Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

Εισαγωγή στα Σύνολα - Πράξεις Συνόλων

Άσκηση 9

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A \cup C$
4. $A \cap C$
5. $A - B$
6. $|A \cup B|$
7. $|A \cap C|$

Άσκηση 9

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$
2. $A \cap B = \{3, 5, 7\}$
3. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
4. $A \cap C = \emptyset$
5. $A - B = \{1, 9, 11\}$
6. $|A \cup B| = 8$
7. $|A \cap C| = 0$

Άσκηση 10

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$

$B = \{1, \{2\}\}$

Απαντήστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. $2 \in A \cap B$
2. $2 \in A \cup B$
3. $2 \in A - B$
4. $\{2\} \in A \cap B$
5. $\{2\} \in A \cup B$
6. $\{2\} \in A - B$

Άσκηση 10

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$

$B = \{1, \{2\}\}$

Απαντήστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. $2 \in A \cap B$ Ψ
2. $2 \in A \cup B$ Α
3. $2 \in A - B$ Α
4. $\{2\} \in A \cap B$ Ψ
5. $\{2\} \in A \cup B$ Α
6. $\{2\} \in A - B$ Ψ

Άσκηση 11

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$B = \{2, 3, 6, 8\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $B \cup C$
2. $B \cap C$
3. $B - C$
4. $A - B$
5. $A - C$

Άσκηση 11

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$B = \{2, 3, 6, 8\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
2. $B \cap C = \{2, 3, 8\}$
3. $B - C = \{6\}$
4. $A - B = \{1, 4, 5, 7, 9, 10\}$
5. $A - C = \{1, 6, 7, 9, 10\}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

1. Βρείτε τα: $A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{(A \cap B)}$ και $(B \cup C) - A$
2. Απαντήστε αιτιολογημένα αν η ακόλουθη ισότητα είναι σωστή:
   $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$
3. Γιατί δεν έχει νόημα η έκφραση $\overline{\mathcal{P}(A)}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

1. Βρείτε τα: $A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{(A \cap B)}$ και $(B \cup C) - A$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{0, 2\}$

$\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$(B \cup C) - A = \{4, 6, 9\}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

2. Απαντήστε αιτιολογημένα αν η ακόλουθη ισότητα είναι αληθής: $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$

Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα. Έστω $E = \{0\}, F = \{1\}$.

Τότε $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}\}$ και $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

Συνεπώς $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$

Όμως $E \cup F = \{0, 1\}$ και επομένως $\mathcal{P}(E \cup F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, \}, \{0, 1\}\}$. Ψευδές.

Παρατηρούμε ότι για τα εν λόγω σύνολα $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$. Θα το αποδείξουμε σε επόμενο φροντιστήριο.

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

3. Γιατί δεν έχει νόημα η έκφραση $\overline{\mathcal{P}(A)}$

Το σύνολο $\mathcal{P}(A)$ περιέχει στοιχεία όπως το $\{0\}$ που δεν περιλαμβάνονται στο καθολικό σύνολο. Συνεπώς δεν έχει νόημα η έννοια του συμπληρώματος σε αυτή την περίπτωση.

Άσκηση 13

Έστω: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχουν τα σύνολα $A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; Απαντήστε αν τα παρακάτω είναι αληθή:
2. $1 \in A$
3. $\{1, 2\} \in A$
4. $\{\{1, 2\}\} \in A$
5. $\emptyset \in A$
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
7. $1 \in \mathcal{P}(A)$
8. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$
9. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(A)$
10. $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
11. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
12. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
13. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

Άσκηση 13

Έστω: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχουν τα σύνολα $A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; Απαντήστε αν τα παρακάτω είναι αληθή:
2. $1 \in A$ Α
3. $\{1, 2\} \in A$ Α
4. $\{\{1, 2\}\} \in A$ Ψ
5. $\emptyset \in A$ Ψ
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ Α
7. $1 \in \mathcal{P}(A)$ Ψ
8. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$ Α
9. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(A)$ Α
10. $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Ψ
11. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Ψ
12. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Α
13. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Α

Άσκηση 14

Να βρείτε τα σύνολα A και B αν: $A - B = \{1, 5, 7, 8\}, B - A = \{2, 10\}$ και $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Άσκηση 14

Να βρείτε τα σύνολα A και B αν: $A - B = \{1, 5, 7, 8\}, B - A = \{2, 10\}$ και $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Γνωρίζουμε από τον ορισμό της αφαίρεσης ότι $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

Συνεπώς $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Αντίστοιχα, $B = (B - A) \cup (B \cap A) = (B - A) \cup (A \cap B) = \{2, 3, 6, 9, 10\}$

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι αν A και B σύνολα τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι αν A και B σύνολα τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι αν A, B και C σύνολα τότε $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cap B \cap C$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι αν A, B και C σύνολα τότε $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cap B \cap C$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1

Άσκηση 17

Μπορείτε να συμπεράνετε ότι $A = B$ αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Άσκηση 17

Μπορείτε να συμπεράνετε ότι $A = B$ αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου προκύπτει ότι $\cup\mathcal{P}(A) = A$.

Αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, τότε $\cup\mathcal{P}(A) = \cup\mathcal{P}(B)$.

Συνεπώς, $A = B$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ εάν και μόνο εάν $A \subseteq B$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ **εάν και μόνο εάν** $A \subseteq B$.

$$\Rightarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, τότε $A \subseteq B$.

Έστω $a \in A$. Τότε $\{a\} \subseteq A$ οπότε $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ και από υπόθεση $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$. Δηλαδή $\{a\} \subseteq B$ και ως εκ τούτου $a \in B$.

$$\Leftarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Έστω ότι $A \subseteq B$. Τότε λόγω μεταβατικής ιδιότητας για κάθε υποσύνολο C του A ισχύει ότι $C \subseteq B$. Άρα ισχύει πως $\forall C \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow C \in \mathcal{P}(B)$ αποδεικνύοντας πως $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Άσκηση 19

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$.
- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A \times B = B \times A$

Άσκηση 20

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$

Ψευδής. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, c\}, C = \emptyset, D = \{a\}$.

Τότε, $(A - B) = \{b\}, (C - D) = \emptyset$, $(A - C) = \{a, b, c\}, (B - D) = \{c\}$.

Συνεπώς $(A - B) - (C - D) = \{b\}$ και $(A - C) - (B - D) = \{a, b\}$

Άσκηση 20

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

\- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Αληθής. $A \subseteq B$ ανν $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

Η αντιθετοαντίστροφη ισοδύναμη πρόταση είναι $\forall x(\neg(x \in B) \rightarrow \neg(x \in A)) \equiv$

$\forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)$. Συνεπώς $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

-$A \times B = B \times A$

Ψευδής. Τα στοιχεία των καρτεσιανών γινομένων είναι διατεταγμένα ζεύγη. Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ και $\alpha \neq \beta$ τότε $(\alpha, \beta) \in A \times B$ αλλά $(\alpha, \beta) \notin B \times A$

Άσκηση 21

Η ομοιότητα Jaccard $J(A, B)$ των πεπερασμένων συνόλων A και B είναι $J(A, B) = |A \cap B|/|A \cup B|$, όπου $J(\emptyset, \emptyset) = 1$. Να βρείτε την ομοιότητα Jaccard για τα παρακάτω ζεύγη συνόλων.

i. $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$
ii. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$
iii. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
iv. $A = \{1\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Να αποδείξετε ότι οι ιδιότητες a έως d ισχύουν, όταν τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα.

a. $J(A, A) = 1$
b. $J(A, B) = J(B, A)$
c. $J(A, B) = 1$ ανν $A = B$
d. $0 \leq J(A, B) \leq 1$

Άσκηση 21

i) 0, ii) 1/3, iii) 1, iv) 1/6

a. $J(A, A) = |A \cap A| / |A \cup A| = |A|/|A| = 1$
b. $J(A, B) = |A \cap B| / |A \cup B| = |B \cap A| / |B \cup A| = J(B, A)$ (αντιμεταθετικός νόμος)
c. Αν $J(A, B) = 1$ τότε $|A \cap B| / |A \cup B| = 1$ και επομένως $|A \cap B| = |A \cup B|$. Όταν $x \in A$ και $x \notin B$ τότε $x \in (A \cup B)$ και $x \notin (A \cap B)$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση καθώς η τομή των δύο συνόλων θα περιέχει σε αυτή την περίπτωση λιγότερα στοιχεία από την ένωση (εφόσον η ένωση περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία της τομής). Αντίστοιχα όταν $x \notin A$ και $x \in B$. Συνεπώς, $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ και $A = B$. Αν $A = B$ τότε $J(A, B) = 1$ (βλ. a.)
d. Ισχύει ότι $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$. Συνεπώς, $|A \cap B| \leq |A \cup B|$. Διαιρώντας με την ένωση $J(A, B) \leq 1$. Η πληθικότητα ενός συνόλου είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0 και συνεπώς $J(A, B) \geq 0$. Στην περίπτωση που $A = B = \emptyset$, $J(A, B) = 1$

Άσκηση 22

Να βρείτε τα $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ και $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ για κάθε θετικό ακέραιο i:

1. $A_i = \{i, i+1, i+2, ...\}$
2. $A_i = \{0, i\}$
3. $A_i = (0, i)$
4. $A_i = (i, \infty)$

Άσκηση 22

1. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ είναι $A_i \subseteq A_1$ και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \mathbb{Z}^+$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \cap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, ...\} = \{n, n+1, n+2, ...\} = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

2. **Ένωση**: $\cup_{i=1}^{n} A_i = \{0,1\} \cup \{0,2\} \cup ... \cup \{0,n\} = \{0,1,2,3,...,n\}$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \{0,1\} \cap \{0,2\} \cap ... \cap \{0,n\} = \{0\}$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$

3. **Ένωση**: Προφανώς $A_i \subset A_n$ εφόσον $A_i = (0, i)$. Συνεπώς, $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_n = A_n$. Επίσης, $A_n \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, \infty)$

Τομή: Προφανώς $A_1 \subset A_i$ και επομένως $\cap_{i=1}^{n} A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Βάσει του νόμου αυτοδυναμίας $A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Από τον ορισμό της τομής $\cap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_1$. Προκύπτει $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (0, 1)$

Άσκηση 22

4. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ προκύπτει $A_i \subseteq A_1$ (καθώς $(i, \infty) \subseteq (1, \infty)$) και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (1, \infty)$

Τομή: Προφανώς $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Εφόσον $A_n = (n, \infty)$ $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Συναρτήσεις - Πληθικότητα Συνόλων - Ακολουθίες

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

γ. Έχει η f και η g αντίστροφη? Αν ναι να βρεθεί αυτή.

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

α. Η f είναι ένα-προς-ένα (Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$), ενώ η g όχι ($g(a) = g(d)$).

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

β. Η f είναι επί (κάθε στοιχείο του B αποτελεί εικόνα ενός στοιχείου του A), ενώ η g όχι ($\nexists x \in B : g(x) = 4$).

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

γ. Έχει η f και η g αντίστροφη? Αν ναι να βρεθεί αυτή.

γ. Η f έχει αντίστροφη ως ένα-προς-ένα και επί. Αυτή είναι η $f^{-1} : B \to A$ με τιμές $f^{-1}(a) = 3, f^{-1}(b) = 4, f^{-1}(c) = 2, f^{-1}(d) = 1$. Η g δεν έχει αντίστροφη αφού δεν είναι ούτε ένα-προς-ένα ούτε επί.

Ασκηση 2

Σωστό ή Λάθος;

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

- Αν η f και η $f \circ g$ είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.

- Αν η f και η $f \circ g$ είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Ασκηση 2

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Λάθος, διότι δεν γνωρίζουμε αν είναι επί.

- Αν η f και η f∘g είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.

Σωστό Άμεση απόδειξη: Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$. Ας υποθέσουμε $g(a) = g(b)$. Ως εκ τούτου $f(g(a)) = f(g(b))$. Από τον ορισμό της σύνθεσης των συναρτήσεων προκύπτει $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$. Επειδή η $f \circ g$ είναι 1-1, προκύπτει $a = b$. Άρα και η g είναι 1-1.

Ασκηση 2

- Αν η f και η f∘g είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Λάθος. Απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$ και $A = \{0\}, B = \{0, 1\}, C = \{0\}$. Επίσης $g(0) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$. Η f είναι επί γιατί για κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών $y \in C$ (που είναι μοναδικό, y=0) υπάρχει $x \in B$ ώστε $f(x) = y$. Επίσης η $f \circ g$ είναι επί διότι για κάθε στοιχείο $y \in C$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $(f \circ g)(x) = y$. Πράγματι, $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$. Ωστόσο, η g δεν είναι επί γιατί δεν υπάρχει $a \in A$ ώστε $g(a) = 1$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- Έστω n άρτιος. Τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k$. Προφανώς $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k$. Άρα το άθροισμα αυτών των 2 ισούται με το n.

- Αν n περιττός, τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k + 1$. Δηλαδή, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = k$ και $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k + 1$, δίνοντας πάλι την ισότητα στο άθροισμα.

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:

-$\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

-$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0, 1)$

Αν $\varepsilon = \delta = 0$, τότε και οι δύο πλευρές είναι ίσες με $n + m$.

Αν $\varepsilon = 0, \delta > 0$, τότε η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ και η δεξιά $n + m$.

Αν $\varepsilon > 0$, τότε η δεξιά πλευρά είναι $n + m + 1$. Η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ ανν $\varepsilon + \delta \leq 1$ διαφορετικά $\lceil x + y \rceil = n + m + 2$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν αμφότεροι οι x και y είναι ακέραιοι ή όταν ο x δεν είναι ακέραιος και το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο με 1.

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Προφανώς ισχύει αν είτε ο x είτε ο y είναι ακέραιος. (Βλ. ταυτότητα 4a, Ενότητα 2.3)

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0, 1)$

Δεδομένου ότι $x + y = m + n + \varepsilon + \delta$, η ισότητα ισχύει όταν $\varepsilon + \delta < 1$. Διαφορετικά, Αν $\varepsilon + \delta \geq 1$, τότε $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν τουλάχιστον ένας εκ των x και y είναι ακέραιος ή αν το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο από 1.

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$
3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτηση για την οποία το υποσύνολο του ερωτήματος 2 είναι γνήσιο
4. Να δείξετε ότι αν η f είναι 1-1, η σχέση του ερωτήματος 2 είναι ισότητα

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

Έστω $y \in f(S \cup T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cup T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της ένωσης ισχύει $x \in S$ ή $x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S)$ ή $f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S)$ ή $y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cup f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$ (1)

Έστω $y \in f(S) \cup f(T)$. Τότε $y \in f(S)$ ή $y \in f(T)$. Επομένως, υπάρχει $x \in S$ ή $x \in T$ ώστε $f(x) = y$. Από το ορισμό της ένωσης προκύπτει $x \in S \cup T$ και $y = f(x) \in f(S \cup T)$. Συνεπώς, $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει $f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Έστω $y \in f(S \cap T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cap T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της τομής ισχύει $x \in S$ και $x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S)$ και $f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S)$ και $y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cap f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτηση για την οποία το υποσύνολο του ερωτήματος 2 είναι γνήσιο

Έστω $f : A \to B$ και $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$. Έστω ότι
$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2$. $S = \{1, 2\}, T = \{1, 3\}, S \cap T = \{1\}$
$f(S \cap T) = \{1\}, f(S) = \{1, 2\}, f(T) = \{1, 2\}$

Συνεπώς $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

4. Να δείξετε ότι αν η f είναι 1-1, η σχέση του ερωτήματος 2 είναι ισότητα

Στο ερώτημα 2 δίνεται το πρώτο σκέλος της απόδειξης. Στο δεύτερο σκέλος θα δειχτεί ότι $f(S) \cap f(T) \subseteq f(S \cap T)$ αν η f είναι 1-1.

Έστω $y \in f(S) \cap f(T)$. Από τον ορισμό της τομής προκύπτει $y \in f(S)$ και $y \in f(T)$. Συνεπώς υπάρχει ένα $x \in S$ και ένα $z \in T$ ώστε $f(x) = y$ και $f(z) = y$. Επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει $x = z$. Συνεπώς, $x \in S$ και $x \in T$ και $x \in S \cap T$. Άρα $y = f(x) \in f(S \cap T)$. Το ζητούμενο αποδείχτηκε $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$