Αριθμητική Γραμμική ΄λγεβρα

Κεφάλαιο 4. Αριθμητικός Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων

ΕΚΠΑ

18 Απριλίου 2024

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για τον προσδιορισμό των άλλων υπερεχουσών κατά μέτρο ιδιοτιμών από τη στιγμή που υπολογισθεί η μεγαλύτερη. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μία μόνο μέθοδο που βασίζεται σε μετασχηματισμούς ομοιότητας.

Ας υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A ικανοποιούν τη σχέση

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_m| >> |\lambda_{m+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \tag{1}$$

δηλαδή οι τιμές $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_m|$ απέχουν αρκετά η μία από την άλλη. Τότε η λ_1 μπορεί να υπολογισθεί με τη μέθοδο των δυνάμεων και απομένει ο υπολογισμός των άλλων ιδιοτιμών που υπερέχουν, των $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$.

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

Κατασκευή νέου πίνακα από τον αρχικό με υποβιβασμό (deflation).

Ο νέος πίνακας κατασκευάζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να έχει σαν ιδιοτιμές μόνο τις υπόλοιπες άγνωστες ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα. Η επαναληπτική εφαρμογή της διαδικασίας αυτής θα υπολογίσει όλες τις υπόλοιπες υπερέχουσες ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Οι πιο εύχρηστες μέθοδοι υποβιβασμού είναι εκείνες που βασίζονται στους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Για την περιγραφή της μεθόδου υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι η ιδιοτιμή λ_1 και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x^{(1)}$ του πίνακα A_1 έχουν υπολογιστεί.

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

Έστω τώρα H_1 ένας μη ιδιάζων πίνακας τέτοιος ώστε

$$H_1 x^{(1)} = k e^{(1)} \tag{2}$$

όπου $k \neq 0$ και $e^{(1)} = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T$. Αν αναβάλουμε τη διαδικασία εύρεσης του H_1, τότε έχουμε

$$A_1 x^{(1)} = \lambda_1 x^{(1)}$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$H_1 A_1 H_1^{-1} (H_1 x^{(1)}) = \lambda_1 H_1 x^{(1)} \tag{3}$$

η οποία λόγω της (2) γράφεται

$$H_1 A_1 H_1^{-1} e^{(1)} = \lambda_1 e^{(1)} \tag{4}$$

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

που δηλώνει ότι η πρώτη στήλη του πίνακα $H_1 A_1 H_1^{-1}$ πρέπει να είναι η $\lambda_1 e^{(1)}$, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$A_2 = H_1 A_1 H_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b^T \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right], \tag{5}$$

όπου ο πίνακας B_2 είναι $n-1$ τάξης και το διάνυσμα b έχει $n-1$ στοιχεία. Επειδή ο A_2 έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον A_1, έπεται ότι ο πίνακας B_2 έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Μπορούμε λοιπόν να εργαστούμε με τον πίνακα B_2 προκειμένου να προσδιορίσουμε την επόμενη ιδιοτιμή λ_2 και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $y^{(2)}$ του B_2 που ικανοποιούν την

$$B_2 y^{(2)} = \lambda_2 y^{(2)}. \tag{6}$$

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

Αυτό που απομένει είναι η εύρεση του ιδιοδιανύσματος $x^{(2)}$ του A_1 που αντιστοιχεί στην λ_2. Έστω $z^{(2)}$ το ιδιοδιάνυσμα του A_2 που αντιστοιχεί στην λ_2, τότε

$$A_2 z^{(2)} = \lambda_2 z^{(2)} \tag{7}$$

ή

$$H_1 A_1 H_1^{-1} z^{(2)} = \lambda_2 z^{(2)}$$

ή

$$A_1 (H_1^{-1} z^{(2)}) = \lambda_2 (H_1^{-1} z^{(2)})$$

συνεπώς

$$x^{(2)} = H_1^{-1} z^{(2)} \tag{8}$$

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

αφού $A_1 x^{(2)} = \lambda_2 x^{(2)}$. Αρκεί λοιπόν να υπολογισθεί το $z^{(2)}$ για την εύρεση του $x^{(2)}$. Η (7) λόγω της (5) γράφεται

$$\left| \begin{array}{c|c} \lambda_1 & b^T \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right| z^{(2)} = \lambda_2 z^{(2)} \tag{9}$$

λόγω όμως της (6) μπορούμε να λάβουμε

$$z^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha \\ y^{(2)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

όπου α ένα βαθμωτό μέγεθος, που προσδιορίζεται από την (9) ή την

$$\lambda_1 \alpha + b^T y^{(2)} = \lambda_2 \alpha$$

ή

$$\alpha = \frac{b^T y^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{11}$$

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

Συμπέρασμα

Παρατηρούμε ότι τα $\lambda_2, y^{(2)}$ υπολογίζονται με τη μέθοδο των δυνάμεων (βλ. (6)), το $z^{(2)}$ υπολογίζεται από την (10), όπου το α δίνεται από την (11). Έχοντας υπολογίσει το $z^{(2)}$, το $x^{(2)}$ βρίσκεται από την (8).

Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο υπολογίζουμε τις υπόλοιπες υπερέχουσες ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A_1. Είναι φανερό ότι οι διαδοχικοί υποβιβασμοί του A_1 θα τον μετασχηματίσουν, στο όριο, σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα.

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε ένα τρόπο για την εκλογή του H_1 έτσι ώστε η διαδικασία της διατάραξης να είναι αριθμητικά ευσταθής. Διαλέγουμε τον H_1 τέτοιον ώστε

$$H_1 = L_1 I_{1,p} \tag{12}$$

όπου L_1 είναι ένας στοιχειώδης κάτω τριγωνικός πίνακας και $I_{1,p}$ ένας μεταθετικός πίνακας, όπου p είναι τέτοιο ώστε η $x_p^{(1)}$ είναι η μεγαλύτερη κατά μέτρο συνιστώσα του $x^{(1)}$. Από τις (2) και (12) έχουμε ότι

$$y = I_{1,p} x^{(1)} \tag{13}$$

και

$$L_1 y = k e^{(1)} \tag{14}$$

Υπολογισμός των υπερεχουσών ιδιοτιμών

όπου

$$L_1 = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ -y_2/y_1 & 1 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ -y_n/y_1 & & & 1 \end{vmatrix} \tag{15}$$

και $k = y_1 = x_p^{(1)}$.
Η εισαγωγή του μεταθετικού πίνακα $I_{1,p}$ ουσιαστικά ορίζει μία διαδικασία οδήγησης, η οποία απαιτεί τα στοιχεία του H_1 να είναι κατά μέτρο μικρότερα ή ίσα από τη μονάδα, εξασφαλίζοντας έτσι την αριθμητική ευστάθεια όπως και στη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss.

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με τη μέθοδο των δυνάμεων υπολογίζουμε την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 11.0$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x^{(1)} = (0.5, 1.0, 0.75)^T$. Παρατηρούμε ότι $k = y_1 = 1.0 = x_2^{(1)}$, άρα $p = 2$ και $y = (1.0, 0.5, 0.75)^T$ έτσι

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.75 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

΄ρα

$$
\begin{aligned}
A_2 &= L_1 I_{1,2} A_1 I_{1,2} L_1^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.75 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 10 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.75 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 10 & 4 \\ 1.5 & -3 & 0 \\ 3.75 & -4.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.75 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4.50 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πολ/μός με L_1^{-1} δεν χρειαζόταν αφού γνωρίζουμε ότι η πρώτη στήλη του A_2 είναι ίση με $\lambda_1 e^{(1)}$. Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι

$$B_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4.5 & -2 \end{bmatrix}$$

και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του είναι -3 και -2. Εύκολα υπολογίζονται και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.