Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

Λογική: Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Άσκηση 10

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1. $\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$
2. $\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$
3. $\exists x \forall y \,(xy = 0)$
4. $\exists x \exists y \,(x + y \neq y + x)$
5. $\forall x \,(x \neq 0 \rightarrow \exists y \,(xy = 1))$
6. $\exists x \forall y \,(y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$
7. $\forall x \exists y \,(x + y = 0)$
8. $\exists x \exists y \,(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$
9. $\forall x \exists y \,(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$
10. $\forall x \forall y \exists z \,(z = (x + y)/2)$

Άσκηση 10

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1.$\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$	T, για οποιοδήποτε c στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $y = c^2$, οπότε βάσει καθολικής γενίκευσης
2.$\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$	F, $y^2 \geq 0$ άρα για $x < 0$ δεν ισχύει
3.$\exists x \forall y \,(xy = 0)$	T, εφόσον αν $x = 0$, $xy = 0$ για κάθε y
4.$\exists x \exists y \,(x + y \neq y + x)$	F, εφόσον ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος
5.$\forall x \,(x \neq 0 \rightarrow \exists y \,(xy = 1))$	T, εφόσον αν $x \neq 0, y = 1/x$
6.$\exists x \forall y \,(y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$	F, καθώς για οποιοδήποτε $x = c$ αν $y \neq 1/c, xy \neq 1$
7.$\forall x \exists y \,(x + y = 0)$	T, εφόσον $\forall x, y = -x$
8.$\exists x \exists y \,(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$	F, Το σύστημα είναι αδύνατο
9.$\forall x \exists y \,(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$	F, Μοναδική λύση $x = 1, y = 1$
10.$\forall x \forall y \exists z \,(z = (x + y)/2)$	T , προφανώς

Άσκηση 11

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ το κατηγόρημα «Ο x είναι κοντύτερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Άσκηση 11

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ το κατηγόρημα «ο x είναι κοντύτερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Από την υπόθεση $\exists s S(s, Max)$ δεν προκύπτει το συμπέρασμα $S(Max, Max)$

Άσκηση 12

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x\exists y\forall z T(x,y,z)$
2. $\neg(\exists x\exists y P(x,y) \wedge \forall x\forall y Q(x,y))$
3. $\neg\exists x\exists y(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$
4. $\neg\forall y\exists x\exists z(T(x,y,z) \vee Q(x,y))$

Άσκηση 12

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x\exists y\forall z T(x,y,z)$
2. $\neg(\exists x\exists y P(x,y) \wedge \forall x\forall y Q(x,y))$
3. $\neg\exists x\exists y(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$
4. $\neg\forall y\exists x\exists z(T(x,y,z) \vee Q(x,y))$

Η πρόταση 1 είναι λογικά ισοδύναμη με
$\exists x\neg\exists y\forall T(x,y,z) \equiv \exists x\forall y\neg\forall z T(x,y,z) \equiv \exists x\forall y\exists z\neg T(x,y,z)$

Η πρόταση 2 είναι λογικά ισοδύναμη με $\neg\exists x\exists y P(x,y) \vee \neg\forall x\forall y Q(x,y) \equiv$
$\forall x\neg\exists y P(x,y) \vee \exists x\neg\forall y Q(x,y) \equiv \forall x\forall y\neg P(x,y) \vee \exists x\exists y\neg Q(x,y)$

Η πρόταση $\neg(p \leftrightarrow q)$ είναι αληθής όταν η p και η q έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας. Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $\neg p \leftrightarrow q$
Συνεπώς η πρόταση 3, $\forall x\forall y\neg(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)) \equiv$
$\forall x\forall y(\neg Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$

Η πρόταση 4 είναι λογικά ισοδύναμη με $\exists y\forall x\forall z\neg(T(x,y,z) \vee Q(x,y)) \equiv$
$\exists y\forall x\forall z(\neg T(x,y,z) \wedge \neg Q(x,y))$

Άσκηση 13

Έστω $P(x)$ το κατηγόρημα «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ το κατηγόρημα «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό.

β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής.

γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό.

δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό.

ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.

Άσκηση 13

Έστω $P(x)$ το κατηγόρημα «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ το κατηγόρημα «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό. $\exists x P(x)$

β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$

γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό. $\forall y Q(y)$

δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό. $\forall x P(x)$

ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.
$\exists y \neg Q(y)$

Άσκηση 14

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Άσκηση 14

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Οποιοδήποτε πεδίο έχει δύο ακριβώς στοιχεία a και b, αν $x \neq y$ για κάθε x και για κάθε y, τότε είτε $x = a$ και $y = b$ είτε $x = b$ και $y = a$. Άρα για κάθε z εκ των a, b $(z = x) \vee (z = y)$.

Έστω πεδίο με τρία τουλάχιστον διαφορετικά στοιχεία a, b, c. Αν $x = a$ και $y = b$ τότε υπάρχει $z = c$ για το οποίο δεν είναι αληθής η πρόταση $(z = x) \vee (z = y)$.

Άσκηση 15

Έστω $P(m,n)$ το κατηγόρημα «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4,5)$	**δ)** $\exists m \forall n P(m,n)$
β) $P(2,4)$	**ε)** $\exists n \forall m P(m,n)$
γ) $\forall m \forall n P(m,n)$	**στ)** $\forall n P(1,n)$

Άσκηση 15

Έστω $P(m, n)$ το κατηγόρημα «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4, 5)$

β) $P(2, 4)$

γ) $\forall m \forall n P(m, n)$

δ) $\exists m \forall n P(m, n)$

ε) $\exists n \forall m P(m, n)$

στ) $\forall n P(1, n)$

α. Ψευδής

β. Αληθής

γ. Ψευδής, π.χ. αντιπαράδειγμα α.

δ. Αληθής, m = 1.

ε. Ψευδής, για κάθε n στο πεδίο αν επιλέξω $m = n + 1$ δεν τον διαιρεί. Άρα είναι αληθής η άρνηση της πρότασης $\forall n \exists m \neg P(m, n)$.

στ. Αληθής

Άσκηση 16

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y\,(P(x) \lor Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Άσκηση 16

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Για να αποδειχτεί η λογική ισοδυναμία πρέπει να αποδειχτεί ότι η πρόταση $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ είναι ταυτολογία.

1. Αν $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x P(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x Q(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.

2. Αν $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής.
Αν $\forall x P(x)$ αληθής, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής. Διαφορετικά $\exists x0$ έτσι ώστε $P(x0)$ ψευδής. Τότε όμως $\forall y\, (P(x0) \vee Q(y))$ αληθής και άρα $\forall y Q(y)$ αληθής. Συνεπώς, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής.