα

Έστω $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, n το πλήθος μιγαδικές συναρτήσεις n μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ορισμένες σε μια περιοχή $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

ή υπό μορφή διανυσμάτων

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

όπου

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \quad , \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$$

Ονομάζουμε ρίζα (ή μηδενικό σημείο) του συστήματος κάθε σημείο $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \in B$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$.

Μια ειδική περίπτωση συστημάτων της μορφής (2.1) είναι τα γραμμικά συστήματα. Για τα μη γραμμικά συστήματα η εύρεση κριτηρίων που εξασφαλίζουν την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα και αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Αλλά και αν ακόμα εξασφαλισθεί η ύπαρξη λύσης, η εύρεσή της είναι αρκετά δύσκολο πρόβλημα.

2.1 Μέθοδος απαλοιφής

Η πλέον γνωστή μέθοδος επίλυσης συστημάτων της μορφής (2.1) είναι η μέθοδος της απαλοιφής. Κατά τη μέθοδο αυτή απαλείφονται οι άγνωστοι μεταξύ των εξισώσεων και το αρχικό σύστημα μετατρέπεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο συστημάτων της μορφής

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
\varphi_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
\varphi_n(x_n) &= 0
\end{aligned}$$

και στη συνέχεια λύνοντας αυτά τα (απλούστερα) συστήματα κατά τα γνωστά. Δηλαδή βρίσκουμε πρώτα τις ρίζες της τελευταίας εξίσωσης $\phi_n(x_n) = 0$ με μια από τις γνωστές μεθόδουω. Με αντικατάσταση των ριζών αυτών στις προηγούμενες εξισώσεις, προκύπτουν επίσης συστήματα τις ίδιας μορφής, αλλά με $n-1$ εξισώσεις/αγνώστους. Εργαζόμενοι με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε τελικώς όλες τις ρίζες του συστήματος.

Παράδειγμα 2.1. Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 0 \\
2x_1^2 - x_2 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Με απαλοιφή του x_1 από τις εξισώσεις προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 0 \\
2x_2^2 + x_2 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτουν $x_2 = \frac{1}{2}$ ή $x_2 = -1$. Αν αντικαταστήσουμε στην πρώτη προκύπτουν τελικά οι παρακάτω λύσεις του αρχικού συστήματος:

$$\begin{aligned}
x_1 = 0 \quad &, \quad x_2 = -1 \\
x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &, \quad x_2 = \frac{1}{2} \\
x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &, \quad x_2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Η μέθοδος της απαλοιφής παρουσιάζει γενικά πολλές δυσκολίες ώστε να χρησιμοποιείται μόνο σε ειδικές περιπτώσεις και για συστήματα με μικρό αριθμό αγνώστων.

2.2 Γραφική μέθοδος

Έστω το σύστημα

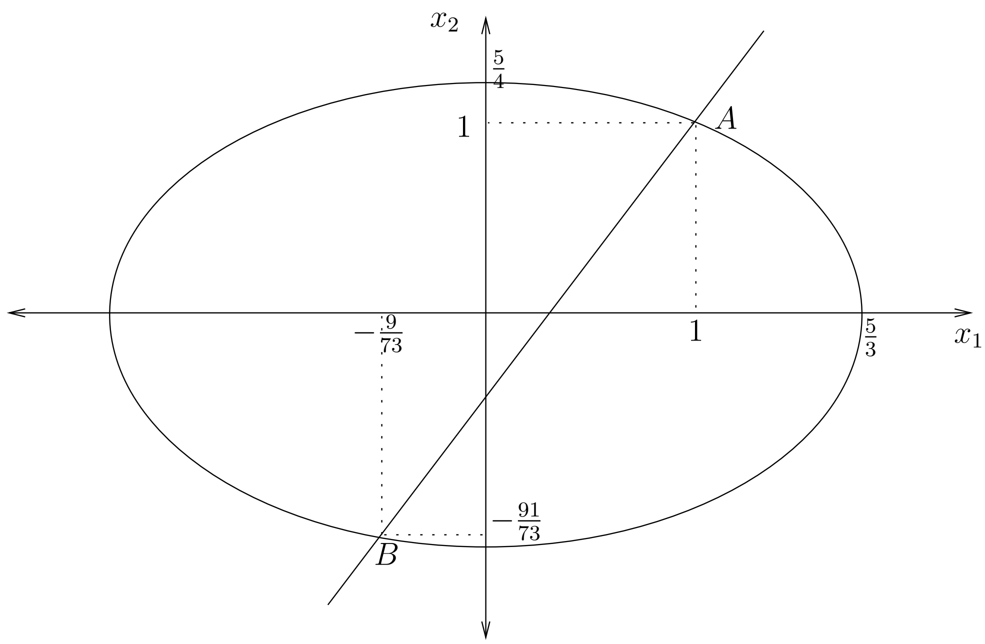
$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων $x_1 \mathrm{O} x_2$ και σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού τους. Προφανώς οι συντεταγμένες των σημείων τιμής των δυο γραμμών ορίζουν τις πραγματικές λύσεις του συστήματος. Η μέθοδος αυτή είναι εφικτή εφόσον είναι δυνατό να γίνουν οι γραφικές αυτές παραστάσεις.

Παράδειγμα 2.2. Να λυθεί γραφικά το σύστημα

$$\begin{aligned} 9x_1^2 + 16x_2^2 - 25 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις παριστά έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες $\frac{5}{3}$ και $\frac{5}{4}$. Η δεύτερη παριστά μια ευθεία.



Από το σχήμα φαίνεται ότι οι λύσεις του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής $A(1, 1)$, $B(-\frac{9}{73}, -\frac{91}{73})$.

2.3 Επαναληπτικές μέθοδοι

Υποθέτουμε ότι το σύστημα (2.1) μπορεί να μετασχηματιστεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς στην ισοδύναμη μορφή

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

Ορίζουμε τις παρακάτω επαναληπτικές μεθόδους:

Επαναληπτική μέθοδος ολικού βήματος: $\mathbf{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(m)})$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ όπου το $\mathbf{x}^{(0)}$ είναι μια πρώτη προσέγγιση του ζητούμενου σταθερού σημείου της $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$.

Επαναληπτική μέθοδος απλού βήματος:
$\mathbf{x}_i^{(m+1)} = \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}_1^{(m+1)}, \mathbf{x}_2^{(m+1)}, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}^{(m+1)}, \mathbf{x}_{i+1}^{(m)}, \ldots, \mathbf{x}_n^{(m)})$, $i = 1(1)n$, όπου $m = 0, 1, 2, \ldots$ και δίνεται μια αρχική προσέγγιση $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Στη συνέχεια δίνουμε μια πρόταση με την οποία εξασφαλίζεται η ύπαρξη και το μονοσήμαντο ενός σταθερού σημείου της $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ καθώς και τον τρόπο υπολογισμού αυτού.

Πρόταση 2.1. *Θεωρούμε το κλειστό ορθογώνιο $n-$διαστάσεων*

$$\Delta_n = \{\ \alpha_i \le x_i \le \beta_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n\ \}$$

και τις n πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad , \quad i = 1, 2 \ldots, n$$

που ορίζονται στο Δ_n και ικανοποιούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

1) $\varphi_i\Big|_{\Delta_n}$ *συνεχείς,* $i = 1, 2 \ldots, n$

2) Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \Delta_n$ *ισχύει* $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in \Delta_n$

3) Υπάρχει μια σταθερά $L < 1$ τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Delta_n$ ισχύει η συνθήκη του Lipschitz $\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_2)\| \le L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω

a) Υπάρχει ακριβώς ένα $\boldsymbol{\xi} \in \Delta_n$ *τέτοιο ώστε* $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$

β) Για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \Delta_n$ η ακολουθία $\mathbf{x}_m,\ m = 0, 1, 2, \ldots$ που ορίζεται με την επαναληπτική μέθοδο $\mathbf{x}_{m+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_m),\ m = 0, 1, 2, \ldots$ έχει νόημα, δηλαδή $\mathbf{x}_m \in \Delta_n,\ \forall m = 0, 1, 2, \ldots$ και $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \boldsymbol{\xi}$ και επιπλέον ισχύει η ανισότητα

$$\|\mathbf{x}_m - \boldsymbol{\xi}\| \leq \frac{L^m}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Στη συνέχεια για λόγους συντομίας και απλής παρουσίασης περιοριζόμαστε στο χώρο $\mathbb{R}^2$. Είναι αυτονόητο ότι όλα τα συμπεράσματα μπορούν να επεκταθούν στο χώρο $\mathbb{R}^n$ χωρίς μεγάλη δυσκολία. Έστω λοιπόν η διανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \Big(\ \varphi_1(x_1, x_2)\ ,\ \varphi_2(x_1, x_2)\ \Big)^T$$

για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\ \ ,\ \ i = 1, 2\ ,\ \ j = 1, 2$$

σε μια περιοχή ενός σημείου $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$.

Ορίζουμε τώρα τον Ιακωβιανό πίνακα (Jacobian) των $\varphi_1,\ \varphi_2$ στο $\boldsymbol{\xi}$ ως εξής:

$$J(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(\xi_1, \xi_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(\xi_1, \xi_2)}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_2(\xi_1, \xi_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(\xi_1, \xi_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Δίνουμε τώρα μια άλλη πρόταση, η οποία είναι επέκταση της γνωστής πρότασης σταθερού σημείου, στο διδιάστατο χώρο.

Πρόταση 2.2. *Έστω το σύστημα $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, το οποίο υποθέτουμε ότι έχει ένα σταθερό σημείο $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| < \delta$ υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, 2$ και η φασματική ακτίνα του Ιακωβιανού πίνακα των $\varphi_1,\ \varphi_2$ στο $\mathbf{x}$ είναι μικρότερη της μονάδας, δηλαδή $S\Big(J(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}))\Big) < 1$. Τότε, για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}\| < \delta$ η επαναληπτική μέθοδος $\mathbf{x}_{m+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_m),\ m = 0, 1, 2, \ldots$ έχει έννοια και $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \boldsymbol{\xi}$.*

Επίσης η $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ έχει το μοναδικό σταθερό σημείο $\boldsymbol{\xi}$ στην περιοχή $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| < \delta$.

Μια άλλη χρήσιμη πρόταση για τις εφαρμογές είναι η παρακάτω, η οποία προκύπτει εύκολα από την προηγούμενη.

Πρόταση 2.3. *Έστω το παραπάνω σύστημα* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ *και οι συναρτήσεις* $\varphi_1,\ \varphi_2$ *ορισμένες στο ορθογώνιο*

$$\Delta_2 = \{\ \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \quad , \quad i = 1, 2\ \}$$

με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

Έστω $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ *σταθερό σημείο της* $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ *που βρίσκεται στο εσωτερικό του* Δ_2*, τέτοιο ώστε* $J(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Τότε υπάρχει $\delta > 0$ *ώστε η επαναληπτική μέθοδος* $\mathbf{x}_{m+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_m),\ m = 0, 1, 2, \ldots$ *έχει έννοια για κάθε* $\mathbf{x}_0 \in \Delta_2$ *με* $\|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}\| < \delta$ *και ισχύει* $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \boldsymbol{\xi}$.

Παράδειγμα 2.3. Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

δηλαδή $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = (x_1^2 - x_2^2,\ \ x_1^2 + x_2^2)$.

Προφανώς ισχύει $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, δηλαδή το $(0,0)$ είναι σταθερό σημείο της $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$. Είναι

$$J(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

άρα $J(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Θεωρούμε την επαναληπτική μέθοδο

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= (x_1^{(m)})^2 - (x_2^{(m)})^2 \\ x_2^{(m+1)} &= (x_1^{(m)})^2 + (x_2^{(m)})^2, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Αν πάρουμε ως αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ τότε έχουμε

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$
0	0.5	0.5
1	0	0.5
2	-0.25	0.25
3	0	0.125
4	-0.015625	0.015625
5	0	0.00048826125

2.4 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson(N-R)

Για λόγους απλότητας θεωρούμε $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f, g)$. Έστω λοιπόν η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \Big(\ f(x,y) \ , \ g(x,y) \ \Big)^T$$

ορισμένη στο ορθογώνιο $\Delta_2 = \{ \ \alpha \le x \le \beta \ , \ \gamma \le y \le \delta \ \}$. Υποθέτουμε ότι οι $f, \ g$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης στο Δ_2. Αν το σύστημα

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

έχει μια λύση $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)^T$ στο εσωτερικό του Δ_2 και επιπλέον ισχύει $|J(\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}))| \neq 0$ τότε είναι γνωστό από τον απειροστικό λογισμό ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση σε μια αρκετά μικρή περιοχή του $\boldsymbol{\xi}$.

Με τις ανωτέρω προϋποθέσεις ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο N-R:

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m - J^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_m)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

όπου $J^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_m))$ ο αντίστροφος του Ιακωβιανού πίνακα $J(\mathbf{f}(\mathbf{x}_m))$.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \Delta_2$ με $\|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}\| < \delta$ η ανωτέρω επαναληπτική μέθοδος έχει έννοια και ορίζει την ακολουθία $\mathbf{x}_m$ έτσι ώστε $\lim\limits_{m \to \infty} \mathbf{x}_m = \boldsymbol{\xi}$.

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου τη γράφουμε αναλυτικά υπό μορφή συντεταγμένων. Έστω $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m)^T$ και

$$J(\mathbf{f}(\mathbf{x}_m)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Αν αντιστρέψουμε τον πίνακα αυτό και αντικαταστήσουμε στην (2.2) τότε προκύπτουν μετά τη διάσπαση σε συντεταγμένες οι ακόλουθες εξισώσεις της ε.μ. N-R

$$x_{m+1} = x_m + \frac{g(x_m, y_m)\dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} - f(x_m, y_m)\dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial y}}{\dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial x}}$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{f(x_m, y_m)\dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial x} - g(x_m, y_m)\dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial g(x_m, y_m)}{\partial x}}$$

Παράδειγμα 2.4. Εφαρμόστε την επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson για τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x - x^2 - y^2 \\ g(x,y) &= y - x^2 + y^2 \end{aligned}$$

και με αρχική τιμή $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (0.8, 0.4)$.

Αν αντικαταστήσουμε στις ανωτέρω εξισώσεις της μεθόδου N-R προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις συντεταγμένων

$$x_{m+1} = x_m + \frac{(y_m - x_m^2 + y_m^2) \cdot (-2y_m) - (x_m - x_m^2 - y_m^2) \cdot (1 + 2y_m)}{(1 - 2x_m) \cdot (1 + 2y_m) - (-2y_m) \cdot (-2x_m)}$$
$$y_{m+1} = y_m + \frac{(x_m - x_m^2 - y_m^2) \cdot (-2x_m) - (y_m - x_m^2 + y_m^2) \cdot (1 - 2x_m)}{(1 - 2x_m) \cdot (1 + 2y_m) - (-2y_m) \cdot (-2x_m)}$$

Αν εφαρμόσουμε τους παραπάνω τύπους συντεταγμένων προκύπτουν:

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$
0	0.8	0.4
1	0.772881359	0.420338983
2	0.771845967	0.419644283
3	0.771844506	0.419643377
4	0.771844506	0.419643377

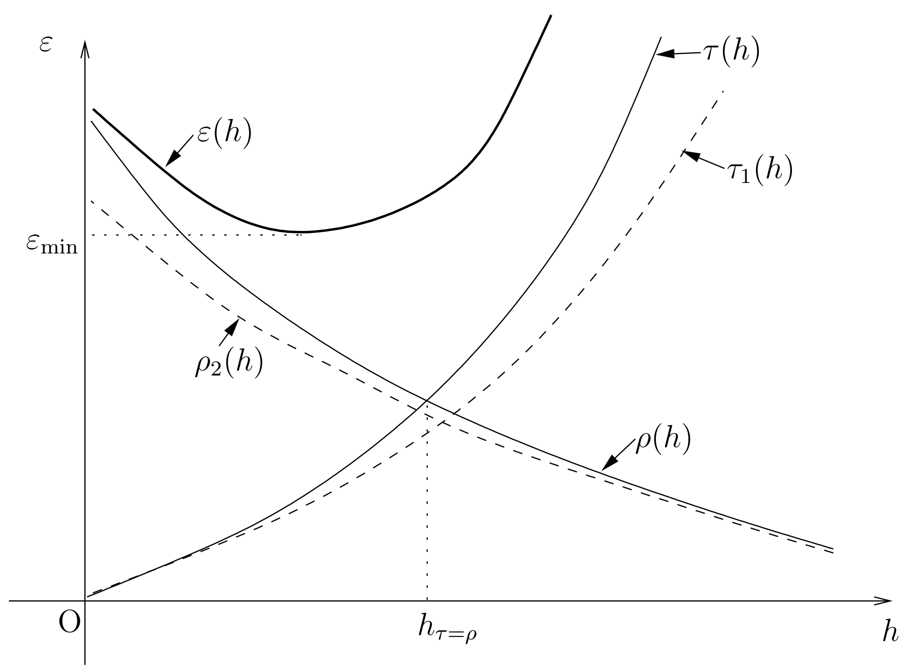
2.5 Το δίλημμα στην επιλογή μεγέθους βήματος h

Το πραγματικό σφάλμα $\varepsilon(h)$ σε μια αριθμητική λύση προέρχεται από δυο παράγοντες· το σφάλμα αποκοπής $\tau(h)$ και το σφάλμα στρογγύλευσης $\rho(h)$:

$$\varepsilon(h) = \tau(h) + \rho(h)$$

Το $\tau(h)$ εξαρτάται από τον τύπο της αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιείται, και είναι $\tau(h) = O(h^n)$ για μια $n-$τάξης μέθοδο, δηλαδή $\tau(h) \to 0$ καθώς $h \to 0$. Το $\rho(h)$ εξαρτάται από τον τύπο καθώς και τον επεξεργαστή που χρησιμοποιείται, ενώ αυξάνει καθώς $h \to 0$. Επομένως θα υπάρχει κάποια τιμή $h_{\tau=\rho}$ τέτοια ώστε $\tau(h) = \rho(h)$ και για $h < h_{\tau=\rho}$ να είναι $\tau(h) < \rho(h)$).

Το πρόβλημα της εύρεσης ενός μεγέθους βήματος h αρκετά μικρού ώστε το $\tau(h)$ να είναι ¨μικρό' και το $\rho(h)$ να μην υπερέχει αυτού (δηλαδή $\tau(h) \leq \rho(h)$) αναφέρεται ως το *δίλημμα μεγέθους βήματος*. Σχηματικά:



Υπάρχουν δυο τρόποι ελάττωσης του $\varepsilon_{\min}$. Πρώτον η χρήση ενός τύπου υψηλότερης τάξης (αύξηση του n). Αυτό ελαττώνει το $\varepsilon_{\min}$ με ελάττωση της καμπύλης $\tau(h)$ σε $\tau_1(h)$, όπως φαίνεται στο γράφημα. Δεύτερον η χρήση αριθμητικής υψηλότερης ακρίβειας. Αυτό ελαττώνει την $\rho(h)$ προς τα κάτω και αριστερά ($\rho_2(h)$ στο γράφημα). Και οι δυο αυτοί τρόποι έχουν μια ατέλεια: απαιτούν να γίνει επανάληψη των υπολογισμών. Ο δεύτερος τρόπος μπορεί να χρειαστεί και διαφορετικό επεξεργαστή.

2.6 Βελτιωτικός τύπος του Richardson

Θεωρούμε το ανάπτυγμα της f σε πολυώνυμο Taylor $n-$βαθμού ως προς το x_0 (n άρτιος) και υπολογίζουμε της τιμές $f(x_0+h)$ και $f(x_0-h)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_1) \\ f(x_0-h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \cdots + (-1)^n\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_{-1}) \end{aligned}$$

όπου $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$.

Αφαιρώντας κατά μέλη και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + \underbrace{\frac{h^2}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)}_{-\tau(h)}$$

όπου $\xi \in (x_0-h, x_0+h)$, ή

$$\underbrace{f'(x_0)}_{Q} = \underbrace{D_h(f(x_0))}_{F(h)} + \tau(h)$$

Υποθέτουμε ότι $F(h)$ είναι μια προσέγγιση τάξης $O(h^n)$ της προσεγγιζόμενης ποσότητας Q και παίρνουμε δυο προσεγγίσεις $F(h),\ F(h_{\max})$. Τότε δίνεται μια βελτιωμένη προσέγγιση της Q με τον τύπο:

$$F_1(h) = \frac{q^n F(h) - F(h_{\max})}{q^n - 1}, \qquad \text{όπου } h_{\max} = qh \tag{2.3}$$

Αν είναι γνωστό ότι $\tau(h) = ch^n + O(h^m)$ τότε ο $F_1(h)$ είναι τάξης $m > n$, δηλαδή:

$$Q - F_1(h) = Dh^m + \text{ (όροι υψηλότερης τάξης) } = O(h^m)$$

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2.3) για να πάρουμε υψηλότερης τάξης προσεγγίσεις

$$F_2(h) = \frac{q^m F_1(h) - F_1(h_{\max})}{q^m - 1}, \qquad \text{τάξης } O(h^{m+2})$$

Παρατήρηση 2.1. Όταν εφαρμόζεται ο τύπος βελτίωσης σφάλματος του Richardson για ένα τύπο πεπερασμένων διαφορών (προς τα εμπρός ή προς τα πίσω) η τάξη σφάλματος αυξάνει κατά 1, ενώ για έναν τύπο κεντρικών διαφορών η τάξη σφάλματος αυξάνει κατά 2.

Εφαρμογή 2.1. Ας δούμε την τεχνική βελτίωσης σφάλματος του Richardson με ένα παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι

$$\underbrace{f'(x)}_{Q} = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{F(h)=D_h(f(x))} + \underbrace{O(h^2)}_{\tau(h)} \tag{2.4}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ και θέλουμε να προσεγγίσουμε την $f'(1) = e \cong 2.718282$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον προσεγγιστικό τύπο των κεντρικών διαφορών με αριθμητική 7 σημαντικών ψηφίων προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

h	$F(h) = \frac{e^{1+h} - e^{1-h}}{2h}$	$\varepsilon(h) = f'(x) - D_h(f(x))$	$\tau(h) = -\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}h^2 \cong -\frac{1}{6}h^2$
0.2	$2.7\underline{36440}$	-0.018158	$-1.8 \cdot 10^{-2}$
0.02	$2.718\underline{475}$	-0.000193	$-1.8 \cdot 10^{-4}$
0.002	$2.718\underline{250}$	-0.000032	$-1.8 \cdot 10^{-6}$

Μπορούμε να εκφράσουμε το βελτιωτικό τύπο του Richardson για $n = 2,\ m = 4$ παίρνοντας $q = 10$. Τότε έχουμε

$$F_1(h) = \frac{10^2 F(h) - F(10h)}{10^2 - 1} \qquad \text{και} \qquad F_2(h) = \frac{10^4 F_1(h) - F_1(10h)}{10^4 - 1} \tag{2.5}$$

Αν εφαρμόσουμε τους τύπους (2.5) για τις τιμές του $F(h)$ στα σημεία $h = 0.2,\ h = 0.02,\ h = 0.002$ στον πιο πάνω πίνακα τότε προκύπτει:

h	$F(h)$	$[O(h^2)]$	$F_1(h)$	$[O(h^4)]$	$F_2(h)$	$[O(h^6)]$
0.2	$2.7\underline{36440}$					
		$\searrow$				
0.02	$2.718\underline{475}$	$\longrightarrow$	$2.7182\underline{94}$			
		$\searrow$		$\searrow$		
0.002	$2.718\underline{250}$	$\longrightarrow$	$2.7182\underline{48}$	$\longrightarrow$	$2.7182\underline{48}$	

Παρατηρούμε ότι η $F_1(0.02)$ είναι πιο ακριβής από τις $F_1(0.002)$ και $F_2(0.002)$. Αυτό οφείλεται στο ότι η τιμή $F(0.002)$ που έχει το μικρότερο σφάλμα στρογγύλευσης βαρύνεται περισσότερο από την τιμή $F(0.02)$ στους τύπους (2.4) και (2.5).

2.7 Προσεγγιστικοί τύποι υψηλότερης τάξης για τις παραγώγους $f^{(k)}(x)$

Αρχίζουμε με την $f'(x)$. Αν θεωρήσουμε τον προσεγγιστικό τύπο $F(h) = \dfrac{\Delta f(x)}{h}$ τάξης $O(h)$ και εφαρμόσουμε τον τύπο βελτίωσης του Richardson για $q = 2$ τότε λαμβάνουμε τον προσεγγιστικό τύπο $F_1(h)$ τάξης $O(h^2)$ έτσι ώστε

$$f'(x) \cong F_1(h) = \frac{2F(h) - F(2h)}{2-1} = 2\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}$$

ή

$$f'(x) \cong \frac{1}{2h}(-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)), \quad \tau(h) = O(h^2)$$

ο οποίος είναι ο τύπος πεπερασμένων (προς τα πίσω) διαφορών τριών σημείων.

Αν τώρα θεωρήσουμε τον προσεγγιστικό τύπο $F(h) = \dfrac{\delta f(x)}{2h}$ τάξης $O(h^2)$ και εφαρμόσουμε τον τύπο βελτίωσης σφάλματος του Richardson για $q = 2$ λαμβάνουμε τον προσεγγιστικό τύπο $F_1(h)$ τάξης $O(h^4)$ έτσι ώστε

$$f'(x) \cong F_1(h) = \frac{2^2F(h) - F(2h)}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}\left(4\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{2h}\right)$$

ή

$$f'(x) \cong \frac{1}{12h}\left[f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right], \quad \tau(h) = O(h^2)$$

που είναι ο τύπος κεντρικών διαφορών τάξης $O(h^4)$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σειρές των $f(x+h)$ και $f(x-h)$ και λύνοντας ως προς $f''(x)$ προκύπτει ο προσεγγιστικός τύπος των κεντρικών διαφορών τάξης $O(h^2)$:

$$f''(x) \cong \frac{\delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}, \quad \tau(h) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) + O(h^4)$$

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο βελτίωσης σφάλματος του Richardson για $q = 2$ προκύπτει ο τύπος $F_1(h)$ τάξης $O(h^4)$ έτσι ώστε

$$f''(x) \cong F_1(h) = \frac{1}{12h^2}\left[-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)\right]$$

που είναι ο τύπος κεντρικών διαφορών τάξης $O(h^4)$.

'λλοι προσεγγιστικοί τύποι υψηλής τάξης μπορούν να προκύψουν με αντικατάσταση τύπων τάξης $O(h)$ σε μια προσέγγιση Taylor της $f(x+h)$.

Παράδειγμα 2.5. Αν θεωρήσουμε την προσέγγιση Taylor της $f(x+h)$ τάξης $O(h^4)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) \tag{2.6}$$

και αντικαταστήσουμε στην (2.6) τις προσεγγίσεις τάξης $O(h)$:

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+3h)}{h^2} - hf'''(x) + O(h^2)$$

όπου* $f'''(x) = \dfrac{\Delta^3 f(x)}{h^3} + O(h)$, τότε λύνοντας ως προς $f'(x)$ προκύπτει ο τύπος πεπερασμένων διαφορών τεσσάρων σημείων:

$$f'(x) \cong \frac{1}{6h}\left[-11f(x) - 18f(x+h) - 9f(x+2h) + 2f(x+3h)\right], \quad \tau(h) = O(h^3)$$

Παρατήρηση 2.2. Βλέπουμε ότι εφαρμόζοντας τον τύπο βελτίωσης του Richardson για έναν τύπο διαφορών (προς τα εμπρός ή προς τα πίσω) αυξάνει η τάξη ακρίβειας κατά 1, ενώ για έναν τύπο κεντρικών διαφορών η τάξη ακρίβειας αυξάνει κατά 2.

*Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι $f^{(k)}(x) \cong \dfrac{\Delta^k f(x)}{h^k} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\Delta^{k-1}f(x+h)}{h^{k-1}} - \dfrac{\Delta^{k-1}f(x)}{h^{k-1}}\right)$ με σφάλμα $O(h)$