Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

Απαρίθμηση

Άσκηση 1

1. Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από ένα σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου n θετικός ακέραιος, στο σύνολο $\{0, 1\}$?
2. Υπό τη συνθήκη ότι οι συναρτήσεις είναι 1-1.
3. Υπό τη συνθήκη ότι απεικονίζουν το 1 και το n στο 0.
4. Υπό τη συνθήκη ότι το 1 είναι η εικόνα ακριβώς ενός θετικού ακεραίου μικρότερου απο n.

1. Για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε 2 εικόνες, συνεπώς σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου το πλήθος των συναρτήσεων είναι $2 * 2 * \ldots * 2 = 2^n$.
2. Αν $n > 2$, προφανώς δεν υπάρχουν συναρτήσεις 1-1. Αν $n = 2$, τότε υπάρχουν 2 συναρτήσεις και αν $n = 1$, επίσης υπάρχουν δύο συναρτήσεις. Το πλήθος των συναρτήσεων στις 2 τελευταίες περιπτώσεις προκύπτει άμεσα, αλλά επαληθεύεται και από τον κανόνα γινομένου.
3. Αν $n \geq 2$ δεδομένου ότι για 2 στοιχεία του πεδίου ορισμού υπάρχει μόνο ένας τρόπος, το πλήθος είναι είναι $1 * 2 * \ldots * 2 * 1 = 2^{n-2}$. Αν $n = 1$, υπάρχει μόνο μία συνάρτηση.
4. Αναγκαία $n > 1$. Για την απεικόνιση του n έχουμε 2 επιλογές. Για τους υπόλοιπους $n - 1$ αριθμούς, υπάρχουν ακριβώς $n - 1$ τρόποι να επιλεχθεί ποιος ακέραιος απεικονίζεται στο 1. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των συναρτήσεων είναι $2(n - 1)$

Άσκηση 2

1. Πόσα υποσύνολα ενός συνόλου 100 στοιχείων έχουν περισσότερα από ένα στοιχείο;
2. Μια δυαδική συμβολοσειρά της οποίας η αντιστροφή είναι όμοια με την ίδια ονομάζεται παλίνδρομη. Πόσες συμβολοσειρές μήκους n είναι παλίνδρομες;

1. $2^{100} - 101$
2. Μία παλίνδρομη συμβολοσειρά προσδιορίζεται επακριβώς από τα πρώτα $\lceil n/2 \rceil$ bits, εφόσον τα υπόλοιπα $\lfloor n/2 \rfloor$ bits πρέπει να είναι ταυτόσημα των αντίστοιχων πρώτων $\lfloor n/2 \rfloor$. Συνεπώς από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $2^{\lceil n/2 \rceil}$ τέτοιες συμβολοσειρές.

Άσκηση 3

Σε έναν γάμο, με πόσους τρόπους μπορεί ένας φωτογράφος να τακτοποιήσει 6 ανθρώπους σε μία σειρά συμπεριλαμβανομένου του γαμπρού και της νύφης, αν:

1. η νύφη πρέπει να βρίσκεται δίπλα στον γαμπρό.
2. η νύφη δεν βρίσκεται δίπλα στον γαμπρό.
3. η νύφη βρίσκεται κάπου αριστερά από τον γαμπρό.

1. Εφόσον η νύφη και ο γαμπρός πρέπει να στέκονται δίπλα-δίπλα ας τους αντιμετωπίσουμε ως ένα στοιχείο. Το ζητούμενο τώρα μετατρέπεται σε πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 στοιχεία σε μια σειρά. Από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι το πλήθος είναι $5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$. Ωστόσο, πρέπει να συνυπολογίσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τη νύφη και τον γαμπρό που είναι 2. Εφαρμόζοντας τον κανόνα γινομένου προκύπτει ότι έχουμε συνολικά 240 τρόπους.
2. Το 2ο ερώτημα μπορούμε να το απαντήσουμε βάσει του πρώτου. Υπολογίζουμε το συνολικό πλήθος των τρόπων να τοποθετήσουμε 6 ανθρώπους σε μια σειρά που είναι $6! = 720$ και αφαιρούμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος. Συνεπώς έχουμε $720 - 240 = 480$ τρόπους.
3. Η νύφη μπορεί να βρίσκεται είτε αριστερά είτε δεξιά από τον γαμπρό. Λόγω συμμετρίας σε ακριβώς τις μισές περιπτώσεις από τους συνολικούς τρόπους τοποθέτησης θα βρίσκεται αριστερά του, συνεπώς με 360 τρόπους.

Άσκηση 4

Σε έναν γάμο, με πόσους τρόπους μπορεί ένας φωτογράφος να τακτοποιήσει 6 ανθρώπους σε μία σειρά μέσα από μια ομάδα 10 ανθρώπων, στην οποία ανήκει ο γαμπρός και η νύφη, αν:

1. η νύφη πρέπει να βρίσκεται στη φωτογραφία.
2. η νύφη και ο γαμπρός πρέπει να βρίσκονται στη φωτογραφία.
3. στη φωτογραφία βρίσκεται είτε η νύφη, είτε ο γαμπρός αλλά όχι και οι δύο.

1. Αρχικά τοποθετούμε τη νύφη σε οποιαδήποτε από τις 6 θέσεις. Στη συνέχεια μπορούμε να επιλέξουμε 5 από τους 9 ανθρώπους για τις υπόλοιπες θέσεις, κάτι που μπορεί να γίνει με $9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 15.120$ τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά $6 * 15.120 = 90.720$ τρόποι, πολλαπλασιάζοντας με τους τρόπους που μπορεί να τοποθετηθεί η νύφη.
2. Αντιστοίχως, τοποθετούμε τη νύφη σε οποιαδήποτε από τις 6 θέσεις και τον γαμπρό σε οποιαδήποτε από τις 5 υπολειπόμενες. Μπορούμε να επιλέξουμε 4 από τα 8 άτομα στις εναπομείνασες θέσεις με $8 * 7 * 6 * 5 = 1680$ τρόπους. Το συνολικό πλήθος, πολλαπλασιάζοντας με τους τρόπους τοποθέτησης της νύφης και του γαμπρού είναι $6 * 5 * 1680 = 50.400$ τρόποι.
3. Από τα πρώτα 2 ερωτήματα προκύπτει ότι υπάρχουν ακριβώς $90.720 - 50.400 = 40.320$ τρόποι για να είναι μόνο η νύφη στη φωτογραφία και αντίστοιχα $90.720 - 50.400 = 40.320$ τρόποι για να είναι μόνο ο γαμπρός στη φωτογραφία. Από τον κανόνα του αθροίσματος προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά $40.320 + 40.320 = 80.640$ τρόποι.

Άσκηση 5

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθίσουν 4 άνθρωποι από ένα σύνολο 10 ανθρώπων γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι, οπού δυο τοποθετήσεις θεωρούνται ίδιες εφόσον κάθε άνθρωπος έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά του?

Η απάντηση στηρίζεται στην εφαρμογή τόσο του κανόνα του γινομένου, όσο και του κανόνα της διαίρεσης. Αριθμούμε τις θέσεις από το 1 έως το 4. Για την πρώτη θέση υπάρχουν 10 διαφορετικές επιλογές ανθρώπων που μπορούν να καθίσουν. Για την δεύτερη υπάρχουν 9, ενώ για την τρίτη και την τέταρτη 8 και 7 επιλογές αντίστοιχα. Άρα βάση του κανόνα του γινομένου υπάρχουν $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ πιθανές τοποθετήσεις.

Εφόσον υπάρχουν 4 τοποθετήσεις τέτοιες ώστε ο κάθε άνθρωπος να έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της διαίρεσης βρίσκουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$n = \frac{5.040}{4} = 1.260$$

διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι 4 από τους 10 γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι.

Άσκηση 6

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 10 είτε ξεκινούν από 3 μηδενικά είτε τελειώνουν με 2 μηδενικά·

Έστω τα σύνολα A και B που περιλαμβάνουν όλες τις συμβολοσειρές bit με μήκος 10 που ξεκινούν από 3 και τελειώνουν με 2 μηδενικά αντίστοιχα. Το πρώτο σύνολο αριθμεί βάσει του κανόνα του γινομένου $|A| = 2^{10-3} = 128$ στοιχεία, αφού ξεκινώντας με 3 μηδενικά μένει μια συμβολοσειρά bit με 7 στοιχεία. Ομοίως το δεύτερο σύνολο έχει $|B| = 2^{10-2} = 256$ στοιχεία. Η τομή τους αριθμεί $|A \cap B| = 2^{10-3-2} = 32$ στοιχεία. Συνολικά, βάσει της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού το ζητούμενο σύνολο αριθμεί $128 + 256 - 32 = 352$ στοιχεία.

Άσκηση 7

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 10 περιέχουν είτε 5 διαδοχικά μηδενικά είτε 5 διαδοχικές μονάδες·

Πρώτα μετράμε τον αριθμό των συμβολοσειρών μήκους 10 που περιέχουν 5 διαδοχικά μηδενικά. Τα μηδενικά μπορεί να ξεκινούν στο 1ο bit, οπότε τα επόμενα 5 bits μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα και συνεπώς υπάρχουν $2^5 = 32$ τέτοιες συμβολοσειρές. Αν ξεκινάνε στο 2ο bit, τότε το πρώτο bit πρέπει να είναι 1 και επιλέγονται τυχαία τα 4 τελευταία bits, συνεπώς υπάρχουν $2^4 = 16$ τέτοιες συμβολοσειρές. Αν ξεκινάνε στο 3ο bit, τότε το 2ο bit πρέπει να είναι μονάδα αλλά υπάρχει ελεύθερη επιλογή για το πρώτο και τα 3 τελευταία bits και συνεπώς υπάρχουν $2^4 = 16$ τέτοιες συμβολοσειρές. Ομοίως, υπάρχουν 16 συμβολοσειρές αν τα 5 διαδοχικά μηδενικά ξεκινάνε στο 4ο, 5ο ή 6ο bit. Το συνολικό πλήθος των συμβολοσειρών με 5 διαδοχικά μηδενικά είναι συνεπώς $32 + 5 * 16 = 112$. Κατ' αντιστοιχία το πλήθος των συμβολοσειρών με 5 διαδοχικές μονάδες είναι επίσης 112.

Αν δούμε ως σύνολα τις αντίστοιχες συμβολοσειρές βλέπουμε ότι βάσει της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρούμε το πλήθος των συμβολοσειρών που περιέρχουν είτε 5 διαδοχικά μηδενικά είτε 5 διαδοχικές μονάδες πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος των συμβολοσειρών που ανήκουν και στα δύο σύνολα για να μην διπλομετρήσουμε. Υπάρχουν ακριβώς 2 τέτοιες συμβολοσειρές οι 0000011111 και 1111100000. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος είναι $112 + 112 - 2 = 222$.

Άσκηση 8

Έστω ότι οι αριθμοί p και q είναι πρώτοι και ότι $n = pq$. Να χρησιμοποιήσετε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν το n και είναι σχετικά πρώτοι με το n. Σχετικά πρώτοι είναι οι αριθμοί που δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα.

Έστω P το υποσύνολο των αριθμών $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ που διαιρούνται από το p, και αντίστοιχα Q το υποσύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το q. Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των αριθμών που δεν διαιρούνται ούτε από το p ούτε το q και είναι μικρότεροι από n. Συνεπώς το πλήθος τους είναι: $n - |P \cup Q|$.

Σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, $|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$. Κάθε πολλαπλάσιο του p διαιρείται από το p, άρα $|P| = \lfloor n/p \rfloor$. Αντίστοιχα, $|Q| = \lfloor n/q \rfloor$. Προφανώς ο n είναι ο μόνος θετικός ακέραιος που δεν ξεπερνά το n και διαιρείται τόσο από το p όσο και από το q q, άρα $|P \cap Q| = 1$.

Επομένως, το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν το n και είναι σχετικά πρώτοι με το n είναι $n - (\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/q \rfloor - 1) = n - q - p + 1$.

Άσκηση 9

Να χρησιμοποιήσετε την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι κάτω από 1.000.000 και δεν διαιρούνται από το 4 ή το 6.

Κάθε 4ος αριθμός διαιρείται με το 4 και κάθε 6ος αριθμός διαιρείται με το 6. Συνεπώς, $\lfloor 999.999/4 \rfloor = 249.999$ αριθμοί διαιρούνται με το 4 και $\lfloor 999.999/6 \rfloor = 166.666$ αριθμοί διαιρούνται με το 6. Ωστόσο, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι υπάρχουν και αριθμοί που διαιρούνται και με το 4 και με το 6. Οι αριθμοί αυτοί διαιρούνται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους και είναι στο πλήθος $\lfloor 999.999/12 \rfloor = 83.333$. Συνεπώς, το πλήθος είναι $999.999 - 249.999 - 166.666 + 83.333 = 666.667$

Άσκηση 10

Πόσες διαγώνιους έχει ένα πολύγωνο με n πλευρές.

Από κάθε κορυφή ξεκινούν $n-3$ διαγώνιοι αν αφαιρέσουμε την κορυφή και τις γειτονικές του κορυφές. Εφόσον υπάρχουν n κορυφές, από τον κανόνα γινομένου λαμβάνουμε $n*(n-3)$ διαγώνιους. Ωστόσο, εφόσον μία διαγώνιος ενώνει 2 κορυφές έχουμε μετρήσει 2 φορές κάθε διαγώνιο. Συνεπώς, προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος των διαγώνιων πολυγώνου με n κορυφές είναι $n(n-3)/2$.

Άσκηση 11

Έστω ότι (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ένα σύνολο 9 διαφορετικών σημείων με ακέραιες συντεταγμένες στο χώρο $\Re^3$. Να δείξετε ότι, το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τουλάχιστον ένα ζεύγος αυτών των σημείων έχει ακέραιες συντεταγμένες.

Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει 2 διακριτά σημεία (x_i, y_i, z_i) και (x_j, y_j, z_j), είναι το σημείο $((x_i + x_j)/2, (y_i + y_j)/2, (z_i + z_j)/2)$.

Προφανώς, οι συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος είναι ακέραιες αν και μόνον αν οι συντεταγμένες των άκρων του έχουν την ίδια ισοτιμία (η x_i με την x_j, κ.λπ.).

Από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν $2^3 = 8$ τριπλέτες ισοτιμιών: (περιττή, περιττή, περιττή), (περιττή, περιττή, άρτια), ... , (άρτια, άρτια, άρτια).

Δεδομένου ότι έχουμε 9 σημεία, βάσει της αρχής του περιστερώνα θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία με τις ίδιες τριπλέτες ισοτιμιών. Το μέσο αυτών των δύο σημείων θα έχει συνεπώς ακέραιες συντεταγμένες.

Άσκηση 12

Πόσα πιθανά αποτελέσματα υπάρχουν σε έναν αγώνα ταχύτητας με 3 άλογα, αν είναι δυνατή η ισοπαλία? *[Παρατήρηση: Δύο ή τρία άλογα μπορεί να είναι ισόπαλα.]*

Αν δεν υπάρχουν ισοπαλίες υπάρχουν $3! = 6$ μεταθέσεις του συνόλου των τρίων αλόγων που αντιστοιχούν σε 6 πιθανά αποτελέσματα.

Αν δύο άλογα είναι ισόπαλα, υπάρχουν 3 διαφορετικοί τρόποι να επιλεγεί πιο άλογο δεν θα είναι ισόπαλο. Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, υπάρχουν δύο τρόποι να επιλεγεί αν αυτό το άλογο θα είναι πρώτο ή δεύτερο. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου έχουμε $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους.

Τέλος υπάρχει η περίπτωση και τα τρία άλογα να είναι ισόπαλα. Συνεπώς τα πιθανά αποτελέσματα είναι σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος $6 + 6 + 1 = 13$.

Άσκηση 13

Μια ομάδα περιέχει n άνδρες και n γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετήσουμε τα άτομα αυτά σε μια σειρά, όπου οι άνδρες και οι γυναίκες εναλλάσσονται;

Υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις των ανδρών και $n!$ μεταθέσεις (διατεταγμένες τοποθετήσεις) των γυναικών.

Για κάθε τρόπο τοποθέτησης των ανδρών και των γυναικών, υπάρχουν δύο δυνατότητες: είτε κάθε γυναίκα θα έπεται του αντίστοιχου άνδρα MWMWMW....MW, είτε κάθε άνδρας θα έπεται της αντίστοιχης γυναίκας WMWMW....WM.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου και εφόσον η τοποθέτηση των ατόμων σε μια εναλλασσόμενη σειρά αναλύεται στις 3 παραπάνω διαδικασίες, υπάρχουν $2 * n! * n! = 2(n!)^2$ τρόποι.

Άσκηση 14

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 8 άνδρες και 5 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη;*[Υπόδειξη: Πρώτα τοποθετήστε τους άνδρες και μετά εξετάστε πιθανές θέσεις για τις γυναίκες]*

Καταρχάς υπάρχουν $P(8,8) = 8!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 9 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη: -M-M-M-M-M-M-M-M-.

Υπάρχουν $P(9,5) = 9!/4!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 5 γυναίκες σε αυτές τις 9 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $8! \cdot 9!/4! = 609.638.400$ τρόποι.

Άσκηση 15

Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους 10 περιέχουν

1. ακριβώς τέσσερις μονάδες;
2. το πολύ τέσσερις μονάδες;
3. το λιγότερο τέσσερις μονάδες;
4. ίσο αριθμό μηδενικών και μονάδων;

1. Για να προσδιορίζουμε μια συμβολοσειρά μήκους 10 με ακριβώς 4 μονάδες αρκεί να προσδιορίσουμε τις θέσεις όπου θα βρίσκονται οι μονάδες. Έχουμε λοιπόν να επιλέξουμε έναν συνδυασμό 4 θέσεων από τις 10 συνολικά θέσεις, εφόσον δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία θα τις επιλέξουμε. Συνεπώς υπάρχουν $C(10,4) = 210$ τρόποι επιλογής των θέσεων και ίσο πλήθος συμβολοσειρών.
2. Σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει είτε 0, είτε 1, είτε 2, είτε 3, είτε 4 μονάδες. Από τον κανόνα αθροίσματος προκύπτει ότι υπάρχουν $C(10,4) + C(10,3) + C(10,2) + C(10,1) + C(10,0) =$ $210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386$ τέτοιες συμβολοσειρές.
3. Αντιστοίχως, σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει 4,5,6,7,8,9 ή 10 μονάδες. Επομένως υπάρχουν $C(10,10) + ... + C(10,4) = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 = 848$ τέτοιες συμβολοσειρές. Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος συμβολοσειρών, τις συμβολοσειρές που έχουν μέχρι 3 μονάδες.

4. Οι συμβολοσειρές έχουν σε αυτή την περίπτωση 5 ακριβώς μονάδες οπότε το πλήθος τους είναι $C(10,5) = 252$.

   Εδώ προκύπτει και ένας διαφορετικός τρόπος απάντησης του ερωτήματος *2*. Όταν δεν έχουμε ίσο πλήθος μηδενικών και μονάδων τότε έχουμε είτε το πολύ 4 είτε τουλάχιστον 6 μονάδες. Λόγω συμμετρίας των συνδυασμών έχουμε το πολύ 4 μονάδες στις μισές από αυτές τις περιπτώσεις. Επομένως, η απάντηση σε αυτή την περίπτωση είναι $(2^{10} - C(10,5))/2 = (1024 - 252)/2 = 386$.

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι, αν f μια συνάρτηση από το S στο T, όπου S, T είναι μη κενά πεπερασμένα σύνολα και $m = \lceil |S|/|T| \rceil$, τότε υπάρχουν τουλάχιστον m στοιχεία του S, τα οποία αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή του T. Με άλλα λόγια να δείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία $s_1, s_2, \ldots, s_m$ του S, τέτοια ώστε $f(s_1) = f(s_2) = \cdots = f(s_m)$.

Η συνάρτηση f τοποθετεί όλα τα στοιχεία του συνόλου S στο σύνολο T. Θεωρούμε τα στοιχεία του T ως θέσεις, ωστέ να εφαρμόσουμε την γενικευμένη αρχή του περιστερώνα. Βάσει αυτής, η τοποθέτηση $|S|$ στοιχείων σε $|T|$ θέσεις συνεπάγεται ότι για τουλάχιστον μία θέση $t \in T$ θα υπάρχουν $m = \lceil |S|/|T| \rceil$ στοιχεία του S τέτοια ώστε να απεικονίζονται μέσω της f σε αυτό.

Άσκηση 17

Υπάρχουν 6 δρομείς σε έναν αγώνα 100 μέτρων. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να απονεμηθούν μετάλλια αν είναι δυνατή η ισοπαλία; (ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν ταχύτερα λαμβάνουν χρυσά μετάλλια, ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από έναν δρομέα λαμβάνουν ασημένια μετάλλια και ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από δύο δρομείς, λαμβάνουν χάλκινα μετάλλια).

Η επίλυση αυτού του προβλήματος απαιτεί την ανάλυσή του σε περιπτώσεις:

1. Αν υπάρχουν μοναδικοί νικητές του χρυσού και του ασημένιου μετάλλιου, υπάρχουν $P(6,2) = 6 \cdot 5 = 30$ τρόποι επιλογής τους. Το χάλκινο μετάλλιο μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο S των 4 δρομέων που απομένουν. Τα μη κενά υποσύνολα είναι στο πλήθος $2^{|S|} - 1 = 15$. Επομένως, υπάρχουν συνολικά $30 \cdot 15 = 450$ τρόποι σε αυτή την περίπτωση.

2. Αν υπάρχει μια ισοπαλία 2 ατόμων για την πρώτη θέση τότε προφανώς υπάρχουν $C(6,2) = 15$ τρόποι να επιλεγούν οι δρομείς που θα λάβουν το χρυσό. Το χάλκινο μετάλλιο (εφόσον σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμεται ασημένιο) μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 4 δρομέων, που είναι στο πλήθος 15. Συνεπώς υπάρχουν $15 \cdot 15 = 225$ τρόποι απονομής των μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

3. Αν k δρομείς τερματίσουν πρώτοι με $k \geq 3$, τότε υπάρχουν $C(6, k)$ τρόποι απονομής του χρυσού μετάλλιου. Σε αυτή την περίπτωση δεν δίνονται άλλα μετάλλια συνεπώς σύμφωνα με τον κανόνα αθροίσματος υπάρχουν $C(6, 3) + C(6, 4) + C(6, 5) + C(6, 6) = 20 + 15 + 6 + 1 = 42$ τρόποι απονομής του χρυσού.

4. Η μόνη άλλη περίπτωση είναι να υπάρχει μοναδικός νικητής του χρυσού και k δρομείς να τερματίσουν δεύτεροι, όπου $k \geq 2$. Σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμονται χάλκινα μετάλλια. Ο νικητής μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους ενώ στη δεύτερη θέση μπορεί να βρίσκονται οι δρομείς σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 5 δρομέων εκτός από τα υποσύνολα που έχουν μόνο ένα στοιχείο, καθώς $k \geq 2$. Το πλήθος αυτών των υποσυνόλων είναι $2^5 - 5 - 1 = 26$. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά $6 * 26 = 156$ τρόποι απονομής μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αθροίσματος, υπάρχουν συνολικά $450 + 225 + 42 + 156 = 873$ τρόποι απονομής μεταλλίων.

Άσκηση 18

Να δείξετε ότι, αν επιλέξουμε 5 σημεία στην εσωτερική περιοχή ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς ίσο με 2, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Το τετράγωνο μπορεί να χωριστεί σε 4 μικρότερα τετράγωνα με μήκος πλευράς ίσο με 1. Από την αρχή του περιστερώνα προκύπτει ότι 2 τουλάχιστον σημεία από τα 5 θα βρίσκονται στο ίδιο εσωτερικό τετράγωνο. Η μέγιστη απόσταση δύο σημείων σε ένα τετράγωνο είναι ίση με το μήκος της διαγωνίου του που στην προκειμένη περίπτωση είναι $\sqrt{2}$.

Συνεπώς υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία τα οποία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Άσκηση 19

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 20 άνδρες και 4 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη και το πλήθος των ανδρων σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο;

Καταρχάς υπάρχουν $P(20, 20) = 20!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 11 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη και το πλήθος των ανδρών σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο:
-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-.

Υπάρχουν $P(11, 4) = 11!/(11 - 4)! = 11!/7!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 4 γυναίκες σε αυτές τις 11 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $20! \cdot 11!/7!$ τρόποι (πολύ μεγάλος αριθμός).

Ασκηση 20

Ο πλούσιος θείος μας έχει και εργοστάσιο με σοκολάτες.Παρασκευάζει 3 είδη σοκολάτας: γάλακτος, λευκή και με αμύγδαλα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε:

1. 10 σοκολάτες;

2. 10 σοκολάτες, έτσι ώστε να έχω τουλάχιστον 1 γάλακτος, τουλάχιστον 2 αμυγδάλου και τουλάχιστον 1 με λευκη σοκολάτα;

3. 14 σοκολάτες, έτσι ώστε να έχω το πολύ 4 γάλακτος, το πολύ 5 αμυγδάλου και το πολύ 6 με λευκη σοκολάτα;

1. Σε αυτή την άσκηση παρατηρούμε ότι έχουμε να επιλέξουμε από ένα σύνολο τριών στοιχείων (τα είδη της σοκολάτας) 10 αντικείμενα, όπου επιτρέπεται η επανάληψη. Συνεπώς το πλήθος των λύσεων είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 3 στοιχείων ανά 10 με επανάληψη = $\binom{3+10-1}{10} = (3+10-1)!/(2! * 10!) = 12 \cdot 11/2 = 66.$

2. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγονται αρχικά αυτές που πρέπει τουλάχιστον να υπάρχουν, που είναι 4. Οι υπόλοιπες 6 επιλέγονται από το σύνολο 3 στοιχείων, συνεπώς το πλήθος των τρόπων επιλογής είναι $\binom{3+6-1}{6} = 8!/(6! * 2!) = 28.$

Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής: έστω x_1 σοκολάτες γάλακτος, x_2 αμυγδάλου και x_3 με λευκή σοκολάτα. Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα επιλογής σαν την εύρεση του πλήθους των λύσεων όπου $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ και $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 1$. Έστω x_i' το πλήθος των σοκολάτων πλέον των αναγκαίων. Τότε ισχύει $x_1 = x_1' + 1$, $x_2 = x_2' + 2$, $x_3 = x_3' + 1$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση προκύπτει $x_1' + x_2' + x_3' = 6$, οπότε η λύση προκύπτει όπως στο ερώτημα 1 (επιλογή 6 αντικειμένων από σύνολο τριών στοιχείων).

3. Το προβλήμα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των λύσεων της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, όπου $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 5$, $x_3 \leq 6$. Το πλήθος των λύσεων αυτής της εξίσωσης μπορεί να βρεθεί αν αφαιρεθεί από το συνολικό πλήθος των λύσεων της εξίσωσης χωρίς περιορισμούς, το πλήθος των λύσεων που τους παραβιάζουν. Οι περιορισμοί παραβιάζονται είτε όταν $x_1 \geq 5$, είτε όταν $x_2 \geq 6$, είτε όταν $x_3 \geq 7$. Ωστόσο, αυτές οι τρεις περιπτώσεις δεν είναι ξένες, δηλαδή αν τις εκφράσουμε ως σύνολα A, B και C έχουν κοινά στοιχεία.

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού προκύπτει ότι:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Σύμφωνα με το ερώτημα 2: $|A| = \binom{3+9-1}{9} = 55$, $|B| = \binom{3+8-1}{8} = 45$,
$|C| = \binom{3+7-1}{7} = 36$, $|A \cap B| = \binom{3+3-1}{3} = 10$,$|A \cap C| = \binom{3+2-1}{2} = 6$,
$|B \cap C| = \binom{3+1-1}{1} = 3$, $|A \cap B \cap C| = 0$.

Επομένως το πλήθος των λύσεων είναι:
$\binom{3+14-1}{14} - |A \cup B \cup C| = 120 - 55 - 45 - 36 + 10 + 6 + 3 = 3$.

Άσκηση 21

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε:

1. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, έτσι ώστε σε κάθε ράφι να έχω 10 βιβλία (δεν μας ενδιαφέρουν οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια);

2. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 όμοια ράφια, έτσι ώστε σε κάθε ράφι να έχω 10 βιβλία (δεν μας ενδιαφέρουν οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια);

3. 40 όμοια βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια;

4. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, αν η θέση των βιβλίων στα ράφια έχει σημασία;

1. Από τη θεωρία προκύπτει ότι το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\frac{40!}{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 10!} = \frac{40!}{(10!)^4}$$

2. Δεδομένου ότι τα ράφια είναι πλέον όμοια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα διαίρεσης. Οι διαφορετικές μεταθέσεις των τεσσάρων ραφιών αντιστοιχούν στην ίδια τοποθέτηση των βιβλίων. Το πλήθος των μεταθέσεων είναι 4!, συνεπώς το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\frac{40!}{(10!)^4\cdot 4!}$$

3. Από τη θεωρία προκύπτει ότι το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\binom{4+40-1}{40} = 12.341$$

Υπάρχει αντιστοιχία 1-1 άναμεσα στους τρόπους τοποθέτησης 40 όμοιων βιβλίων σε 4 διακεκριμένα ράφια και τους τρόπους να πάρουμε 40 αντικείμενα από ένα σύνολο 4 στοιχείων, δηλαδή τους συνδυασμούς των 4 στοιχείων ανά 40 με επανάληψη. Βάζω ένα βιβλίο στο ράφι i κάθε φορά που συμπεριλαμβάνω το i στοιχείο του συνόλου στον συνδυασμό.

4. Μπορούμε να χωρίσουμε τη διαδικασία τοποθέτησης σε δύο επιμέρους διαδικασίες: α) Την τοποθέτηση των 40 βιβλίων στα 4 διακεκριμένα ράφια σαν να μη διακρίνονταν μεταξύ τους και β) τη διάταξή τους. Το πλήθος των τρόπων για την πραγματοποίηση της α) διαδικασίας υπολογίστηκε στο ερώτημα 3. Το πλήθος των διαφορετικών διατεταγμένων τοποθετήσεων των 40 βιβλίων είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεών τους. Από τον κανόνα γινομένου προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος των τρόπων είναι:

$$\binom{4+40-1}{40} \cdot 40! = 12.341 \cdot 40!$$

Ασκηση 22

Πόσοι διαφορετικοί όροι υπάρχουν στο ανάπτυγμα $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$ όταν προστεθούν όλοι οι όροι με όμοια σύνολα εκθετών.

Κάθε όρος του αθροίσματος έχει τη μορφή $Cx_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_m^{n_m}$ όπου τα n_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι που έχουν άθροισμα n.

Συνεπώς, το πλήθος των όρων είναι ίσο με το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Παρατηρούμε ότι μια λύση αυτής της εξίσωσης αντιστοιχεί σε έναν τρόπο επιλογής n αντικειμένων από ένα σύνολο m στοιχείων, όπου επιτρέπεται η επανάληψη, έτσι ώστε να επιλεχθούν n_1 αντικειμένα του πρώτου τύπου, n_2 του δεύτερου και ούτω καθεξής.

Άρα το πλήθος των λύσεων είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών-m στοιχείων ανά n, όπου επιτρέπεται η επανάληψη, το οποίο είναι ίσο με $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$

Ασκηση 23

Πόσες μεταθέσεις των 26 γραμμάτων του Λατινικού αλφαβήτου δεν περιέχουν καμία από τις συμβολόσειρές fish, bird, ή rat;

Υπάρχουν συνολικά 26! μεταθέσεις όλου του αλφαβήτου. Για να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις που περιέχουν τη λέξη fish, τοποθετούμε μαζί αυτά τα 4 γράμματα και τα μεταθέτουμε μαζί με τα άλλα 22 γράμματα, άρα υπάρχουν συνολικά 23! μεταθέσεις για αυτήν την επιλογή. Ομοίως υπάρχουν 23! μεταθέσεις που να περιέχουν τη λέξη bird και 24! που να περιέχουν τη λέξη rat.

Ωστόσο για να μη μετρήσουμε διπλά τις μεταθέσεις που αφαιρούμε εφαρμόζουμε την αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού. Έστω A, B και C τα αντίστοιχα σύνολα μεταθέσεων που δεν περιέχουν τις παραπάνω λέξεις. Τότε ισχύει: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Στην περίπτωση που οι μεταθέσεις περιέχουν και την λέξη fish και τη λέξη rat, μένουν 19 γράμματα που μαζί με τις 2 λέξεις που τοποθετούνται μαζί, συνιστούν 21 στοιχεία που μετατίθενται. Συνεπώς $|A \cap C| = 21!$.

Δεν υπάρχουν μεταθέσεις που να περιέχουν ταυτόχρονα τη λέξη bird και τη λέξη fish, ούτε τη λέξη bird και τη λέξη rat, γιατί και στις δύο περιπτώσεις οι λέξεις έχουν κοινούς χαρακτήρες που μπορούν να εμφανίζονται μόνο μία φορά (i και r αντίστοιχα). Προφανώς, δεν υπάρχουν μεταθέσεις που να περιέχουν ταυτόχρονα και τις 3 λέξεις.

Συνεπώς, $|A \cap B| = 0$, $|B \cap C| = 0$, $|A \cap B \cap C| = 0$ και το συνολικό πλήθος των μεταθέσεων είναι $26! - 23! - 23! - 24! + 21!$.

Ασκηση 24

Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, όπου οι x_1, x_2 και x_3 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι μικρότεροι του 6?

Αρχικά θα βρούμε πόσες είναι οι συνολικές λύσεις χωρίς περιορισμό. Αυτές είναι $C(3+13-1,13)=C(15,2)=105$. Στην συνέχεια θα βρούμε πόσες είναι οι λύσεις εφόσον 1 μεταβλητή παραβιάζει τον περιορισμό.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1 \geq 6$ και θέτουμε $x_1' = x_1 - 6$. Οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις του αθροίσματος $x_1' + x_2 + x_3 = 7$ είναι $C(3+7-1,7)=C(9,2)=36$.

Βάσει συμμετρίας για κάθε μεταβλητή συμβαίνει το ίδιο και άρα υπάρχουν $3 \cdot 36 = 108$ λύσεις που να παραβιάζουν τον περιορισμό.

Έπειτα απαριθμούμε τις περιπτώσεις κατά τις οποίες 2 μεταβλητές παραβιάζουν τον περιορισμό.

Υπάρχουν $C(3,2) = 3$ τέτοιες περιπτώσεις που είναι ισοδύναμες λόγω συμμετρίας. Πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε $x_1, x_2 \geq 6$ και θέτουμε $x_1' = x_1 - 6$ και $x_2' = x_2 - 6$. Άρα θέλουμε να βρούμε τον αριθμό μη αρνητικών λύσεων για την εξίσωση $x_1' + x_2' + x_3 = 1$. Υπάρχουν $C(1+3-1,1) = 3$ τέτοιες λύσεις και συνολικά $3 \cdot 3 = 9$ λύσεις για όλα τα ζευγάρια μεταβλητών.

Από την στιγμή που $3 \cdot 6 = 18 > 13$, δεν υπάρχει καμία λύση τέτοια ώστε και οι τρεις μεταβλητές να παραβιάζουν τον περιορισμό. Συνολικά, εφαρμόζοντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, (βλ. άσκηση 12) βρίσκουμε ότι υπάρχουν $105 - 108 + 9 = 6$ λύσεις που για το αρχικό μας πρόβλημα.

Ασκηση 25

Πόσοι θετικοί αριθμοί μικρότεροι από 1.000.000 έχουν ακριβώς ενα ψηφίο ίσο με 9 και το άθροισμα των ψηφίων τους ειναι ίσο με 13?

Έστω $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ τα ψηφία ενός αριθμού μικρότερου από 1.000.000. Για κάθε ψηφίο ισχύει $0 \leq d_i \leq 9$ (θεωρούμε ότι οι πρώτοι όροι μπορούν να είναι μηδενικά). Συνεπώς, αναζητούμε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 13$ που υπόκεινται στις προαναφερθείσες ανισότητες, όταν ένα ακριβώς ψηφίο είναι ίσο με 9.

Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, μπορούμε να θέσουμε το $d_6 = 9$ οπότε αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 4$. Για να μετρήσουμε τον αριθμό των λύσεων, παρατηρούμε ότι η λύση αντιστοιχεί στην επιλογή 4 αντικειμένων από ένα σύνολο 5 στοιχείων με τους περιορισμούς που θέτουν οι ανισότητες, με επανάληψη. Αν δεν λάβουμε υπόψιν μας τον περιορισμό του άνω ορίου (δηλαδή ότι $d_i \leq 9$), υπάρχουν ακριβώς $C(5 + 4 - 1, 4) = C(8, 4) = 70$ λύσεις της εξίσωσης.

Δεδομένου ότι οι αριθμοί διαφοροποιούνται ανάλογα με το που βρίσκεται το 9 και ότι υπάρχουν 6 δυνατές θέσεις για αυτό, το συνολικό πλήθος των λύσεων είναι $6 \cdot 70 = 420$.

Χρειάζεται να αφαιρέσουμε τα ενδεχόμενα για τα οποία $\exists i$ τέτοιο ώστε $d_i > 9$. Εφόσον το άθροισμα είναι ίσο με 4, δεν υπάρχει κανένα τέτοιο ενδεχόμενο. Συνεπώς, υπάρχουν ακριβώς 420 τέτοιοι θετικοί αριθμοί.

Ασκηση 26

Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικροτεροι ή ίσοι με 1000 δεν διαιρούνται από το 4, το 6 και το 9;

Έστω A το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 4, B το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 6 και C το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 9. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος τον πληθάριθμο της ένωσης των παραπάνω συνόλων $|A \cup B \cup C|$.

Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Συνεπώς, και δεδομένου ότι το πλήθος των θετικών ακέραιων αριθμών που διαιρούνται με ακέραιο d εντός του διαστήματος $[1, n]$ είναι $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ το πλήθος είναι ίσο με:

$$1000 - \lfloor \frac{1000}{4} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{9} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{12} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{36} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{18} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{36} \rfloor = 445.$$

Για την εύρεση του πληθάριθμου των τομών βασιζόμαστε στην ιδιότητα ότι ένας ακέραιος διαιρείται από δύο άλλους ακέραιους αν και μονο αν διαιρείται από το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιό τους.