Περιστροφές Givens και Παραγοντοποίηση QR

Είναι φανερό ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε μετασχηματισμούς περιστροφής Givens, όπως και με τους μετασχηματισμούς Householder, για την εύρεση μιας QR παραγοντοποίησης ενός πίνακα. Η μέθοδος του Givens όμως είναι διπλάσια δαπανηρή συγκριτικά με τη μέθοδο Householder. Όμως, η παραγοντοποίηση QR με εφαρμογή περιστροφών Givens είναι πολύ χρήσιμη στις επαναλήψεις QR για υπολογισμούς ιδιοτιμών και στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με δομημένους πίνακες, όπως πίνακες Toeplitz(*).

Οι περιστροφές Givens προβάλλονται επίσης ως σημαντικά εργαλεία στους παράλληλους υπολογισμούς σε πολλά σημαντικά προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της QR παραγοντοποίησης ενός $m \times n$ πίνακα A με εφαρμογή της μεθόδου Givens.
Η βασική ιδέα είναι ακριβώς όπως και τη μέθοδο Householder.

Υπολογίζονται οι ορθογώνιοι πίνακες $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ εφαρμόζοντας περιστροφές Givens έτσι ώστε

- $A^{(1)} = Q_1 A$ έχει μηδενικά στοιχεία στη στήλη κάτω από τη θέση $(1,1)$
- $A^{(2)} = Q_2 A^{(1)}$ έχει μηδενικά στοιχεία τη δεύτερη στήλη κάτω από τη θέση $(2,2)$

κ.ο.κ.

καθε Q_i δημιουργείται ως ένα γινόμενο περιστροφών Givens.

Ένας τρόπος για τον σχηματισμό των $\{Q_i\}$ είναι:

$$Q_1 = J(1,m,\theta)\, J(1,m-1,\theta) \cdots J(1,2,\theta)$$

$$Q_2 = J(2,m,\theta)\, J(2,m-1) \cdots J(2,3,\theta)$$

κ.ο.κ.

Έστω $s = \min(n, m-1)$. Τότε
$$R = A^{(s)} = Q_s A^{(s-1)} = Q_s Q_{s-1} A^{(s-2)} = \cdots = Q_s Q_{s-1} \cdots Q_2 Q_1 A = Q^T A$$

Άρα έχουμε $A = QR$ με $Q^T = Q_s Q_{s-1} \cdots Q_2 Q_1$.

(*) ($T = (t_{ij})$ είναι Toeplitz αν τα στοιχεία κατά μήκος κάθε διαγωνίου είναι ίδια)

Αν $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ είναι ένα 2 διάστατο διάνυσμα τότε είναι:

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

τότε η περιστροφή Givens είναι:

$$J(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$ τέτοια ώστε να ισχύει: $J(1,2,\theta)\, x = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>Αλγόριθμος 1</u> <u>Υπολογισμός των παραμέτρων c και s της περιστροφής του Givens $J(1,2,\theta)$</u>

Δίδονται x

<u>Β1</u> Αν $|x_2| \geq |x_1|$ τότε $t = \dfrac{x_1}{x_2}$, $s = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $c = s \cdot t$

<u>Β2</u> Αν $|x_2| < |x_1|$ τότε $t = \dfrac{x_2}{x_1}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $s = c\,t$

<u>Πολυπλοκότητα</u>: 4 flops και 1 τετραγωνική ρίζα

<u>Αλγόριθμος 2</u> <u>Υπολογισμός του πολλαπλ. από αριστερά ενός πίνακα A με τον πίνακα περιστροφής του Givens $J(i,j,\theta)$.</u>

Δίδονται m, n, A, c, s, i, j $(1 \leq i \leq j \leq m)$

Για $k = 1(1)n$

$\alpha = \alpha_{ik}$

$b = \alpha_{jk}$

$\alpha_{ik} = \alpha c + b s$

$\alpha_{jk} = -\alpha s + b c$

<u>Πολυπλοκότητα</u>: $4n$ flops