

Ανάλυση 2: Θέματα Εξετάσεων 29/2/2024

Μέρος Α: Θέματα πολλαπλών επιλογών. Επιλέξτε την σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις. Σωστή απάντηση = 10 βαθμοί, Λάθος απάντηση = -2,5 βαθμοί, Κενή απάντηση = 0 βαθμοί.

Θέμα Α1: Η εξίσωση του εφαπτομενικού επιπέδου στο γράφημα της συνάρτησης $z = x^3 + 3xy - 3x - 3y$ που διέρχεται από το σημείο $(x, y, z) = (1, 1, -2)$ είναι:

A: $3x - z = 5$, B: $3x - y - z = 5$, Γ: $-3x - y = 1$, Δ: $x + y + z = 1$, E: διαφορετική από όλες τις προηγούμενες εξισώσεις.

Θέμα Α2: Το όριο: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

A: είναι ίσο με 0, B: είναι ίσο με 1, Γ: είναι ίσο με 2, Δ: ορίζεται, αλλά δεν είναι ίσο με καμία από τις προηγούμενες τιμές, E: δεν υπάρχει.

Θέμα Α3: Το όριο: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

A: είναι ίσο με 0, B: είναι ίσο με 1, Γ: είναι ίσο με 2, Δ: ορίζεται, αλλά δεν είναι ίσο με καμία από τις προηγούμενες τιμές, E: δεν υπάρχει.

Θέμα Α4: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 3xy - 3x - 3y$.

A: Η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο το οποίο είναι τοπικό ελάχιστο, B: Η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο το οποίο είναι τοπικό μέγιστο, Γ: Η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο το οποίο είναι σαγματικό, Δ: Η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο, E: Δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

Θέμα Α5: Το διπλό ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sin((1-y)^2) dy dx$,

A: είναι ίσο με $\frac{1}{2}(1 - \cos(1))$, B: είναι ίσο με $\frac{1}{2}(1 + \cos(1))$, Γ: είναι ίσο με $\frac{1}{2}(1 - \sin(1))$, Δ: είναι ίσο με $\frac{1}{2}(1 + \sin(1))$, E: δεν είναι ίσο με καμία από τις προηγούμενες τιμές.

Θέμα Α6: Έστω S η θετικά προσανατολισμένη επιφάνεια μοναδιαίου κύβου στον \mathbb{R}^3 που ορίζεται από την τομή των επιπέδων $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ και $z = 1$. Έστω \mathbf{F} το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Το ολοκλήρωμα $\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

A: είναι ίσο με 0, B: είναι ίσο με 1, Γ: είναι ίσο με 2, Δ: είναι ίσο με -2, E: δεν είναι ίσο με καμία από τις προηγούμενες τιμές.

Μέρος Β: Δώστε πλήρεις απαντήσεις στα τρία παρακάτω θέματα.

Θέμα Β1: Υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ η δείξτε ότι δεν υπάρχει. [10 βαθμοί]

Θέμα Β2: Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης στο επίπεδο (x, y) και υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

[10 βαθμοί]

Θέμα Β3: Έστω $\mathbf{F}(x, y)$ το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^2)\mathbf{i} + (x^2 + 2xy)\mathbf{j}$. (α) Υπολογίστε (με άμεσο τρόπο) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ όπου C η (κλειστή) διαδρομή που ορίζεται από την περίμετρο του τριγώνου $OABO$ με κορυφές τα σημεία $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ και $B(1, 1)$ και έχει θετικό προσανατολισμό. (β) Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας στο (α) δείχνοντας ότι το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρητικό. Υπόδειξη: Κατασκευάστε βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$ η εφαρμόστε το Θεώρημα Green (η Stokes). [20 βαθμοί]

Καλή επιτυχία!