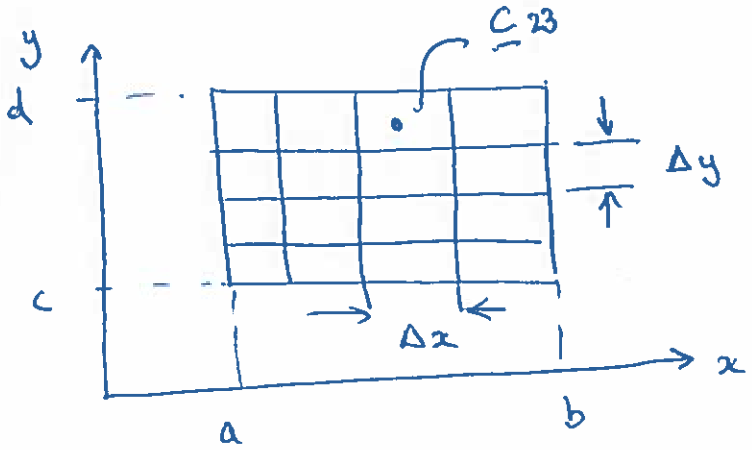
Διπλά Ολοκληρώματα

Έστω $f: R \to \mathbb{R}$, $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ (ορθογώνιο), f φραγμένη. Ορίζουμε μια κανονική διαμέριση του R:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d, \quad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n} = \Delta y$$

όπου $j = \cancel{0,1}\ 0,1,2,\ldots n-1$ και $k = 0,1,\ldots,n-1$.



Έστω $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ και $\underline{c}_{jk} \in R_{jk}$

Ορίζουμε:

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\underline{c}_{jk}) \underbrace{\Delta x \, \Delta y}_{\Delta A}, \quad \Delta A \text{ εμβαδόν } R_{jk}$$

Αν η ακολουθία $S_n \to S$ καθώς $n \to \infty$ γιά <u>κάθε</u> επιλογή των $\underline{c}_{jk} \in R_{jk}$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) και γράφουμε:

$$S = \iint_R f(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

Θεώρημα: Αν η f είναι συνεχής στο (κλειστό) ορθογώνιο $R = [a,b] \times [c,d]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Γεωμετρική ερμηνεία: Έστω $f \geq 0$, $(x,y) \in R$. Τότε $(x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in R$, είναι το γράφημα της f που αντιστοιχεί σε επιφάνεια πάνω από το επίπεδο (x,y). Έστω

$\tilde{c}_{jk} \in \operatorname{argmax} \{ f(x,y) : (x,y) \in R_{jk} \}$, $M_{jk} = f(\tilde{c}_{jk})$

$\hat{c}_{jk} \in \operatorname{argmin} \{ f(x,y) : (x,y) \in R_{jk} \}$, $m_{jk} = f(\hat{c}_{jk})$.

(η μέγιστη και ελάχιστη τιμή υπάρχουν γιατί R_{jk} συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δηλ. κλειστό και φραγμένο). Αν $c_{jk} \in R_{jk}$ (αυθαίρετο), τότε

$$L_n := \sum_{j,k=0}^{n-1} m_{jk} \Delta x \Delta y \leq \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y \leq \sum_{j,k=0}^{n-1} M_{jk} \Delta x \Delta y := U_n$$

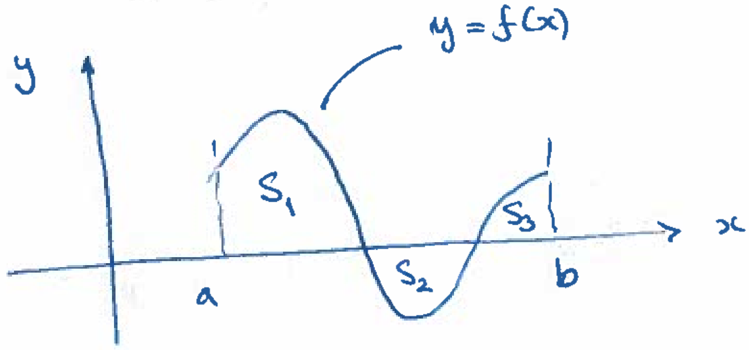
Γεωμετρικά, L είναι ο όγκος εγγεγραμμένου στερεού και U ο όγκος περιγεγραμμένου στερεού (στο στερεό που ορίζεται ως: $\{ (x,y,z) : (x,y) \in R,\ 0 \leq z \leq f(x,y) \}$) (*)

Αν το όριο: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ υπάρχει ανεξάρτητα από την επιλογή των $c_{jk} \in R_{jk}$, τότε τα αντίστοιχα όρια $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ και $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ υπάρχουν, είναι ίσα και:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y = \lim_{n\to\infty} U_n = \iint_R f(x,y)\, dA$$

αντιστοιχεί στον όγκο του στερεού (*).

<u>Παρατήρηση</u>: Η υπόθεση $f \geq 0$, $(x,y) \in R$, δεν είναι απαραίτητη. Στη γενική περίπτωση το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στον "προσημασμένο" όγκο του στερεού, παρόμοια με την περίπτωση ολοκληρώματος μιας μεταβλητής, π.χ.



$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3 \quad , \text{κλπ.}$$

<u>Ιδιότητες</u>: Αν f, g ολοκληρώσιμες σε ορθογώνιο R και $c \in \mathbb{R}$, τότε $f+g$ και cf ολοκληρώσιμες επί το R και ισχύουν:

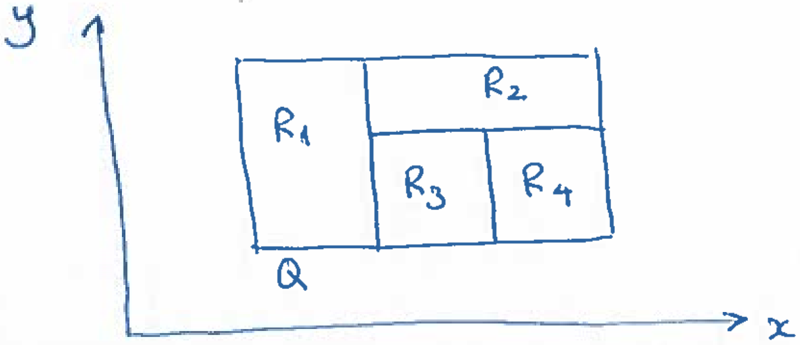
(1) Γραμμικότητα: $\iint_R (f+g)\,dA = \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA$

(2) Ομογένεια: $\iint_R cf\,dA = c\iint_R f\,dA$

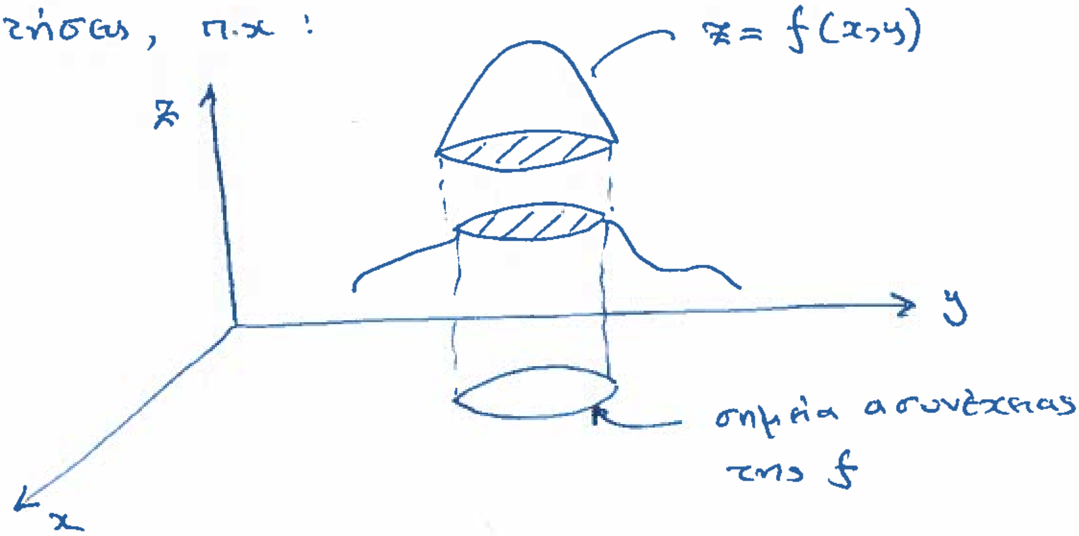
(3) Μονοτονία: Αν $f(x,y) \geq g(x,y)$, $(x,y) \in R$, τότε

$$\iint_R f\,dA \geq \iint_R g\,dA$$

(4) Προσθετικότητα: Αν $\{R_i\}_{i=1}^m$ ορθογώνια, $R_i \cap R_j = \emptyset$ γιά $i \neq j$, η f φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε όλα τα R_i και $Q = \bigcup_{i=1}^m R_i$ ορθογώνιο, τότε $f : Q \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο Q και $\iint_Q f\,dA = \sum_{i=1}^m \iint_{R_i} f\,dA$.

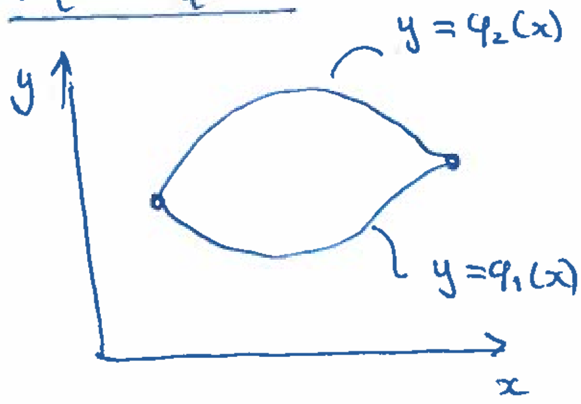


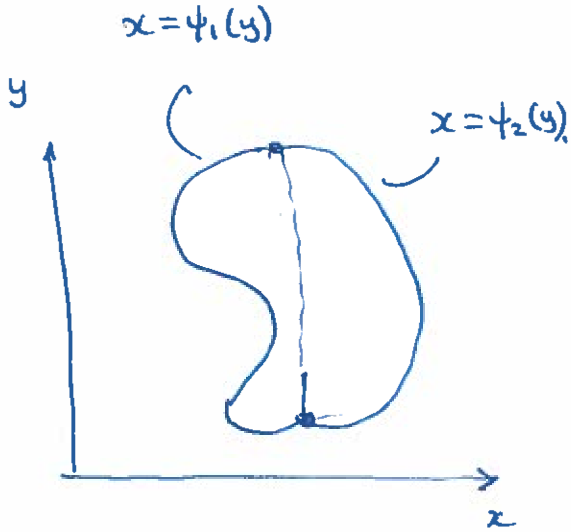
Το Θεώρημα γενικεύεται γιά κάποιες ασυνεχείς συναρτήσεις, π.χ.:



<u>Θεώρημα</u>: Αν $f: R \to \mathbb{R}$ φραγμένη μέ πεδίο ορισμού $R = [a,b] \times [c,d]$ καί τό σύνολο των σημείων στά οποία η f είναι ασυνεχής βρίσκεται πάνω σέ πεπερασμένη (*) ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

* <u>Παραδείγματα</u>





Θεώρημα Fubini : Αν $f: R \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $R=[a,b]\times[c,d]$

τότε :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \quad \left(:= \int_a^b F(x)\,dx\right)$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \quad \left(:= \int_c^d \hat{F}(y)\,dy\right)$$

Επέκταση Θεωρήματος Fubini

Έστω $f: R \to \mathbb{R}$ φραγμένη στό $R=[a,b]\times[c,d]$ και έστω όλα τα σημεία ασυνέχειας της f βρίσκονται πάνω σέ πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων. Αν το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ υπάρχει $\forall x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

υπάρχει και είναι ίσο μέ το $\iint_R f\,dA$. Αντίστοιχα, αν $\int_a^b f(x,y)\,dx$ υπάρχει $\forall y \in [c,d]$, τότε τό

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

υπάρχει και είναι ίσο μέ $\iint_R f\,dA$.

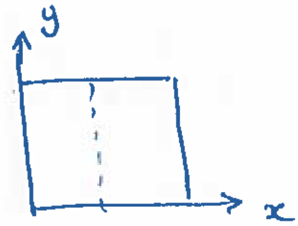
Επομένως, αν ισχύουν όλα τα παραπάνω, τότε :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f\,dA.$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε το $\iint_R (x^2+y)\,dA$, όπου $R=[0,1]\times[0,1]$.

<u>Λύση</u>: Από το Θεώρημα Fubini

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (x^2+y)\,dy\,dx$$



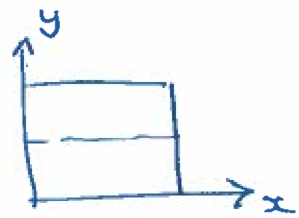
$$= \int_{x=0}^{1} \left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(x^2+\frac{1}{2}\right)-(0+0)\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(x^2+\frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Επαλήθευση:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} (x^2+y)\,dx\,dy$$



$$= \int_{y=0}^{1} \left[\frac{x^3}{3}+yx\right]_{x=0}^{1} dy$$

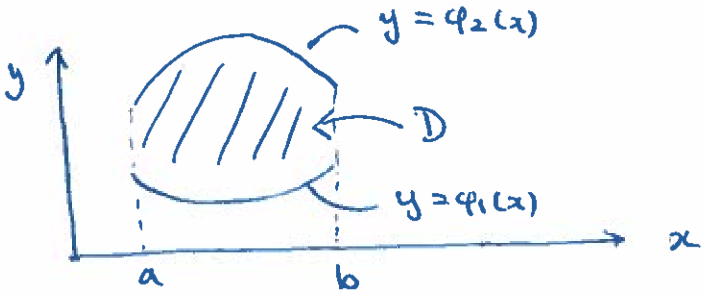
$$= \int_{y=0}^{1} \left(\frac{1}{3}+y\right) dy. = \left[\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

<u>Διπλό ολοκλήρωμα σε γενικότερα χωρία.</u>

- Έστω $\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $\varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και έστω ότι $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Καλούμε το χωρίο:

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

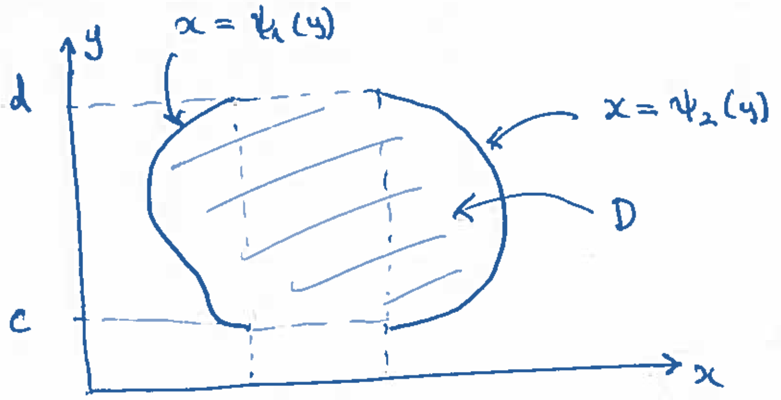
ως "D-y-απλό".



• Παρόμοια, αν $\psi_1 : [c,d] \to \mathbb{R}$ και $\psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ $\forall y \in [c,d]$, καλούμε το χωρίο:

$$D = \{ (x,y) : y \in [c,d] , \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

ως "D x-απλό".



<u>Ορισμός</u>: Αν D στοιχειώδες χωρίο (δηλ. x-απλό ή y-απλό) στο επίπεδο, επιλέγουμε ορθογώνιο $R \supseteq D$. Δοσμένης $f : D \to \mathbb{R}$, f συνεχής, (και άρα φραγμένη), ορίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)\, dA$ ως εξής:

Επεκτείνουμε την συνάρτηση f στην συνάρτηση $f^* : R \to \mathbb{R}$:

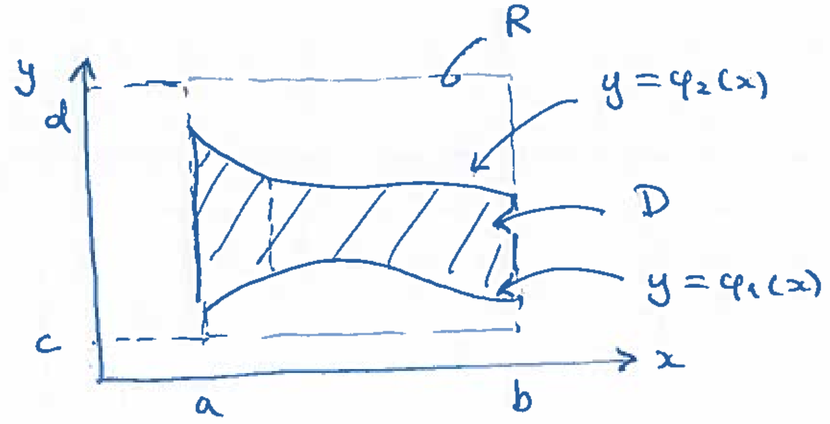
$$f^*(x,y) = f(x,y) \quad \text{αν} \quad (x,y) \in D$$
$$= 0 \quad \text{αν} \quad (x,y) \in R \setminus D$$

Παρατηρούμε ότι η f^* είναι φραγμένη στο R και συνεχής παντού, εκτός (πιθανώς) από το σύνορο του D, ∂D, που είναι ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων. Άρα η f^* είναι ολοκληρώσιμη στο R από προηγούμενο Θεώρημα και μπορούμε να ορίσουμε:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R f^*(x,y)\, dA$$

Παρατήρηση:

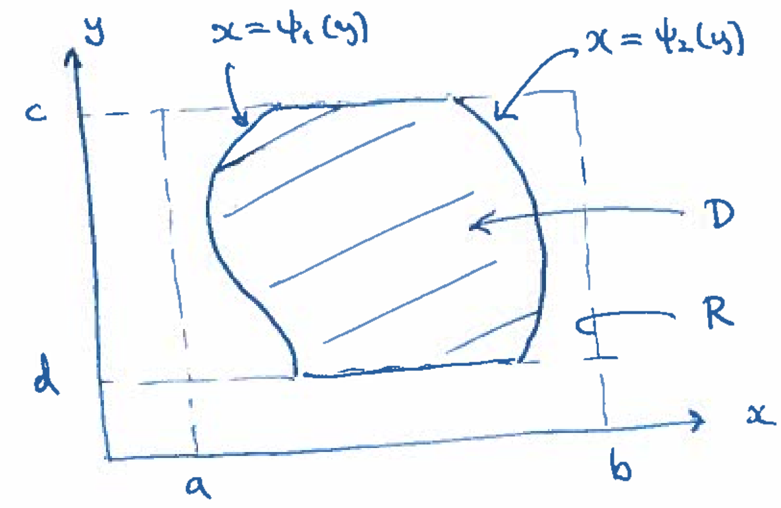
- Αν το D είναι y-απλό χωρίο όπως στο παρακάτω σχήμα:



Τότε:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx.$$

- Αν το D είναι x-απλό χωρίο όπως στο παρακάτω σχήμα:



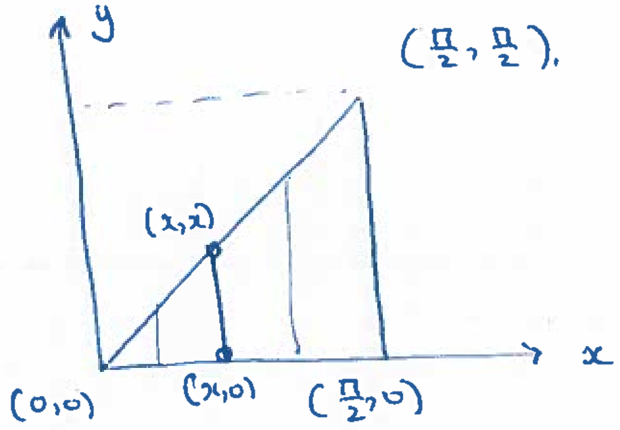
Τότε:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_{y=c}^{d} \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \iint_T (x^3 y + \cos x)\, dA$ όπου T το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$ και $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Λύση: Γράφουμε

$$I=\int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{x}(x^3y+\cos x)\,dy\,dx$$



Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα το x είναι σταθεροποιημένο.

Επομένως:

$$I=\int_{x=0}^{\pi/2}\left[\frac{x^3y^2}{2}+y\cos x\right]_{y=0}^{x}dx=\int_{x=0}^{\pi/2}\left[\left(\frac{x^5}{2}+x\cos x\right)-0\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx=\frac{\pi^6}{2^6\cdot 12}+\underbrace{\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx}_{I_1}$$

$$I_1=\int x\cos x\,dx=\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{d(\sin x)}_{dv}=x\sin x-\int \sin x\,dx$$

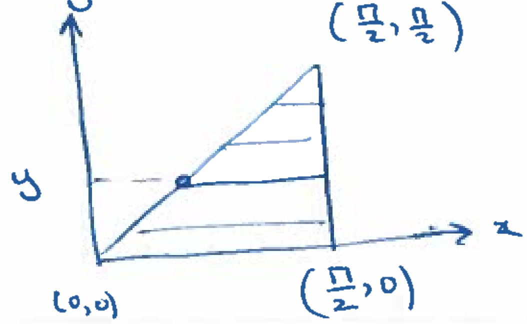
$$=x\sin x+\cos x\quad\Rightarrow\quad [I_1]_0^{\pi/2}=[x\sin x+\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1+0\right)-(0+1)=\frac{\pi}{2}-1$$

και $$I=\frac{\pi^6}{768}+\frac{\pi}{2}-1$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε:

$$I=\int_{y=0}^{\pi/2}\int_{x=y}^{\pi/2}(x^3y+\cos x)\,dx\,dy$$



όπου το y είναι σταθεροποιημένο στο εσωτερικό ολοκλήρωμα. Άρα

$$I=\int_{y=0}^{\pi/2}\left[\frac{x^4y}{4}+\sin x\right]_{x=y}^{\pi/2}dy=\int_{y=0}^{\pi/2}\left(\left(\frac{\pi^4}{2^4\cdot 4}y+1\right)-\left(\frac{y^5}{4}+\sin y\right)\right)\cdots$$

$$= \int_{y=0}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^4}{2^6} y + 1 - \frac{y^5}{4} - \sin y \right) dy =$$

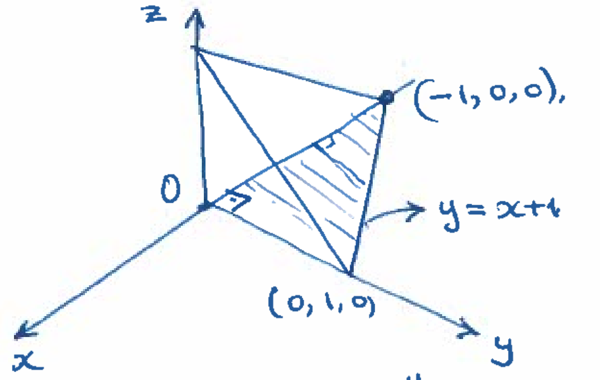
$$= \left[\frac{\pi^4}{2^6} \frac{y^2}{2} + y - \frac{y^6}{6 \cdot 4} + \cos y \right]_{y=0}^{\pi/2} =$$

$$= \left(\frac{\pi^4}{2^6} \frac{\pi^2}{2^3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 6 \cdot 4} + \cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}} \right) - (0+1).$$

$$= \frac{\pi^6}{2^9} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^6}{3 \cdot 2^9} - 1 = \frac{\cancel{2}\pi^6}{3 \cdot 2^{\cancel{9}8}} + \frac{\pi}{2} - 1 =$$

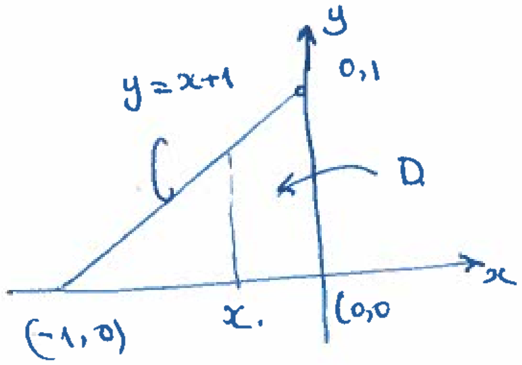
$$= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$$ (όπως προηγουμένως)

Παράδειγμα: Βρείτε τον όγκο του τετραέδρου που φράσσεται από τα επίπεδα $y=0$, $z=0$, $x=0$ και $y-x+z=1$.



Λύση: Έστω D η "βάση" του τετραέδρου στο επίπεδο xy, δηλ. $D = \{(x,y) : -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x+1\}$

Για κάθε $(x,y) \in D$, το ύψος της επιφάνειας z πάνω από το (x,y) είναι $z = 1 - y + x$



Άρα:

$$\text{Όγκος} = \iint_D (1 - y + x)\, dA$$

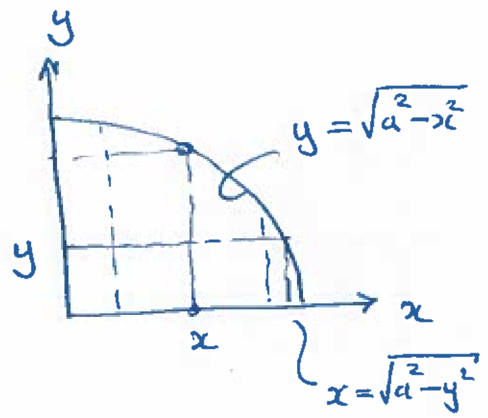
$$= \int_{x=-1}^{0} \int_{y=0}^{x+1} (1 - y + x)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=-1}^{0} \left[y - \frac{y^2}{2} + xy \right]_{y=0}^{x+1} dx = \int_{x=-1}^{0} \left[x+1 - \frac{(x+1)^2}{2} + x(x+1) \right] dx$$

$$= \int_{x=-1}^{0} \Big[\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{2} \Big] dx = \int_{x=-1}^{0} \frac{(x+1)^2}{2} dx = \left[\frac{(x+1)^3}{6} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Αλλάζοντας σειρά ολοκλήρωσης υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dy\,dx$$



$$I=\int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_{y=0}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\int_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}dx\,dy=\int_{y=0}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,\big[x\big]_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}dy$$

$$=\int_{y=0}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\cdot\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\int_{y=0}^{a}(a^2-y^2)\,dy=$$

$$=\left[a^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{a}=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{2a^3}{3}$$

<u>Τριπλό Ολοκλήρωμα</u>:

Έστω $f: B\to\mathbb{R}$, $B=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]\subseteq\mathbb{R}^3$, φραγμένη

Διαμερίζοντας τις πλευρές του B σε n ίσα μέρη, ορίζουμε

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}f(\underline{c}_{ijk})\,\Delta V$$

όπου $\Delta V=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, $\Delta y=\frac{d-c}{n}$, $\Delta z=\frac{q-p}{n}$

και $\underline{c}_{ijk}\in B_{ijk}:=[a+i\,\Delta x,\,a+(i+1)\Delta x]\times[c+j\,\Delta y,\,c+(j+1)\Delta y]$
$\times[p+k\,\Delta z,\,p+(k+1)\Delta z]$

Αν $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ υπάρχει και είναι ανεξάρτητο των $\underline{c}_{ijk}$,

τότε η f είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) και ορίζουμε το (τριπλό) ολοκλήρωμα

$$S = \iiint_B f(x,y,z)\, dV = \iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Θεώρημα: Αν f συνεχής στο $B=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση: Οι ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων επεκτείνονται στα τριπλά ολοκληρώματα.

Αν η $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη στο B, τότε κάθε διαδοχικό ολοκλήρωμα που υπάρχει ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα, δηλ.

$$\iiint_B f\, dx\, dy\, dz = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz$$

$$= \dots \quad (\text{κλπ}).$$

(6 συνολικά διατάξεις).

Παράδειγμα: Ολοκληρώστε την συνάρτηση e^{x+y+z} στο $B=[0,1]^3=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Λύση: Ολοκληρώνοντας με την συνήθη σειρά:

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left[e^{x+y+z}\right]_{x=0}^{1} dy\, dz = \int_0^1\int_0^1 \left(e^{1+y+z} - e^{y+z}\right) dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left[e^{1+y+z} - e^{y+z}\right]_{y=0}^{1} dz =$$

$$= \int_0^1 \left[(e^{2+z} - e^{1+z}) - (e^{1+z} - e^{z}) \right] dz$$

$$= \int_0^1 (e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z}) \, dz$$

$$= \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z} \right]_0^1$$

$$= (e^3 - 2e^2 + e) - (e^2 - 2e + 1) = e^3 - 3e^2 + 3e - 1$$

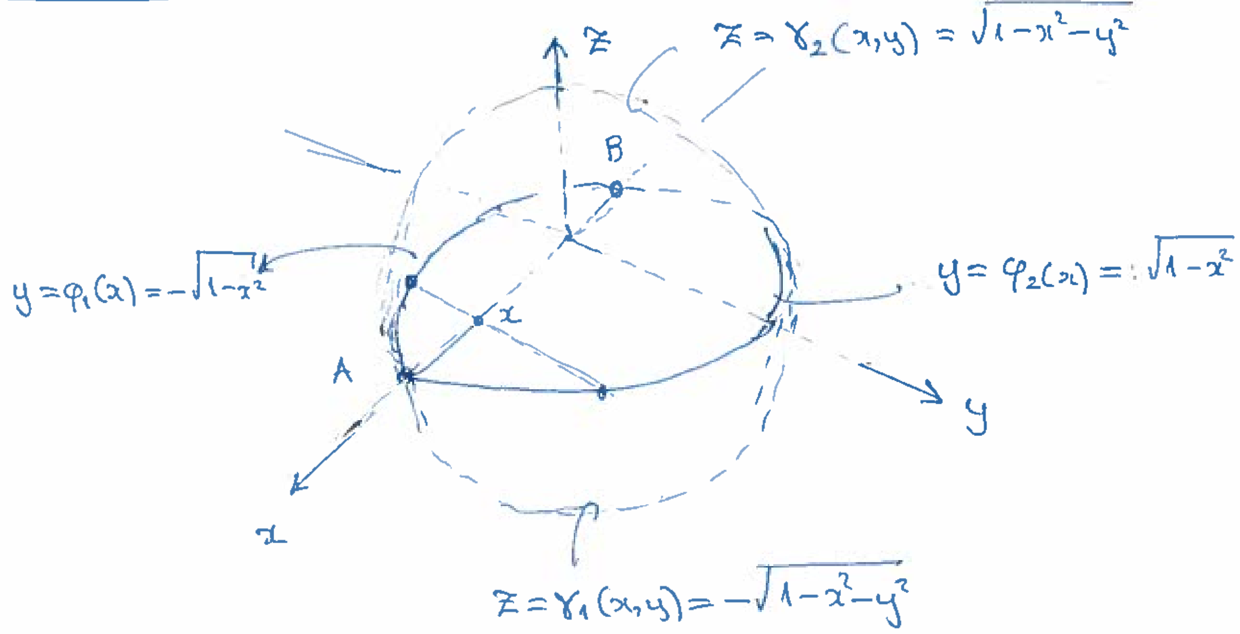
$$= (e-1)^3$$

<u>Στοιχειώδες χωρίο στον $\mathbb{R}^3$</u>: Χωρίο μιας μεταβλητή του οποίου βρίσκεται μεταξύ δύο συναρτήσεων των υπόλοιπων μεταβλητών, τα πεδία ορισμού των οποίων είναι στοιχειώδη (x-απλά ή y-απλά) χωρία στο επίπεδο. Π.χ. αν D στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο xy και $\gamma_1(x,y) \le \gamma_2(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$, τότε

$$\hat{D} = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D, \ \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y) \}$$

είναι στοιχειώδες χωρίο στον $\mathbb{R}^3$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\hat{D} = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \} = \overline{B}_1(\underline{0})$



$$\hat{D} = \{(x,y,z) : -1 \le x \le 1,\ \varphi_1(x) = -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},$$
$$\gamma_1(x,y) := -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} =: \gamma_2(x,y)\}.$$

<u>Τριπλά ολοκληρώματα μέσω διαδοχικής ολοκλήρωσης</u>: Έστω W στοιχειώδες χωρίο στον $\mathbb{R}^3$, στο οποίο η μεταβλητή z φράσσεται μεταξύ δύο συναρτήσεων των x και y, τότε

$$\iiint_W f(x,y,z)\,\underbrace{dV}_{dx\,dy\,dz} = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

(D y-απλό)

ή

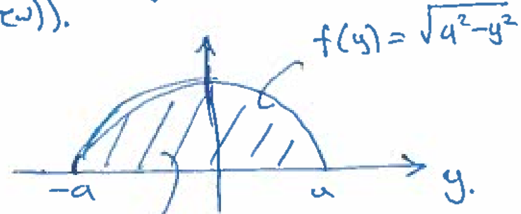
$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy.$$

(D x-απλό).

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι ο όγκος μοναδιαίας σφαίρας (ακτίνα $=1$) είναι $4\pi/3$.

<u>Λύση:</u>
$$V = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$
$$= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big[z\Big]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy\,dx$$
$$= 2\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2}\,dy\,dz.$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\int_{y=-a}^{a} (a^2-y^2)^{1/2}\,dy$ (εφόσον η x είναι σταθεροποιημένο $= a$ (έστω)).



(Με άμεση ολοκλήρωση θέτουμε $y = a\sin\theta$
$\Rightarrow a^2 - y^2 = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos\theta$
$\Rightarrow \sqrt{a^2-y^2} = a|\cos\theta|$.

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy = \frac{\pi a^2}{2}$$

Και $dy = a\cos\theta \, d\theta$. Επίσης $y=a \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$y=-a \Rightarrow \sin\theta=-1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ και επομένως

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2\theta\,d\theta = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{ [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \cancel{\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}^{\,0} \right\} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{2}\Bigg).$$

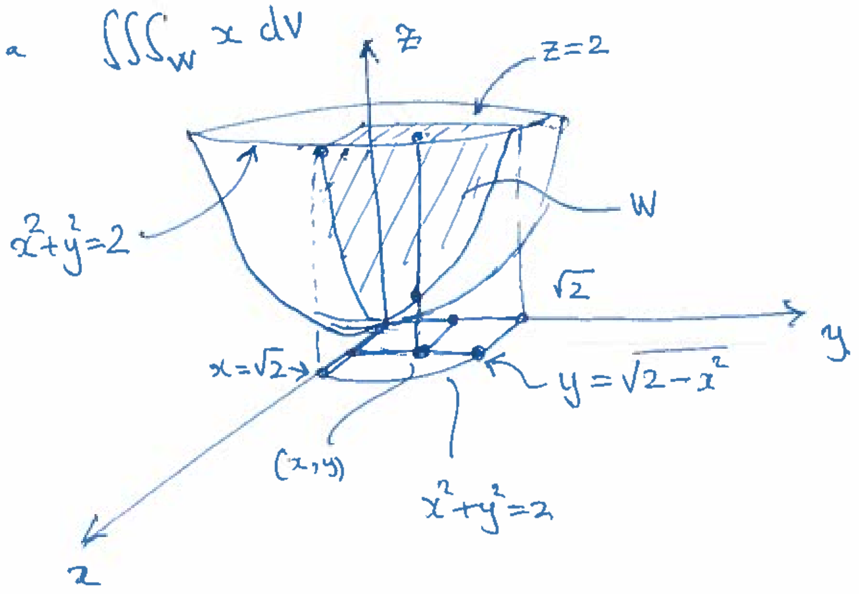
Επομένως,

$$V = \cancel{2}\int_{x=-1}^{1} \frac{\pi(1-x^2)}{\cancel{2}}\,dx = \pi\int_{x=-1}^{1}(1-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= \pi\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

Παράδειγμα: Έστω W το χωρίο που φράσσεται από τό την επιφάνεια $z=x^2+y^2$ πω επίπεδα $x=0, y=0, z=2$ και βρίσκεται στό τεταρτημόριο $x\geq 0, y\geq 0$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_W x\,dV$



$$\iiint_W x\, dV = \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{2} x\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} x \left[z \right]_{z=x^2+y^2}^{z=2} dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)\, dy\, dx.$$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \left[x(2-x^2)y - x\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} dx.$$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \left[x(2-x^2)(2-x^2)^{1/2} - \frac{1}{3} x (2-x^2)^{3/2} \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \left[x(2-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} x (2-x^2)^{3/2} \right] dx.$$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \frac{2}{3} x (2-x^2)^{3/2} dx = -\frac{1}{3} \int_{x=0}^{\sqrt{2}} -2x(2-x^2)^{3/2} dx.$$

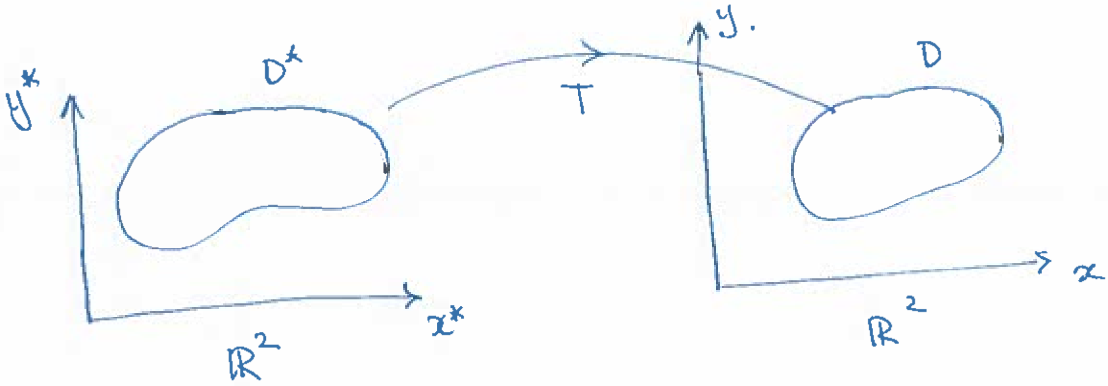
$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{(2-x^2)^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{5} (2-x^2)^{5/2} \right]_{\sqrt{2}}^{0}$$

$$= \frac{2}{15} \cdot 2^{5/2} = \frac{2}{15} 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Αλλαγή μεταβλητών στην ολοκλήρωση (διπλά και τριπλά ολοκληρώματα): Έστω $D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ και $T: D^* \to \mathbb{R}^2$ συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση. Συμβολίζουμε με $D = T(D^*)$

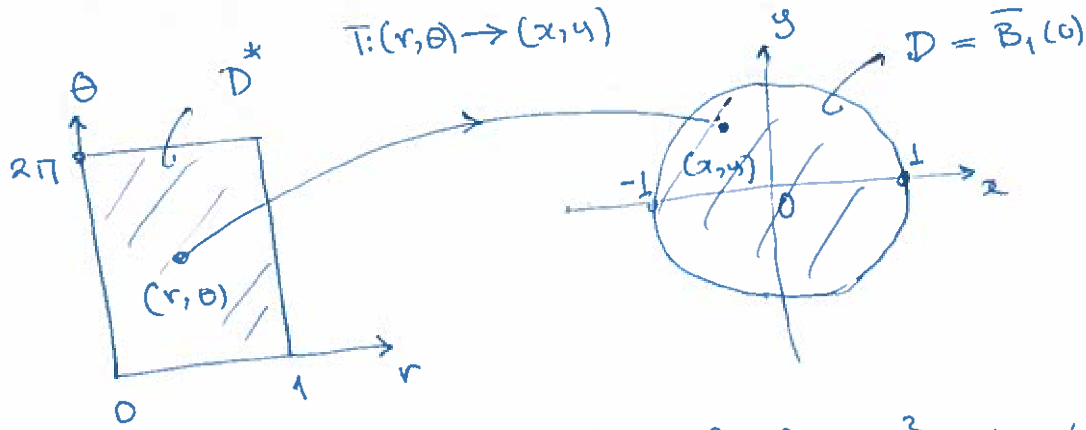
την εικόνα του D^* μέσω της T, δηλ.

$$D = T(D^*) = \{(x,y) = T(x^*,y^*),\ (x^*,y^*)\in D^*\}$$



<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $D^* = [0,1]\times[0,2\pi] = \{(r,\theta): 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ και έστω $T: D^*\to\mathbb{R}^2$, $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) =: (x,y)$. Βρείτε τό σύνολο $T(D^*)$, δηλ. την εικόνα του D^* μέσω της T.

<u>Λύση</u>!



Λόγω της ταυτότητας $x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 \le 1$, τό σύνολο των σημείων $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ γιά τά οποία $(x,y)\in D$ είναι μέσα στον δίσκο $\overline{B}_1(\underline{0})$. Επιπλέον κάθε $(x,y)\in \overline{B}_1(\underline{0})$ γράφεται ως $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $(r,\theta)\in D$. Άρα $D = \overline{B}_1(\underline{0})$.

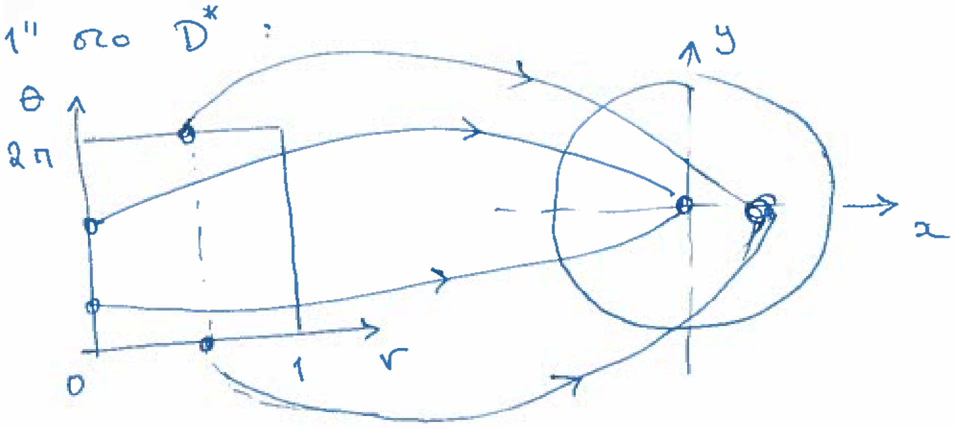
<u>Θεώρημα</u>: Αν $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ με $\det(A)\neq 0$ και $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση $T(\underline{x}) = A\underline{x}$, τότε η T απεικονίζει παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα και κορυφή σε κορυφή. Επιπλέον αν $T(D^*)$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε το D^* είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

<u>Απόδειξη</u>: Άσκηση!

Ορισμός: Μια απεικόνιση $T: D^* \to D$ είναι "1-1" όταν απεικονίζει διαφορετικά σημεία σε διαφορετικά σημεία (δηλ. $T(\underline{v}) = T(\underline{u}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{u}$). Είναι "επί του D" όταν $T(D^*) = D$, δηλ. η εικόνα του D^* μέσω της T είναι όλο το D.

~~Ετά~~ γραμμικές απεικονίσεις (από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$) αντιστοιχούν με πολλαπλασιασμό με πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δηλ. $T(\underline{x}) = A\underline{x}$.
Ισχύει ότι: T "1-1" $\Leftrightarrow$ T επί του $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

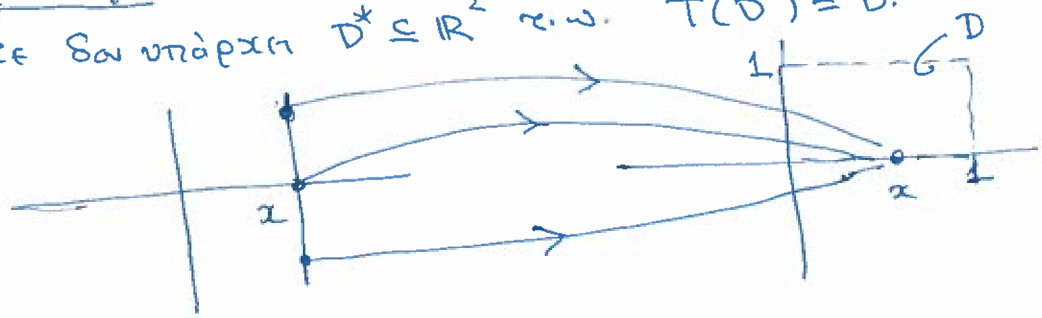
Παράδειγμα: Έστω $T: D^* = [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Από προηγούμενο παράδειγμα $T(D^*) = \overline{B}_1(\underline{0})$. Η T δεν είναι "1-1" στο D^*:



Η απεικόνιση γίνεται "1-1" αν το πεδίο ορισμού ~~της~~ περιοριστεί στο $S = (0,1]\times[0,2\pi)$, οπότε $T(S) = \overline{B}_1(\underline{0})\setminus\{\underline{0}\}$.

Δοσμένου χωρίου D και απεικόνισης T, ο προσδιορισμός χωρίου D^* τέτοιου ώστε $T(D^*) = D$ είναι δυνατός μόνο όταν η T είναι επί του D:

Παράδειγμα: Έστω $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x,0)$. Έστω $D = [0,1]^2$.
Τότε δεν υπάρχει $D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ τ.ω. $T(D^*) = D$.



Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα

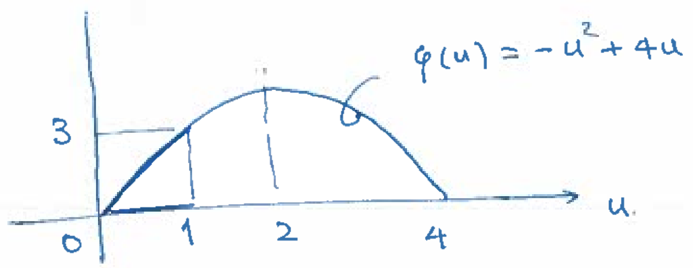
Έστω $T: D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2$ παραγωγίσιμη, $T(D^*) = D$ και $f: D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Θέλουμε να εκφράσουμε το $\iint_D f(x,y)\,dA$ ως ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f \circ T$ επί του D^*.

Έστω D^* χωρίο του επιπέδου uv και D χωρίο του επιπέδου xy, και

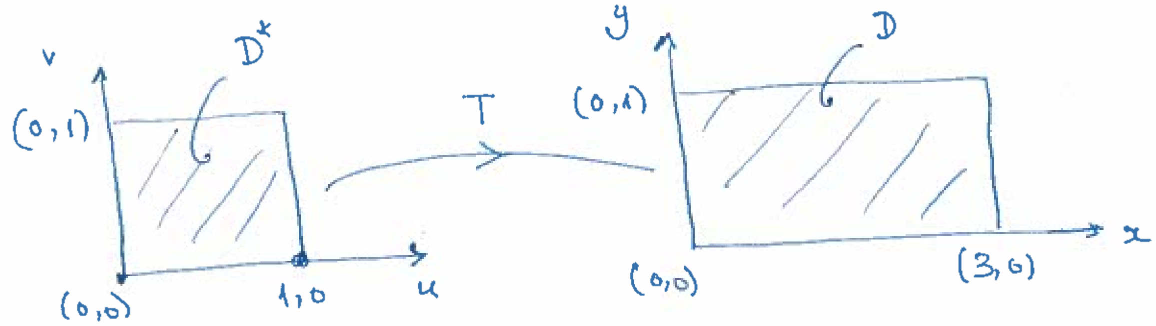
$$T(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v)), \quad (u,v) \in D^*$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $T(u,v) = (-u^2+4u, v) = (x,y)$, $D^* = [0,1] \times [0,1]$

Έστω $\varphi(u) = -u^2 + 4u = u(4-u)$



Άρα $D^* = [0,1] \times [0,1]$, $D = T(D^*) = [0,3] \times [0,1]$



<u>Θεώρημα</u>: Έστω D και D^* στοιχειώδη χωρία του $\mathbb{R}^2$ και έστω ότι $T: D^* \to D$ είναι κλάσης C^1. Αν η T είναι 1-1 στο D^* και επιπλέον $D = T(D^*)$, τότε για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

όπου:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

η Ιακωβιανή ορίζουσα ~~της~~ του πίνακα παραγώγων $DT(u,v)$ της T.

<u>Παράδειγμα:</u> Στο προηγούμενο παράδειγμα $x = -u^2 + 4u$, $y = v$ και επομένως $\frac{\partial x}{\partial u} = -2u + 4$, $\frac{\partial x}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial v} = 1$ και

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 4-2u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-2u$$

Άρα για ολοκληρώσιμη $f: D \to \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(-u^2+4u, v)\,du\,dv$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^3 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 f(-u^2+4u, v)\,|4-2u|\,du\,dv.$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f(-u^2+4u, v)\,(4-2u)\,du\,dv.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Η συνάρτηση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ που μετασχηματίζει <u>πολικές</u> σε <u>Καρτεσιανές</u> συντεταγμένες δίνεται από

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (r \equiv u, \theta \equiv v)$$

και
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

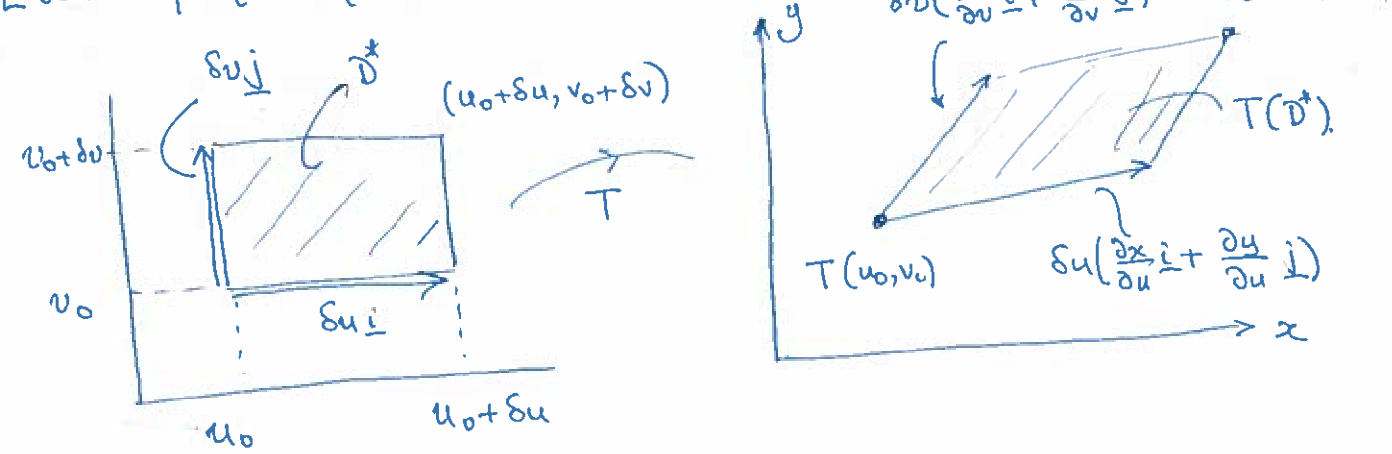
Παρατήρηση: Έστω $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=1$. Τότε, σύμφωνα με

το θεώρημα:

$$\text{Εμβαδόν}(D) = A(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

και το "στοιχείο εμβαδό" $dx\,dy$ στο επίπεδο xy μετασχηματίζεται στο $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$. Παρακάτω δίνουμε μία (προσεγγιστική) γεωμετρική ερμηνεία:

Έστω "μικρό" ορθογώνιο στο επίπεδο uv όπως στο σχήμα:



Μια προσέγγιση του διανύσματος $T(u_0+\delta u, v_0+\delta v)$ είναι:

$$T(u_0+\delta u, v_0+\delta v) \cong T(u_0,v_0) + DT(u_0,v_0)\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$$

όπου $DT(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{bmatrix}$

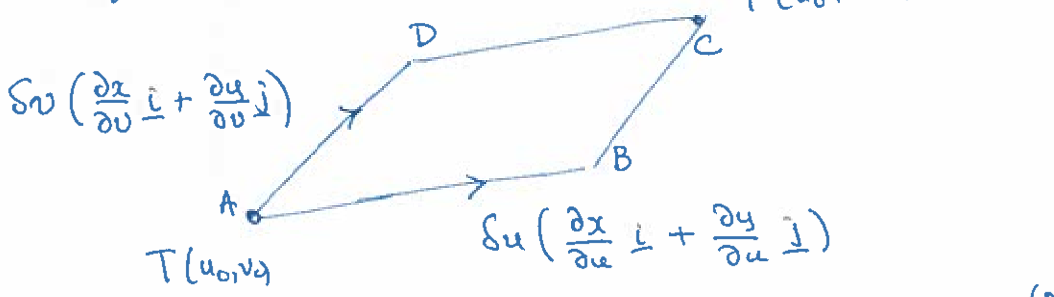
Επίσης: $T(u_0+\delta u, v_0) \simeq T(u_0,v_0) + \delta u \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix}(u_0,v_0)$

$$= T(u_0,v_0) + \delta u \underbrace{\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\,\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\,\underline{j} \right]}_{\underline{T_u}}$$

Παρόμοια:

$$T(u_0, v_0+\delta v) \cong T(u_0,v_0) + \delta v \underbrace{\left[\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\,\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,\underline{j}\right]}_{\underline{T_v}}$$

Και οι δύο πλευρές του "παραλληλογράμμου" $T(D^*)$ αντιστοιχούν στα διανύσματα



Επομένως, $\text{Εμβαδόν}(ABCD) = \left\| \delta u\left(\frac{\partial x}{\partial u}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\underline{j}\right) \wedge \delta v\left(\frac{\partial x}{\partial v}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\underline{j}\right)\right\|$

$$= \left\| \det\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}\delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\delta v & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\underline{k} \right\| \delta u\, \delta v$$

$$= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \delta u\, \delta v$$

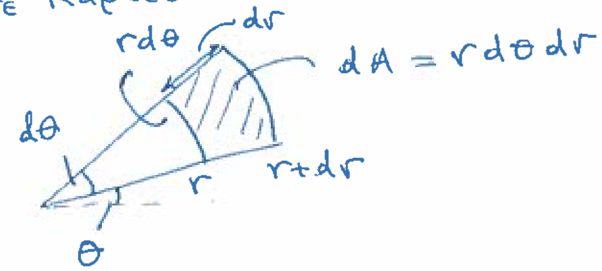
<u>Παράδειγμα</u> (συνέχεια): $x = -u^2+4u$, $y = v$, $D^* = [0,1]^2$, $D = T(D^*) = [0,3]\times[0,1]$. Αν $f(x,y) = 1$ έχουμε:

$$\int_0^1\int_0^3 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^3 dx\,dy = 3 \quad \text{και}$$

$$\int_0^1\int_0^1 (4-2u)\,du\,dv = \int_0^1 \left[4u-u^2\right]_{u=0}^{1} dv = \int_0^1 3\,dv = 3$$

που επαληθεύει το θεώρημα.

<u>Παράδειγμα</u>: Γεωμετρική ερμηνεία Ιακωβιανής ορίζουσας για μετασχηματισμό από πολικές σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$), $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$



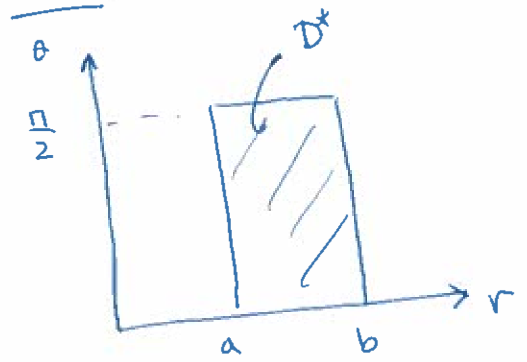
Αλλαγή μεταβλητών – πολικές συντεταγμένες

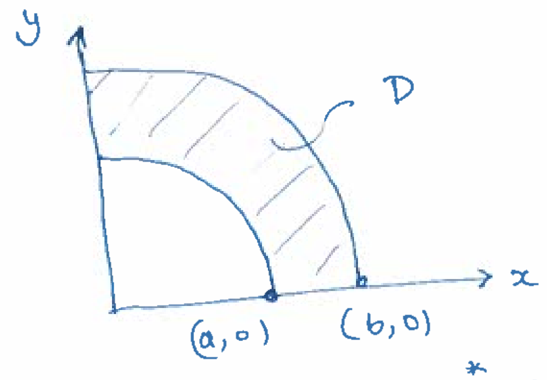
Έστω $D^* = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le a\}$. Ο μετασχηματισμός $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) := (x,y)$ απεικονίζει το $D^* \to \overline{B}_a(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a\}$. Παρ' όλο που ο T δεν είναι 1-1 στο D^* ($T(0,\theta_1) = T(0,\theta_2) = 0$ ακόμα και αν $\theta_1 \neq \theta_2$) το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών ισχύει. Γενικά η σχέση ισχύει όταν $T: D^* \to D$ είναι επί και 1-1 εκτός πιθανώς από κάποια σημεία στο ∂D^* (σύνορο του D^*). Έχουμε:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Υπολογίστε το $\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$, όπου D το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που βρίσκεται μεταξύ των τόξων $x^2+y^2=a^2$ και $x^2+y^2=b^2$ όπου $0<a<b$.

<u>Λύση</u>:





Ο μετασχηματισμός $T: D^* \to D$ είναι "1-1" στο D^*, οπότε

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\theta=0}^{\pi/2} r\ln(r^2)\,d\theta\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_a^b r\ln(r^2)\,dr = \frac{\pi}{2}\int_a^b 2r\ln(r)\,dr$$

Έστω $I = \int x\ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{u}\, \underbrace{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}_{dv} =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

Επομένως,

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi\left[\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right]_a^b =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{b^2}{2}\ln b - \frac{b^2}{4}\right) - \left(\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4}\right)\right].$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[b^2\ln b - a^2\ln a - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right]$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$

Λύση: Υπολογίζουμε αρχικά το διπλό ολοκλήρωμα:

$I_\alpha = \iint_{D_\alpha} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, όπου $D_\alpha = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \alpha^2\}$.

Με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $x^2+y^2=r^2$, $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ και $D_\alpha^* = \{(r,\theta) : 0\le r\le \alpha\}$, οπότε

$$I_\alpha = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\alpha} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\alpha}(-2r)e^{-r^2}dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[e^{-r^2}\right]_{r=0}^{\alpha}d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[e^{-r^2}\right]_{r=\alpha}^{0}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^{-\alpha^2})\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta = \frac{1}{\cancel{2}}(1-e^{-\alpha^2})\cancel{2}\pi =$$

$$= \pi(1-e^{-\alpha^2}).$$

Επομένως: $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha = \pi$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\,dy = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Παρατήρηση: Η ~~συνάρτηση~~ πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής $N(0,1)$ είναι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/2}$

Αλλαγή μεταβλητών (Τριπλά ολοκληρώματα)

Ορισμός: Αν $T \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ συνάρτηση κλάσης C^1 που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w)$$

τότε η Ιακωβιανή της T είναι η ορίζουσα:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα διανύσματα:

$$\underline{T_u} = \frac{\partial x}{\partial u}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\underline{k}, \quad \underline{T_v} = \frac{\partial x}{\partial v}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\underline{k},$$

$$\underline{T_w} = \frac{\partial x}{\partial w}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\underline{k}$$

Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών γιά τριπλά ολοκληρώματα:

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{W^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

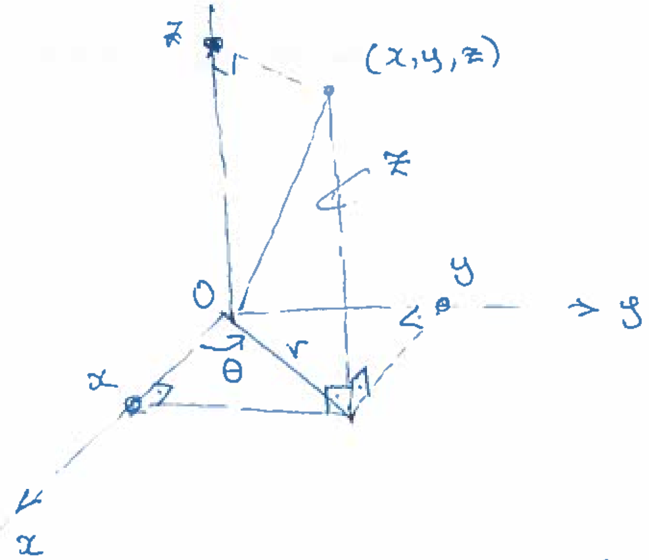
όπου W^* στοιχειώδες χωρίο του χώρου uvw, που αντιστοιχεί στο W του χώρου xyz μέσω της απεικόνισης:

$$T: (u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

υπό την προϋπόθεση ότι η T είναι κλάσης C^1 και 1-1 στο W^* (εκτός πιθανού από σύνολο που είναι ένωση γραφημάτων συναρτήσεων δύο μεταβλητών).

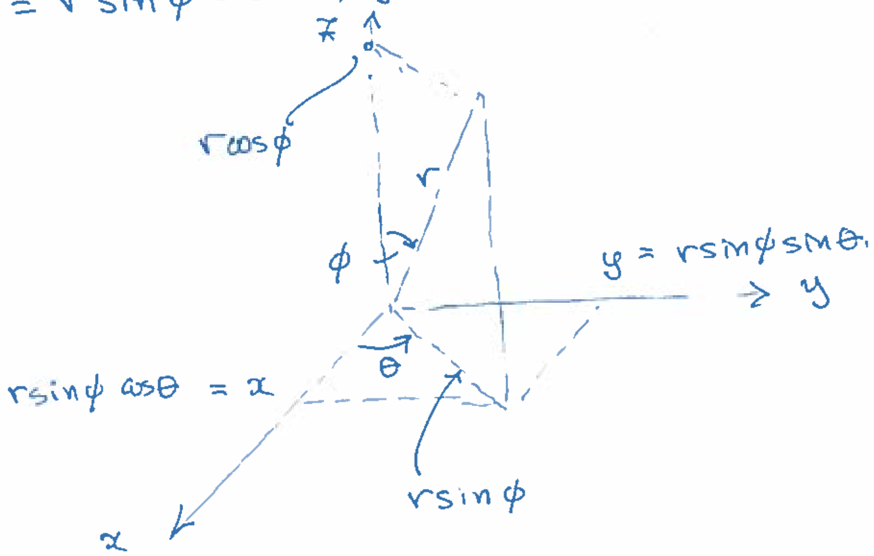
Πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$

(1) Κυλινδρικές συντεταγμένες: (r, θ, z) ενός σημείου (x,y,z). Γεωμετρικά ορίζονται ως: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$.



(2) Σφαιρικές συντεταγμένες: ~~x = r sin~~ (r, θ, ϕ) ενός σημείου (x,y,z) ορίζονται ως

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\phi$$



Ιακωβιανή ορίζουσα (κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Άρα:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

και

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

Ιακωβιανή ορίζουσα (σφαιρικές συντεταγμένες)

$$(x,y,z) = (r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} - r\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi\left(-r^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta - r^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta\right)$$

$$- r\sin\phi\left(r\sin^2\phi\cos^2\theta + r\sin^2\phi\sin^2\theta\right)$$

$$= -r^2\sin\phi\cos^2\phi\sin^2\theta - r^2\sin\phi\cos^2\phi\cos^2\theta$$

$$- r^2\sin^3\phi\cos^2\theta - r^2\sin^3\phi\sin^2\theta.$$

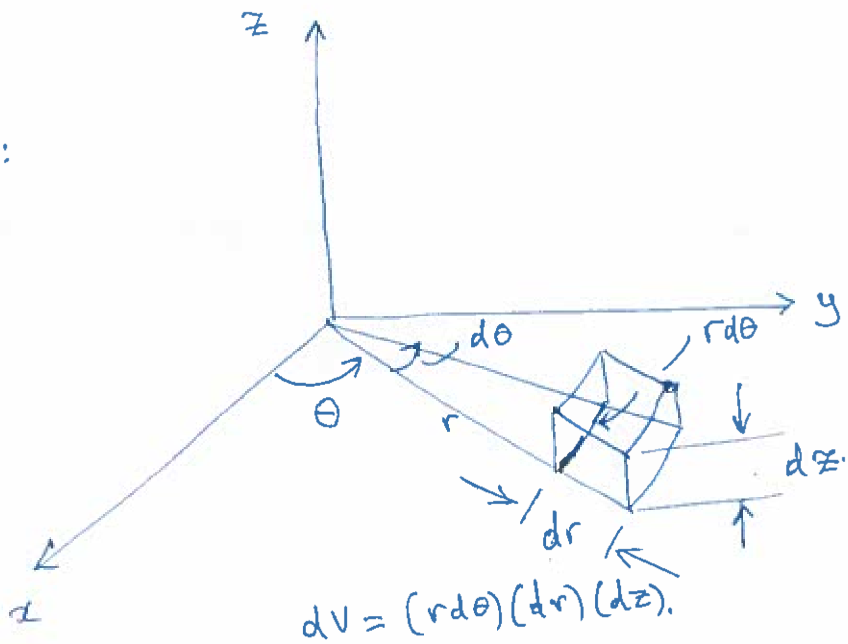
$$= -r^2\sin\phi\cos^2\theta(\underbrace{\cos^2\phi + \sin^2\phi}_{1}) - r^2\sin\phi\sin^2\theta(\underbrace{\cos^2\phi + \sin^2\phi}_{1})$$

$$= -r^2\sin\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -r^2\sin\phi$$

$$\Rightarrow \iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)\cdot r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

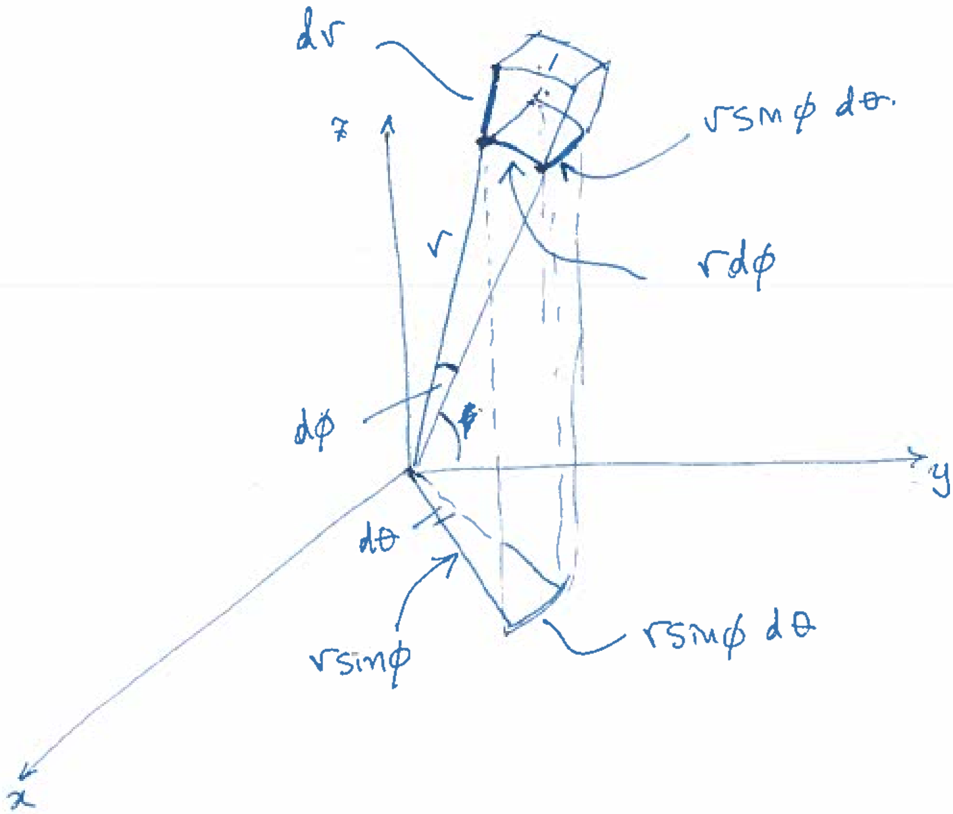
Γεωμετρική Ερμηνεία "στοιχείων όγκου"

Κυλινδρικές Συντεταγμένες :



$$dV = (r d\theta)(dr)(dz).$$

Σφαιρικές Συντεταγμένες



$$dV = (dr)(r d\phi)(r \sin\phi \, d\theta)$$

$$= r^2 dr \, d\theta \, d\phi$$

<u>Παράδειγμα</u>: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\iiint_W \exp\left[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right] dV$$

όπου W η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$.

<u>Λύση</u>: Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$dV = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\phi \, dr\,d\theta\,d\phi$$

$$W^* = \{(r,\theta,\phi) : 0 \le r \le 1 ,\ 0 \le \theta \le 2\pi ,\ 0 \le \phi \le \pi\}$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \Rightarrow (x^2+y^2+z^2)^{3/2} = r^3$$

Άρα:

$$\iiint_W \exp\left[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right] dV = \iiint_{W^*} e^{r^3} r^2 \sin\phi \, dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} r^2 e^{r^3} \sin\phi \, dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{1}{3} \int_{r=0}^{1} 3r^2 e^{r^3} \int_{\phi=0}^{\pi} \sin\phi \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\,d\phi\,dr$$

$$= \frac{1}{3} \int_{r=0}^{1} 3r^2 e^{r^3} \int_{\phi=0}^{\pi} \sin\phi \left[\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} d\phi\,dr$$

$$= \frac{1}{3} \int_{r=0}^{1} 3r^2 e^{r^3} \underbrace{\left[\cos\phi\right]_{\phi=\pi}^{0}}_{1-(-1)=2} \cdot 2\pi \, dr$$

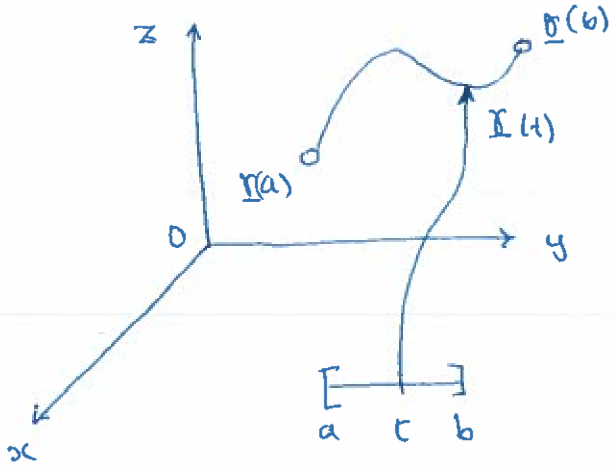
$$= \frac{4\pi}{3} \int_{r=0}^{1} 3r^2 e^{r^3} dr = \frac{4\pi}{3}\left[e^{r^3}\right]_{r=0}^{1} = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Εισαγωγικά:

- Διαδρομή στον $\mathbb{R}^n$: Απεικόνιση $\underline{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Το σύνολο $C = \{\underline{\gamma}(t) : t \in [a,b]\}$ είναι η καμπύλη της διαδρομής και $\underline{\gamma}(a), \underline{\gamma}(b)$ τα άκρα της.

- Αν $n=3$, γράφουμε $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, όπου x, y, z οι συνιστώσες της $\underline{\gamma}(t)$.

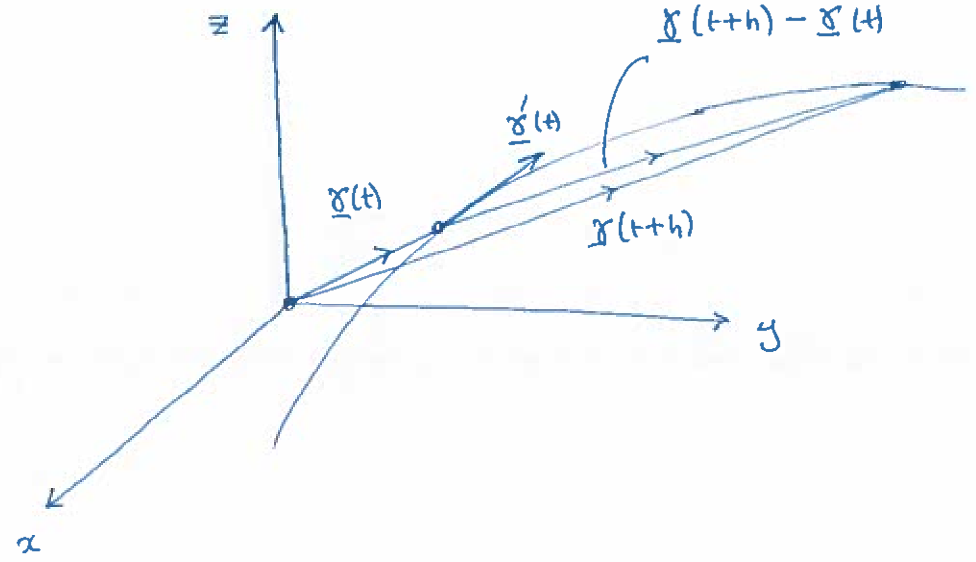


- Μπορούμε να φανταστούμε την $\underline{\gamma}(t)$ ως την καμπύλη που διαγράφει κινούμενο σωματίδιο σε χρόνο t. Αν $\underline{\gamma}(t)$ παραγωγίσιμη, η ταχύτητα της $\underline{\gamma}(t)$ τη χρονική στιγμή t ορίζεται ως:

$$\underline{\gamma}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t)}{h}$$

Το μέτρο της ταχύτητας της διαδρομής $\underline{\gamma}(t)$ είναι $\|\underline{\gamma}'(t)\|$.

Αν $n=3$ και $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, τότε $\underline{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\underline{i} + y'(t)\underline{j} + z'(t)\underline{k}$. Γεωμετρικά $\underline{\gamma}'(t)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην $\underline{\gamma}(t)$ την χρονική στιγμή t.



Έστω $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ παραγωγίσιμη διαδρομή. Το μήκος της διαδρομής (μήκος τόξου) στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$ είναι:

$$L(\underline{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \| \underline{\gamma}'(t) \| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt$$

Η απειροστή μετατόπιση κινουμένου σωματιδίου που ακολουθεί διαδρομή $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ορίζεται ως:

$$\underline{ds} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k} = \left(\frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k}\right) dt$$

και το μήκος της:

$$\|\underline{ds}\| =: ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt = \|\underline{\gamma}'(t)\| \, dt$$

είναι το διαφορικό μήκος τόξου.

Επικαμπύλια ολοκληρώματα 1ου είδους

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και διαδρομή $\underline{\gamma} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 και έστω ότι η $f \circ \underline{\gamma}$, $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ είναι συνεχής στο I.

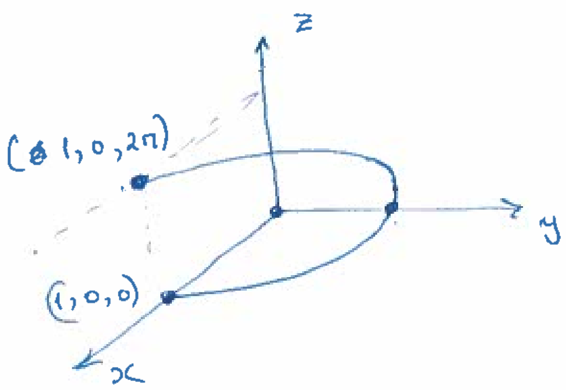
- Ορίζουμε ~~το~~ ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους, η ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)$ κατά μήκος της διαδρομής $\underline{\gamma}(t)$:

$$\int_{\underline{\gamma}} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \|\underline{\gamma}'(t)\|\, dt$$

(εναλλακτικός συμβολισμός: $\int_{\underline{\gamma}} f(x,y,z)\, ds$, $\int_a^b f(\underline{\gamma}(t))\|\underline{\gamma}'(t)\|\, dt$)

- Αν η $\underline{\gamma}(t)$ είναι μόνο τμηματικά C^1 ή η $f(\underline{\gamma}(t))$ είναι μόνο τμηματικά συνεχής, ορίζουμε το $\int_{\gamma} f\, ds$ διασπώντας το $[a,b]$ σε τμήματα επί των οποίων η $f(\underline{\gamma}(t))\|\underline{\gamma}'(t)\|$ είναι συνεχής και αθροίζοντας τα ολοκληρώματα επί αυτών των τμημάτων.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $\underline{\gamma}: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)})$ και $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Υπολογίστε το $\int_{\underline{\gamma}} f(x,y,z)\, ds$



<u>Λύση:</u> Έχουμε:

$\underline{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$\Rightarrow \|\underline{\gamma}'(t)\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 1$
$= 2$

$\Rightarrow \|\underline{\gamma}'(t)\| = \sqrt{2}$

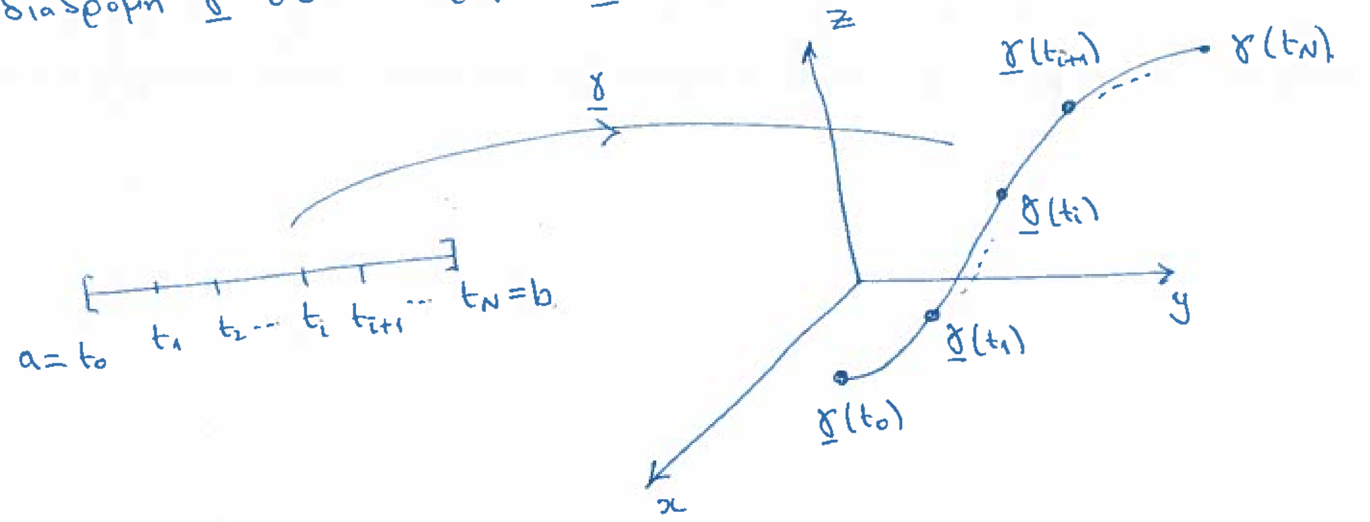
Επίσης: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1+t^2$ κατά μήκος της $\underline{\gamma}(t)$. Επομένως:

$$\int_{\underline{\gamma}} f(x,y,z)\, ds = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3+4\pi^2).$$

<u>Αιτιολόγηση ορισμού:</u> Έστω ότι $\underline{\gamma}$ είναι κλάσης C^1 στο $I=[a,b]$

Ορίζουμε διαμερισμό: $a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$ και διασπάμε την διαδρομή $\underline{\gamma}$ σε διαδρομές $\underline{\gamma}_i:[t_i,t_{i+1}]\to\mathbb{R}^N$, $0\le i\le N-1$



Έστω Δs_i το μήκος τόξου της $\underline{\gamma}_i$, δηλαδή

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\underline{\gamma}'(t)\|\,dt$$

Όταν N είναι "μεγάλο", τα Δs_i είναι "μικρά" και η $f(x,y,z)$ είναι προσεγγιστικά σταθερή στα σημεία της $\underline{\gamma}_i$. Ορίζουμε:

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta s_i$$

όπου $(x_i,y_i,z_i)=\underline{\gamma}(t)$ για κάποιο $t\in[t_i,t_{i+1}]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής $\exists\, t_i^*\in[t_i,t_{i+1}]$ τ.ω. $\Delta s_i=\|\underline{\gamma}'(t_i^*)\|\,\Delta t_i$ όπου $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$. Από την Θεωρία ~~αθροισμάτων~~ ολοκληρωμάτων Riemann αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i,y_i,z_i)\,\|\underline{\gamma}'(t_i^*)\|\,\Delta t_i$$

$$= \int_I f(x(t),y(t),z(t))\,\|\underline{\gamma}'(t)\|\,dt$$

$$= \int_{\underline{\gamma}} f(x,y,z)\,ds$$

<u>Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους</u> : Έστω $\underline{F}$ διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ που είναι συνεχές στην C^1 διαδρομή $\underline{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$. Ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους του $\underline{F}$ κατά μήκος της $\underline{\gamma}$ ως:

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{F}\cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t))\cdot\underline{\gamma}'(t)\,dt$$

δηλ. ολοκληρώνουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\underline{F}$ με το $\underline{\gamma}'$ επί του διαστήματος $[a,b]$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $\underline{\gamma}'(t)\neq\underline{0}$,

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{F}\cdot d\underline{s} = \int_a^b \left(\underline{F}(\underline{\gamma}(t))\cdot\frac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}'(t)\|}\right)\|\underline{\gamma}'(t)\|\,dt$$

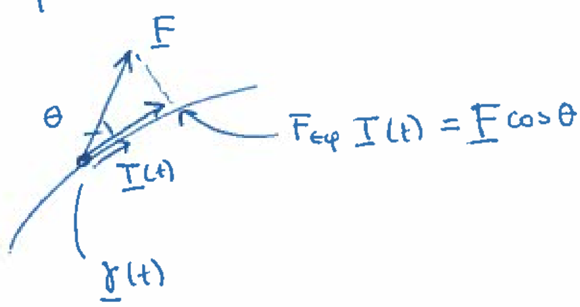
Έχουμε:

$\underline{T}(t) := \dfrac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}'(t)\|}$ μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτομενικό στην $\underline{\gamma}(t)$

και άρα:

$\underline{F}(\underline{\gamma}(t))\cdot\underline{T}(t) = F_{εφ}(t)$ (εφαπτομενική συνιστώσα της $\underline{F}(t)$ – κατά μήκος της $\underline{\gamma}(t)$).

Άρα:



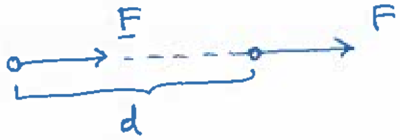
$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{F}\cdot d\underline{s} = \int_a^b F_{εφ}(t)\,\|\underline{\gamma}'(t)\|\,dt$$

$$= \int_{\underline{\gamma}} F_{εφ}(x,y,z)\,ds \quad (*)$$

όπου $F_{εφ}(x,y,z)$ το εφαπτομενικό πεδίο της $\underline{F}$ κατά μήκος της $\underline{\gamma}(t)$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $(*)$ ορίζει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους.

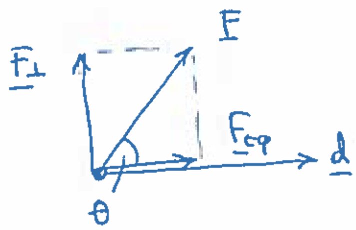
Παρατήρηση:

- Έστω $\underline{F}$ (σταθερή) δύναμη που μετακινεί σωματίδιο απόσταση d κατά μήκος της $\underline{F}$:



Το έργο της $\underline{F}$ γιά την μετακίνηση του σωματιδίου είναι $W = \|\underline{F}\| d$

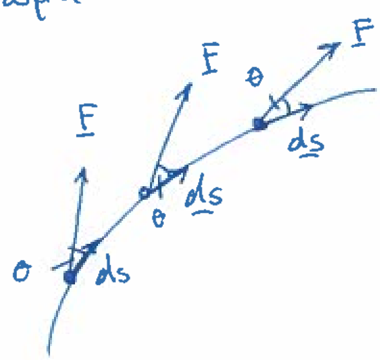
- Αν η (σταθερή) δύναμη $\underline{F}$ δρά υπο γωνία θ και η μετατόπιση δίνεται από διάνυσμα $\underline{d}$, τότε



$$W = \underline{F} \cdot \underline{d} = \|\underline{F}\| \cdot \|\underline{d}\| \cos\theta = (\|\underline{F}\| \cos\theta) \|\underline{d}\| = \|\underline{F}_{εφ}\| \cdot \|\underline{d}\|$$

* όπου $\|\underline{F}_{εφ}\|$ είναι το μέτρο της συνιστώσας της $\underline{F}$ κατά την διεύθυνση $\underline{d}$

- Έστω ότι $\underline{F}(x,y,z)$ είναι πεδίο δυνάμεων που μετατοπίζει σωματίδιο κατά μήκος διαδρομής $\underline{\gamma}(t)$



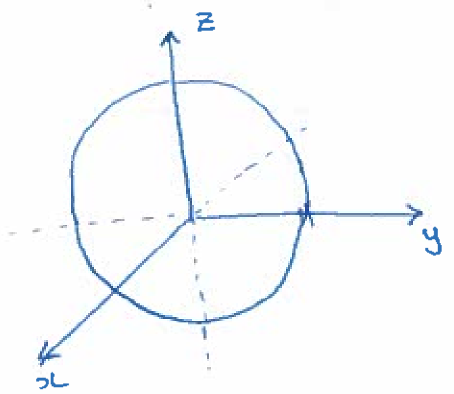
Τότε $dW = \underline{F} \cdot \underline{ds} = \|\underline{F}\| ds \cdot \cos\theta$ το έργο που εκτελεί η δύναμη $\underline{F}$ γιά την μετατόπιση του σωματιδίου κατα μηκος $\underline{ds}$ και

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{ds} = \int_{\gamma} F_{εφ}(x,y,z)\, ds$$

είναι το συνολικό έργο που εκτελεί το πεδίο δυνάμεων $\underline{F}(x,y,z)$ γιά την μετατόπιση του σωματιδίου κατά μήκος της διαδρομής $\underline{\gamma}$.

Παράδειγμα: Έστω $\underline{F}$ το πεδίο δυνάμεων $\underline{F}(x,y,z) = x^3\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.
Παραμετρικοποιήστε τον κύκλο ακτίνας a του επιπέδου yz θεωρώντας ως συνιστώσες της $\underline{\gamma}(\theta)$ τις $x=0$, $y = a\cos\theta$, $z = a\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, και υπολογίστε το έργο $W = \int_\gamma \underline{F}\cdot \underline{ds}$

Λύση: Έχουμε $\frac{dx}{d\theta} = 0$, $\frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$, $\frac{dz}{d\theta} = a\cos\theta$. Επίσης



$\underline{F}(\underline{\gamma}(\theta)) = 0^3\underline{i} + a\cos\theta\,\underline{j} + a\sin\theta\,\underline{k}$

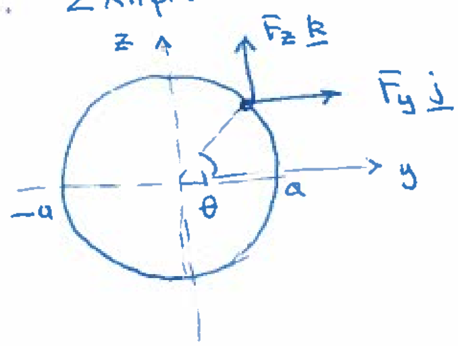
$\underline{\gamma}'(\theta) = \frac{dx}{d\theta}\underline{i} + \frac{dy}{d\theta}\underline{j} + \frac{dz}{d\theta}\underline{k}$

$= -a\sin\theta\,\underline{j} + a\cos\theta\,\underline{k}$

$\Rightarrow \int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{ds} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{\gamma}(\theta))\cdot\underline{\gamma}'(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(a\cos\theta\,\underline{j} + a\sin\theta\,\underline{k})\cdot(-a\sin\theta\,\underline{j} + a\cos\theta\,\underline{k})\,d\theta$

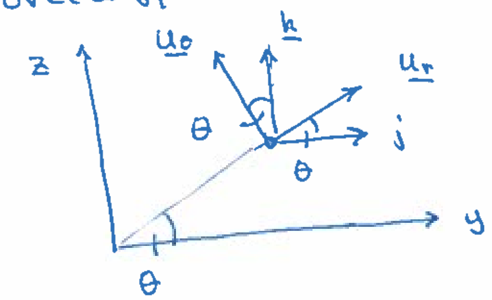
$\Rightarrow \int_0^{2\pi}(-a^2\cos\theta\sin\theta + a^2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta = 0$

και επομένως το συνολικό έργο $W=0$. Σχηματικά:



$\underline{F}(\underline{\gamma}(\theta)) = \underbrace{a\cos\theta}_{F_y}\,\underline{j} + \underbrace{a\sin\theta}_{F_z}\,\underline{k}$

Σε πολικές συντεταγμένες.



$\underline{j} = \cos\theta\,\underline{u_r} - \sin\theta\,\underline{u_\theta}$, $\underline{k} = \sin\theta\,\underline{u_r} + \cos\theta\,\underline{u_\theta}$. Άρα

$\underline{F}(\underline{\gamma}(\theta)) = a\cos\theta(\cos\theta\,\underline{u_r} - \cancel{\sin\theta\,\underline{u_\theta}}) + a\sin\theta(\sin\theta\,\underline{u_r} + \cancel{\cos\theta\,\underline{u_\theta}})$

$= a(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\underline{u_r} = a\,\underline{u_r}$

Άρα $\underline{F}(\underline{\gamma}(\theta)) \perp \underline{ds}$ σε κάθε σημείο της διαδρομής και άρα $W=0$.

Παράδειγμα: Έστω $\underline{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ και έστω $\underline{F}(x,y,z) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$. Υπολογίστε το $\int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{ds}$

Λύση: Έχουμε $\underline{F}(\underline{\gamma}(t)) = \sin t\, \underline{i} + \cos t\, \underline{j} + t\, \underline{k}$. Επίσης:

$$\underline{\gamma}'(t) = (\cos t, -\sin t, 1) = \cos t\, \underline{i} - \sin t\, \underline{j} + \underline{k}$$

$$\Rightarrow \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) = (\sin t\, \underline{i} + \cos t\, \underline{j} + t\, \underline{k}) \cdot (\cos t\, \underline{i} - \sin t\, \underline{j} + \underline{k})$$

$$= \sin t \cancel{\cos t} - \cos t \cancel{\sin t} + t = t$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

Παρατήρηση: Επικαμπύλια ολοκληρώματα μπορούν να εκφρασθούν μέσω διαφορικών μορφών. Αν $\underline{F} = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$,

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b (F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \underline{i} + \frac{dy}{dt} \underline{j} + \frac{dz}{dt} \underline{k} \right) dt$$

$$= \int_a^b \underline{F} \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt = \int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{ds}$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος $2^{ου}$ είδους:

$$I = \int_{\underline{\gamma}} x^2 dx + xy\, dy + dz$$

όπου $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\underline{\gamma}(t) = (t, t^2, 1) = (x(t), y(t), z(t))$.

Λύση: Έχουμε $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dz}{dt} = 0$. Άρα

$$I = \int_0^1 (t^2 + t^3(2t) + 0)\, dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right]_0^1$$

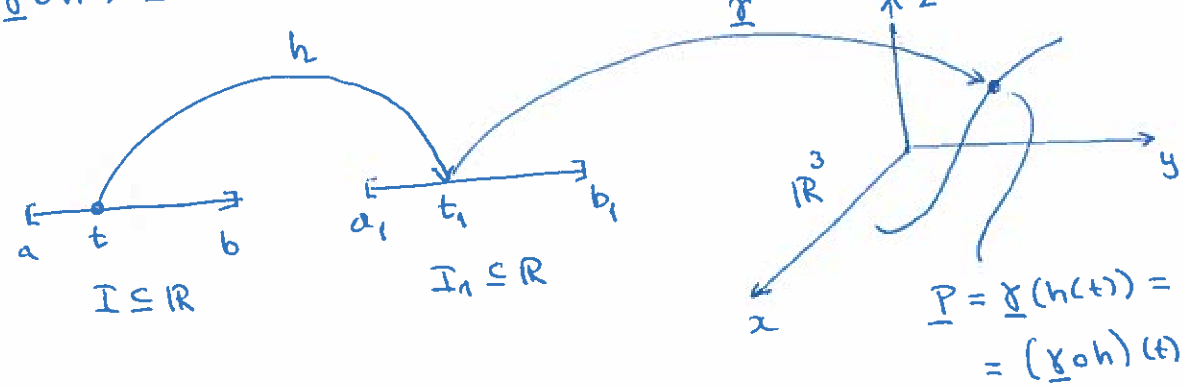
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$$

□

~~Άρα σε κάθε σημείο της διαδρομής, $\underline{F}(\underline{\gamma}(\theta)) \perp \underline{ds}$ και άρα $W=0$.~~

<u>Αναπαραμετρικοποίηση</u>: Η παραμετρικοποίηση μιάς διαδρομής δεν είναι μοναδική (π.χ. μπορεί να διατρέχουμε την ίδια γεωμετρική καμπύλη αλλά με την διπλάσια ταχύτητα).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $h : I = [a,b] \to I_1 = [a_1, b_1]$ συνάρτηση κλάσης C^1 και "1-1". Αν $\underline{\gamma} : I_1 \to \mathbb{R}^3$ τμηματικά C^1 διαδρομή, τότε $\underline{P} = \underline{\gamma} \circ h : I \to \mathbb{R}^3$ λέγεται αναμετρικοποίηση της $\underline{\gamma}$.



<u>Παρατήρηση</u>: Εφόσον $\underline{P}(t) = \underline{\gamma}(h(t))$, η γεωμετρική καμπύλη της διαδρομής είναι ίδια αλλά η μεταβλητή χρόνου μεταβάλλεται. Εναλλακτικά εφόσον (από τον κανόνα αλυσίδας),

$$\underline{P}'(t) = (\underline{\gamma} \circ h)' = \underline{\gamma}'(h(t))\, h'(t)$$

η διεύθυνση του διανύσματος ταχύτητας της $\underline{P}$ ~~είναι ίσο με το διάνυσμα~~ δεν μεταβάλλεται αλλά το ~~μέτρο~~ διάνυσμα ταχύτητας της $\underline{P}$ είναι ίσο με το διάνυσμα ταχύτητας της $\underline{\gamma}$ πολλαπλασιασμένο με την (βαθμωτή) ποσότητα $h'(t)$ (και άρα διατρέχουμε την ίδια καμπύλη με διαφορετική ταχύτητα).

Διακρίνουμε δύο τύπους αναπαραμετρικοποιήσεων:

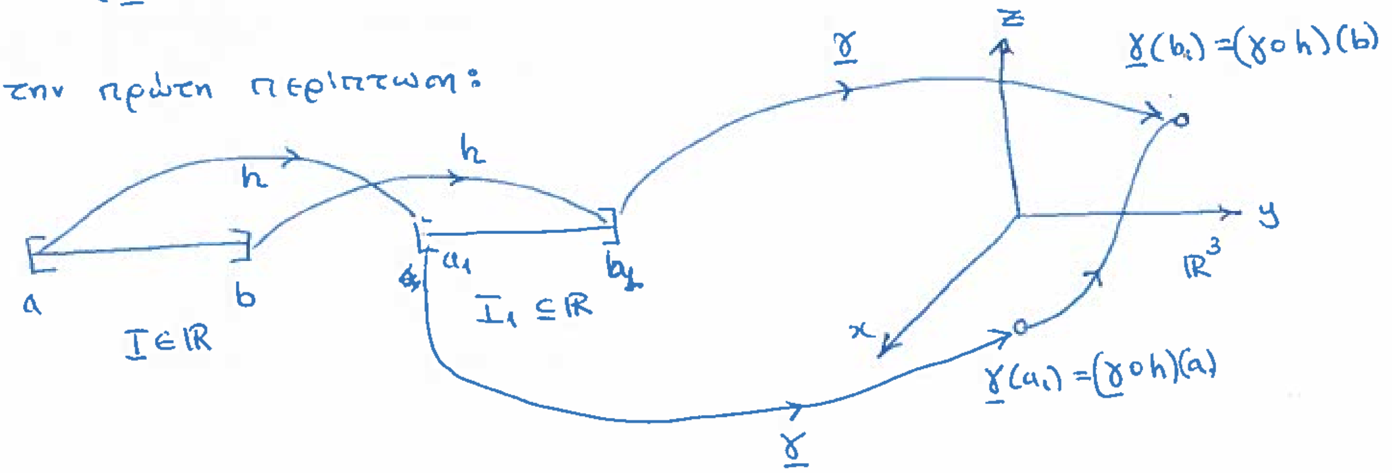
- Ο προσανατολισμός της διαδρομής διατηρείται:

$$(\mathbf{\gamma}\circ h)(a) = \mathbf{\gamma}(a_1) \quad \text{και} \quad (\mathbf{\gamma}\circ h)(b) = \mathbf{\gamma}(b_1)$$

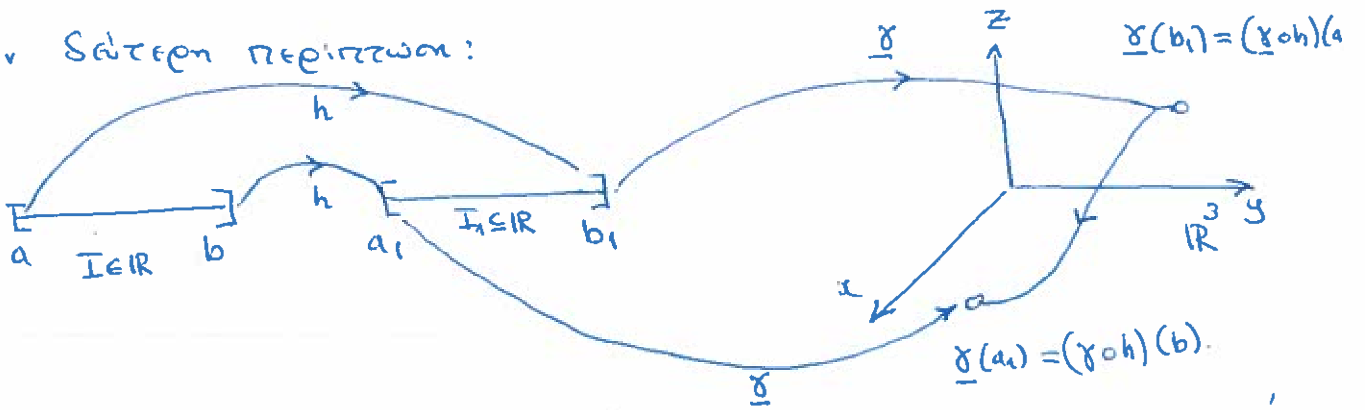
- Ο προσανατολισμός της διαδρομής αντιστρέφεται

$$(\mathbf{\gamma}\circ h)(a) = \mathbf{\gamma}(b_1) \quad \text{και} \quad (\mathbf{\gamma}\circ h)(b) = \mathbf{\gamma}(a_1)$$

Στην πρώτη περίπτωση:



Στην δεύτερη περίπτωση:



Θεώρημα: Έστω $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο συνεχές στην C^1 διαδρομή $\mathbf{\gamma}: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ και έστω $\mathbf{p}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ μιά αναμετρικοποίηση της $\mathbf{\gamma}$. Αν η $\mathbf{p}$ διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε $\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{\gamma}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, ενώ αν η $\mathbf{p}$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε $\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{\gamma}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$

Απόδειξη: Έστω απεικόνιση h τ.ω. $\mathbf{p} = \mathbf{\gamma}\circ h$. Από τον κανόνα της αλυσίδας $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{\gamma}'(h(t))\, h'(t)$. Άρα:

$$I := \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\cdot \mathbf{p}'(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{\gamma}(h(t)))\cdot \mathbf{\gamma}'(h(t))\, h'(t)\, d$$

Αλλαγή μεταβλητών: $s = h(t) \Rightarrow ds = h'(t)\,dt$

$t = a \Rightarrow s = h(a) = a_1$ ($\underline{p}$ διατηρεί προσανατολισμό)

$= b_1$ ($\underline{p}$ δεν διατηρεί ").

$t = b \Rightarrow s = h(b) = b_1$ ($\underline{p}$ διατηρεί προσανατολισμό)

$= a_1$ ($\underline{p}$ δεν διατηρεί ")

Επομένως:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \underline{F}(\underline{\gamma}(s)) \cdot \underline{\gamma}'(s)\,ds = \int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{ds}$$ ($\underline{p}$ διατηρεί προσανατολισμό)

$$= \int_{b_1}^{a_1} \underline{F}(\underline{\gamma}(s)) \cdot \underline{\gamma}'(s)\,ds = -\int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{ds}$$ ($\underline{p}$ δεν διατηρεί προσανατολισμό). □

Θεώρημα: ~~Παρατήρηση~~: (Αλλαγή παραμετρικοποίησης για επικαμπύλια ολοκληρώματα 1ου είδους). Έστω $\underline{\gamma}$ τμηματικά C^1 και f ~~αναμετ~~ συνεχής, ορισμένη στην εικόνα της $\underline{\gamma}$. Αν $\underline{p}$ είναι μία αναπαραμετρικοποίηση της $\underline{\gamma}$, τότε:

$$\int_{\underline{\gamma}} f(x,y,z)\,ds = \int_{\underline{p}} f(x,y,z)\,ds$$

(ανεξάρτητα από προσανατολισμό).

Απόδειξη: Έστω $I = \int_{\underline{p}} f\,ds = \int_a^b f(\underline{p}(t))\,\|\underline{p}'(t)\|\,dt$

Έχουμε: $\underline{p}(t) = \underline{\gamma}(h(t)) \Rightarrow \underline{p}'(t) = \underline{\gamma}'(h(t))\,h'(t)$. Άρα,

$$I = \int_a^b f(\underline{\gamma}(h(t)))\,\|\underline{\gamma}'(h(t))\|\,|h'(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b f(\underline{\gamma}(h(t)))\,\|\underline{\gamma}'(h(t))\|\,h'(t)\,\mathrm{sign}(h'(t))\,dt$$

Αλλαγή μεταβλητών: $\tau = h(t) \Rightarrow d\tau = h'(t)\,dt$

Αλλαγή προσανατολισμού:

Αν η $\underline{p}$ διατηρεί τον ~~φ~~ προσανατολισμό:

$t = a \Rightarrow \tau = h(a) = a_1$ και $t = b \Rightarrow \tau = h(b) = b_1$.

Επίσης, εφόσον $h \uparrow$, $\mathrm{sign}(h') = +1$ και άρα:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} f(\underline{\gamma}(\tau))\, \|\underline{\gamma}'(\tau)\|\, d\tau = \int_\gamma f\, ds$$

Αν η $\underline{p}$ δεν διατηρεί τον προσανατολισμό:

$$t = a \Rightarrow \tau = h(a) = b_1 \quad \text{και} \quad t = b \Rightarrow \tau = h(b) = a_1$$

Επίσης, εφόσον $h \downarrow$, $\operatorname{sign}(h') = -1$ και άρα

$$I = -\int_{b_1}^{a_1} f(\underline{\gamma}(\tau))\, \|\underline{\gamma}'(\tau)\|\, d\tau = \int_\gamma f\, ds$$

Σε κάθε περίπτωση: $I = \int_\gamma f\, ds$ ανεξάρτητα από την διατήρηση ή όχι του προσανατολισμού. $\square$

<u>Θεώρημα</u>: (Επικαμπύλια ολοκληρώματα 2ου είδους διανυσματικών πεδίων κλίσεων). Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1 και $\underline{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ είναι τμηματικά C^1 διαδρομή, τότε

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{\nabla} f \cdot \underline{ds} = f(\underline{\gamma}(b)) - f(\underline{\gamma}(a))$$

<u>Απόδειξη</u>: Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας στην $F: t \mapsto f(\underline{\gamma}(t))$

$$F'(t) = (f \circ \underline{\gamma})'(t) = \underline{\nabla} f(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) \qquad (*)$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού:

$$\int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a) = f(\underline{\gamma}(b)) - f(\underline{\gamma}(a))$$

Συνεπώς:

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{\nabla} f \cdot \underline{ds} = \int_a^b \underline{\nabla} f(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt \overset{(*)}{=} \int_a^b F'(t)\, dt$$
$$= F(b) - F(a) = f(\underline{\gamma}(b)) - f(\underline{\gamma}(a)). \quad \square$$

Παρατήρηση: Αν $\underline{F} = \underline{\nabla} f$ πεδίο δυνάμεων, τότε το έργο $W = \int_{\underline{\gamma}} \underline{\nabla} f \cdot \underline{ds} = f(\underline{\gamma}(b)) - f(\underline{\gamma}(a))$, εξαρτάται μόνο από τα άκρα της διαδρομής $\underline{\gamma}$. Στην περίπτωση αυτή, το πεδίο είναι "συντηρητικό" και η συνάρτηση f είναι το "δυναμικό" τη.
Το έργο $W = f(\underline{\gamma}(b)) - f(\underline{\gamma}(a))$ είναι ίσο με την διαφορά δυναμικού στα σημεία $\underline{\gamma}(b)$ και $\underline{\gamma}(a)$.

Παράδειγμα: Έστω $\underline{\gamma}(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \sin^3 \frac{\pi t}{2}\right) = (x(t), y(t))$, $0 \le t \le 1$. Υπολογίστε την τιμή του $\int_{\underline{\gamma}} y\,dx + x\,dy$.

Λύση: Αναγνωρίζουμε τό πεδίο $\underline{F}(x,y) = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} = y\underline{i} + x\underline{j}$ ως την κλίση της συνάρτησης $f(x,y) = xy$.
$\left(\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} = y\underline{i} + x\underline{j}\right)$. Έχουμε

$\underline{\gamma}(1) = \left(\frac{1}{4}, \sin^3 \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και $\underline{\gamma}(0) = (0,0)$.

Άρα: $\int_{\underline{\gamma}} \underline{\nabla} f \cdot \underline{ds} = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{4}$. □

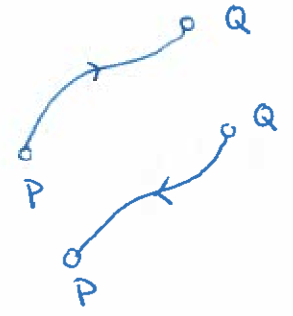
Παράδειγμα: (Αναπαραμετρικοποίηση). Έστω $\underline{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ τμηματικά συνεχής διαδρομή.

- Η διαδρομή $\underline{\gamma}_{\text{αντ}} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \underline{\gamma}(a+b-t)$ είναι μια αναμετρικοποίηση της $\underline{\gamma}$ που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $h : [a,b] \to [a,b]$, $t \mapsto a+b-t$, και αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Η $\underline{\gamma}_{\text{αντ}}$ λέγεται αντίθετη διαδρομή της $\underline{\gamma}$.
- Η διαδρομή $\underline{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \underline{\gamma}(a+(b-a)t)$ διατηρεί τον προσανατολισμό της $\underline{\gamma}$ και αντιστοιχεί στην απεικόνιση $h : [0,1] \to [a,b]$, $t \mapsto a+(b-a)t$.

Επικαμπύλια ολοκληρώματα ~~επί~~ 2ου είδους επί γεωμετρικών καμπυλών

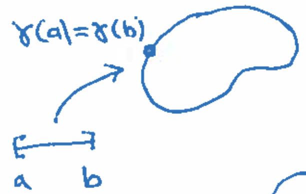
Επειδή τα ολοκληρώματα αυτά είναι ανεξάρτητα από την παραμετρικοποίηση (εκτός πιθανόν από πρόσημο) διατυπώνουμε την θεωρία με πιο "γεωμετρικό" τρόπο:

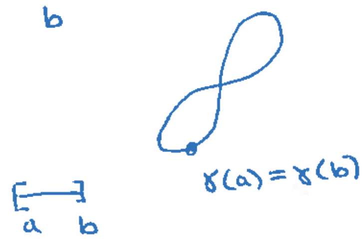
Ορισμός: Απλή καμπύλη Γ είναι η εικόνα μιας τμηματικά C^1 απεικόνισης $\underline{\gamma}: I \to \mathbb{R}^3$ που είναι "1-1" στο διάστημα I.
Αν $I = [a\ b]$, τα $\underline{\gamma}(a)$ και $\underline{\gamma}(b)$ είναι τα άκρα της καμπύλης.



Σε κάθε απλή καμπύλη Γ αντιστοιχούν δύο προσανατολισμοί (κατευ ~~διεύθυνσεις~~), $P \to Q$ η $Q \to P$. Μιά απλή καμπύλη μαζί με την κατεύθυνση καλείται προσανατολισμένη απλή καμπύλη (η καμπύλη με διάθυνση).

Απλή κλειστή καμπύλη: Εικόνα μιας τμηματικά C^1 απεικόνισης $\underline{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ πού είναι "1-1" στό $[a,b)$ και ικανοποιεί την συνθήκη $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$. Αν η $\underline{\gamma}$ ικανοποιεί την συνθήκη $\underline{\gamma}(a) = \gamma(\underline{b})$ αλλά δεν είναι απαραίτητα "1-1" στό $[a,b)$, τότε η εικόνα της είναι κλειστή καμπύλη. Κάθε απλή κλειστή καμπύλη έχει δύο προσανατολισμούς, που αντιστοιχούν στις δύο δυνατές κατευθύνσεις κίνησης κατά μήκος της καμπύλης.





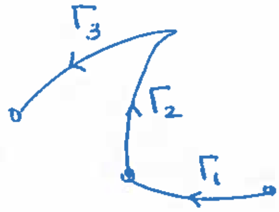
Ορίζουμε επικαμπύλια ολοκληρώματα 2ου είδους και 1ου είδους επί προσανατολισμένων απλών καμπυλών και απλών κλειστών καμπυλών Γ:

$$\int_\Gamma \underline{F} \cdot \underline{ds} = \int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{ds} \quad \text{και} \quad \int_\Gamma f\, ds = \int_{\underline{\gamma}} f\, ds$$

όπου $\underline{\gamma}$ μία παραμετροποίηση της Γ που διατηρεί τον προσανατολισμό.

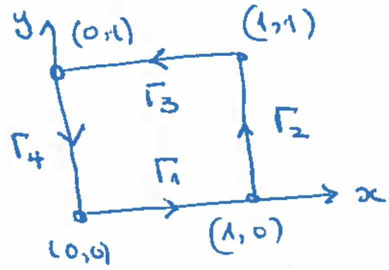
- Αν Γ^- είναι η ίδια καμπύλη με την Γ αλλά με αντίθετο προσανατολισμό, τότε $\int_\Gamma \underline{F}\cdot \underline{ds} = -\int_{\Gamma^-} \underline{F}\cdot\underline{ds}$

- Αν Γ είναι προσανατολισμένη καμπύλη που αποτελείται από προσανατολισμένες συνιστώσες καμπύλες Γ_i, $i=1,2,\dots,k$, τότε



$$\int_\Gamma \underline{F}\cdot\underline{ds} = \sum_{i=1}^{k}\int_{\Gamma_i}\underline{F}\cdot\underline{ds} = \int_{\Gamma_1}\underline{F}\cdot\underline{ds} + \int_{\Gamma_2}\underline{F}\cdot\underline{ds} + \dots + \int_{\Gamma_k}\underline{F}\cdot\underline{ds}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω Γ η περίμετρος του μοναδιαίου τετραγώνου στον $\mathbb{R}^2$ με αντιωρολόγιο προσανατολισμό. Υπολογίστε το $\int_\Gamma x^2dx + xy\,dy$



<u>Λύση</u>: Ορίζουμε παραμετρικοποίηση ~~του~~ της Γ (με τον κατάλληλο προσανατολισμό)

$$\underline{\gamma}: [0,4]\to\mathbb{R}^3, \quad \left.\begin{array}{lll} t & \mapsto (t,0) & 0\le t\le 1 \\ & \mapsto (1,t-1) & 1\le t\le 2 \\ & \mapsto (3-t,1) & 2\le t\le 3 \\ & \mapsto (0,4-t) & 3\le t\le 4 \end{array}\right\}$$

Έχουμε:

$$\int_{\Gamma_1} x^2dx + xy\,dy = \int_0^1\Big(t^2\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{1} + 0\cdot\frac{dy}{dt}\Big)dt = \int_0^1 t^2dt = \Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\Gamma_2} x^2dx + xy\,dy = \int_1^2\Big(1^2\cancelto{0}{\frac{dx}{dt}} + 1(t-1)\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{1}\Big)dt = \int_1^2(t-1)\,dt$$

$$= \Big[\frac{(t-1)^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma_3} x^2dx + xy\,dy = \int_2^3\Big((3-t)^2\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-1} + x\cdot 1\cancelto{0}{\frac{dy}{dt}}\Big)dt =$$

$$= \int_2^3 -(3-t)^2\,dt = \Big[\frac{(3-t)^3}{3}\Big]_2^3 =$$

$$= 0-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{\Gamma_4} x^2dx + xy\,dy = \int_3^4 \left(0^2 \frac{dx}{dt} + 0(4-t)\frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= 0$$

Επομένως,

$$\int_{\Gamma} x^2 dx + xy\,dy = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} x^2dx + xy\,dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

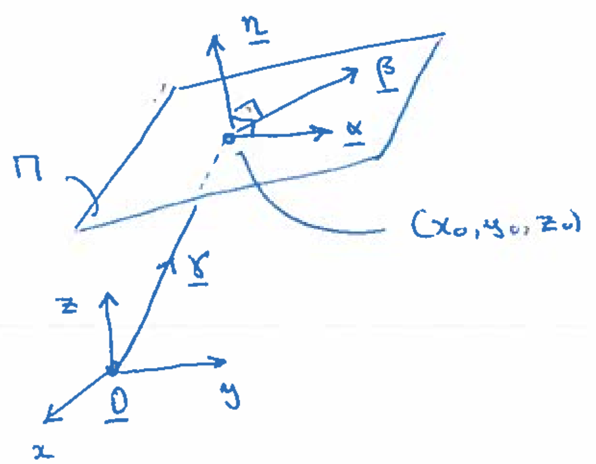
Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες

Ορισμός: Παραμετρικοποίηση μιάς επιφάνειας είναι συνάρτηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ όπου D χωρίο του $\mathbb{R}^2$. Η επιφάνεια $S = \Phi(D)$ (η εικόνα του D μέσω της Φ). Γράφουμε

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Αν η Φ είναι παραγωγίσιμη ή κλάσης C^1 (ισοδύναμα αν $x(u,v)$, $y(u,v)$ και $z(u,v)$ είναι παραγωγίσιμες ή συναρτήσεις C^1 του (u,v)) καλούμε την S παραγωγίσιμη ή επιφάνεια C^1.

Παραμετρικοποίηση επιπέδου: Έστω επίπεδο Π, παράλληλο σε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\underline{\alpha}$ και $\underline{\beta}$, το οποίο διέρχεται από σημείο $\underline{\gamma} = (x_0, y_0, z_0)$. Αν $\underline{n} = \underline{\alpha} \wedge \underline{\beta}$, τότε $\underline{n} \perp \Pi$.



Αν $\underline{n} = A\underline{i} + B\underline{j} + C\underline{k}$ και $\underline{p} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \in \Pi$ (αυθαίρετο),

τότε $\underline{n} \cdot (\underline{p} - \underline{\gamma}) = \langle \underline{n}, \underline{p} - \underline{\gamma} \rangle = 0$ και επομένως:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

που είναι η εξίσωση του Π σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Μία παραμετρικοποίηση του Π είναι

$$\{ \Phi(u,v) = \underline{\alpha} u + \underline{\beta} v + \underline{\gamma} : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \}$$

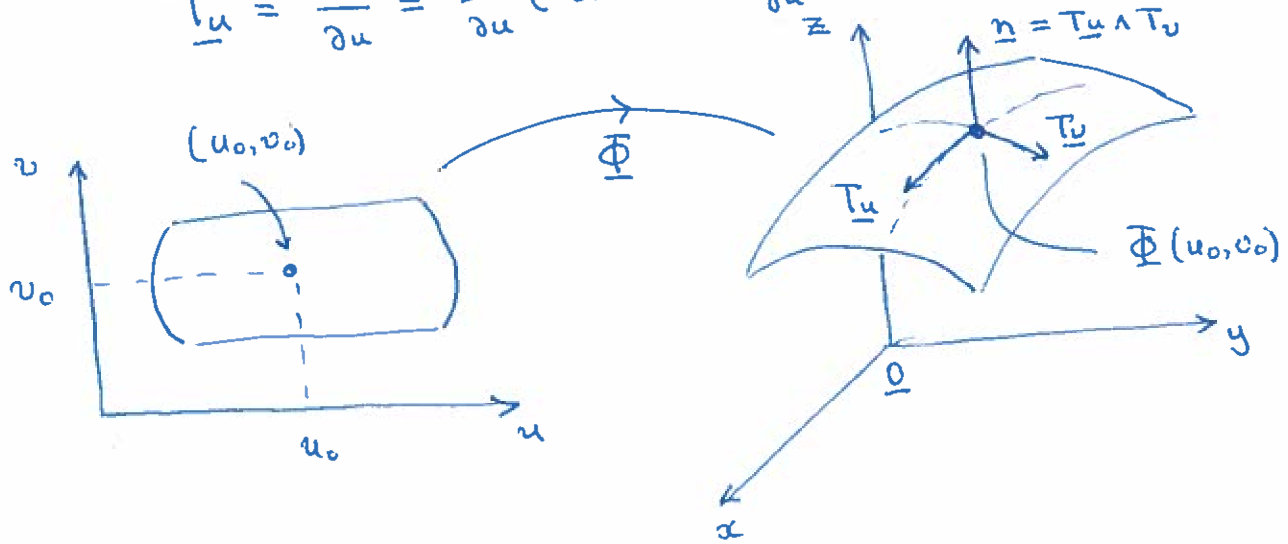
Εφαπτόμενα επίπεδα σε παραμετρικοποιημένες επιφάνειες

Έστω $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ παραμετρικοποιημένη επιφάνεια που είναι παραγωγίσιμη στο $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Κρατώντας το $u = u_0$ σταθερό παίρνουμε απεικόνιση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \Phi(u_0, t)$ η εικόνα της οποίας είναι καμπύλη της επιφάνειας. Το εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής της καμπύλης στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ είναι:

$$\underline{T_v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\,\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\,\underline{k}$$

Αντίστοιχα, κρατώντας το $v = v_0$ σταθερό, παίρνουμε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $t \mapsto \Phi(t, v_0)$ στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$:

$$\underline{T_u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\,\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\,\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\,\underline{k}$$



Εφόσον $\underline{T_u}$ και $\underline{T_v}$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα σε δύο καμπύλες της επιφάνειας στο σημείο $\Phi(u_0,v_0)$, το διάνυσμα $\underline{n} = \underline{T_u} \wedge \underline{T_v}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια σε αυτό το σημείο.

- Η επιφάνεια $S = \{ \Phi(u,v) : (u,v) \in D \} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι κανονική (ομαλή) στο σημείο $\Phi(u_0,v_0)$ αν $\underline{T_u} \wedge \underline{T_v} \neq \underline{0}$. Το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\Phi(u_0,v_0)$ γράφεται ως:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \underline{n} = 0$$

όπου $(x_0,y_0,z_0) = \Phi(u_0,v_0)$ και $\underline{n} = \underline{T_u} \wedge \underline{T_v}$.

- Η επιφάνεια S είναι "κανονική" αν είναι κανονική σε κάθε σημείο $\Phi(u_0,v_0) \in S$.

Παράδειγμα: Έστω ότι $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2+v^2$. Πού υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο; Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\Phi(1,0)$.

Λύση: Έχουμε:

$$\underline{T_u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\underline{k}$$

$$= \cos v\,\underline{i} + \sin v\,\underline{j} + 2u\,\underline{k}$$

$$\underline{T_v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\underline{k}$$

$$= -u\sin v\,\underline{i} + u\cos v\,\underline{j} + 2v\,\underline{k}$$

Και επομένως: $\underline{n} = \underline{T_u} \wedge \underline{T_v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 2v \end{vmatrix} =$

Σημ. $\underline{n} = T_u \wedge T_v = \underline{i}\,(2v\sin v - 2u^2\cos v) - \underline{j}\,(2v\cos v + 2u^2\sin v)$

$$+\,\underline{k}\,(\underbrace{u\cos^2 v + u\sin^2 v}_{u})$$

$$\Rightarrow (T_u \wedge T_v)(u_0, v_0) = (2v_0\sin v_0 - 2u_0^2\cos v_0)\,\underline{i} - (2v_0\cos v_0 + 2u_0^2\sin v_0)\,\underline{j} + u_0\,\underline{k}$$

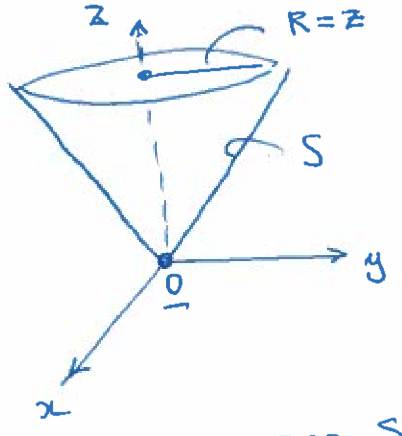
Καί επομένως $(T_u \wedge T_v)(u_0, v_0) = \underline{0} \Rightarrow u_0 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_0\sin v_0 = 0 \\ v_0\cos v_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_0^2(\sin^2 v_0 + \cos^2 v_0) = v_0^2 = 0 \Rightarrow (u_0, v_0) = (0,0).$$

$$\Rightarrow \Phi(u_0, u_0) = (0,0,0).$$

Και άρα τό μόνο μή-κανονικό σημείο στην επιφάνεια $S = \{\Phi(u,v) : (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$ είναι το σημείο $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια ~~τη~~ S είναι ο κώνος $z = x^2 + y^2$



Καί επομένως το μόνο σημείο της S στο οποίο δέν ορίζεται εφαπτόμενο επίπεδο είναι το $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Στό σημείο $(u_0, v_0) = (1,0)$ έχουμε $(x,y,z) = (1,0,1)$ καί $\underline{n} = T_u \wedge T_v = -2\underline{i} + \underline{k}$. Άρα τό εφαπτόμενο επίπεδο είναι:

$$(x-1,\, y,\, z-1) \cdot (-2, 0, 1) = 0 \Rightarrow 2(x-1) = z-1$$

$$\Rightarrow \underline{z = 2x-1}.$$

Εμβαδόν επιφανείας

Έστω παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $S = \{\Phi(u,v) : (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Έστω ότι η S είναι κανονική στο $\Phi(u,v) \in S$, δηλ. $\underline{T_u} \wedge \underline{T_v} \neq \underline{0}$, όπου

$$\underline{T_u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,\underline{k}$$

και

$$\underline{T_v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\,\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\,\underline{k}$$

Γενικά,
(Εξετάζουμε "τμηματικά κανονικές" επιφάνειες $S = \bigcup_i S_i$, $S_i = \Phi(D_i)$)

$\Phi_i : D_i \to \mathbb{R}^3$, όπου

- D_i στοιχειώδες χωρίο του $\mathbb{R}^2$ (x-απλό, y-απλό)
- Φ_i κλάσης C^1 και "1-1" εκτός ίσως από το σύνορο του D_i, ∂D_i
- $S_i = \Phi_i(D_i)$ κανονική, εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος σημείων.

Το εμβαδόν επιφάνειας $A(S)$ παραμετρικοποιημένης επιφάνειας S ορίζεται ως:

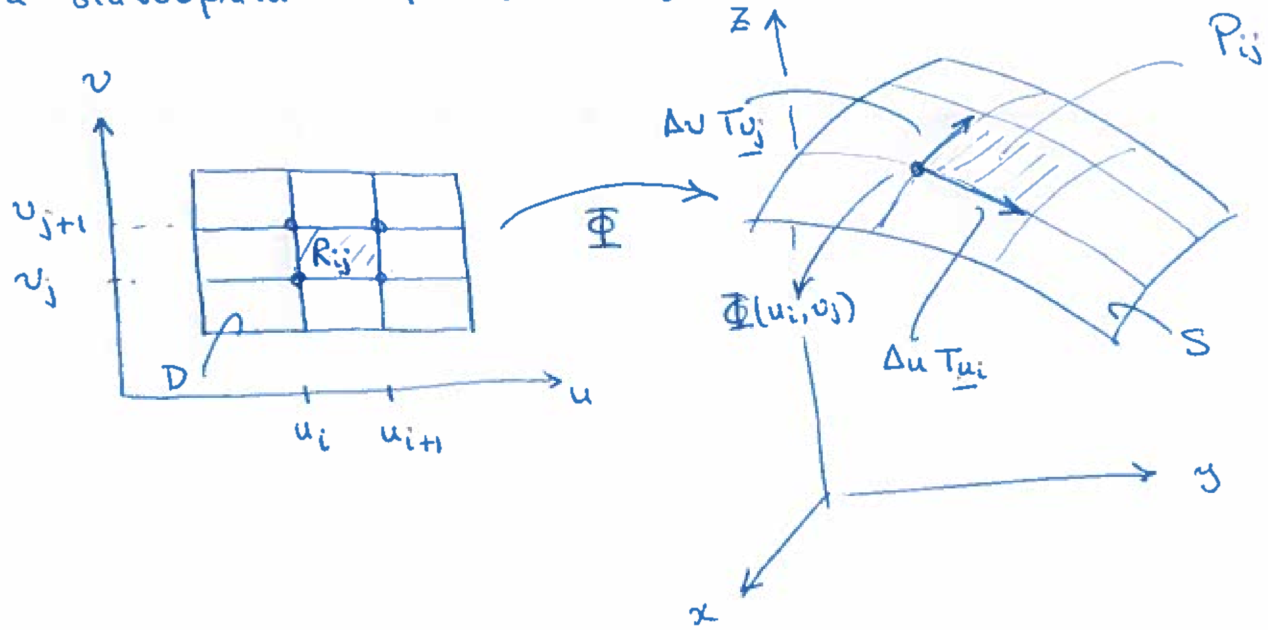
$$A(S) = \iint_D \|\underline{T_u} \wedge \underline{T_v}\|\, du\, dv$$

Αν $S = \bigcup_i S_i$ τμηματικά κανονική, τότε $A(S) = \sum_i A(S_i)$.

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ορθογώνιο R, στο uv επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες u και v. Θεωρούμε κανονική διαμέριση του R και έστω R_{ij} το (i,j) ορθογώνιο με κορυφές $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}), (u_{i+1}, v_{j+1})$, $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Έστω $T_{u_i}^{\Delta u}$ και $T_{v_j}\Delta v$ τα αντίστοιχα

Εφαπτόμενα διανύσματα στην επιφάνεια στο σημείο $\Phi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, όπου $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ και $\Delta v = v_{j+1} - v_j$.

Τα διανύσματα σχηματίζουν παραλληλόγραμμο P_{ij}



$$A(P_{ij}) = \| \Delta u\, \underline{T}_{u_i} \wedge \Delta v\, \underline{T}_{v_j} \| = \| \underline{T}_{u_i} \wedge \underline{T}_{v_j} \| \Delta u\, \Delta v$$

$$\Rightarrow A(S) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \| \underline{T}_{u_i} \wedge \underline{T}_{v_j} \| \Delta u\, \Delta v$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \iint_D \| \underline{T}_u \wedge \underline{T}_v \| \, du\, dv \qquad \square$$

Έχουμε: $$\underline{T}_u \wedge \underline{T}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \underline{j} \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + \underline{k} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$\Rightarrow \| \underline{T}_u \wedge \underline{T}_v \| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 \right]^{1/2} du\, dv.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $D = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$

και $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\theta) = (x,y,z)$, όπου

$$x(r,\theta) = r\cos\theta,\quad y(r,\theta) = r\sin\theta,\quad z(r,\theta) = r$$

(παραμετρικοποίηση κώνου). Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου.

<u>Λύση</u>: Έχουμε:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = r\sin\theta$$

Άρα $\|T_u \wedge T_v\| = \sqrt{r^2 + r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}\,r$

και:

$$A(S) = \iint_D \|T_u \wedge T_v\|\, dr\, d\theta = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{2}\, r\, d\theta\, dr =$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\int_{r=0}^{1} r\,dr = 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{2}\pi \qquad \square$$

(Αυστηρά πρέπει να δείξουμε ότι η Φ είναι 1-1 αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της στο εσωτερικό του D, δηλ. στο σύνολο

$$D^\circ = D \setminus \partial D = \{(r,\theta) : 0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi\}$$

Έστω $\Phi(r,\theta) = \Phi(r_1,\theta_1)$, $(r,\theta) \in D^\circ$, $(r_1,\theta_1) \in D^\circ$

$$\Phi(r,\theta)=\Phi(r_1,\theta_1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} r\cos\theta &= r_1\cos\theta_1 \\ r\sin\theta &= r_1 \sin\theta_1 \\ r &= r_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\theta_1 \\ \sin\theta &= \sin\theta_1 \\ r &= r_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\theta=\theta_1+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ &r=r_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\theta=\theta_1 \\ &r=r_1 \end{aligned} \quad (|\theta-\theta_1|<2\pi)$$

και επομένως πράγματι η Φ είναι "1-1" στο D°.

<u>Εμβαδόν ~~συναρτήσεων~~ επιφάνειας γραφήματος συναρτήσεων $z=g(x,y)$, $g\in C^1$</u>

Εδώ η S είναι στη μορφή: $z=g(x,y)$, $(x,y)\in D$ και

επιδέχεται παραμετρικοποίηση:

$$x=u,\ y=v,\ z=g(u,v) \quad \text{γιά} \quad (u,v)\in D$$

Έχουμε: $\underline{T_u}=\frac{\partial x}{\partial u}\underline{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\underline{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\underline{k}=\underline{i}+\frac{\partial g}{\partial u}\underline{k}$,

$$\underline{T_v}=\frac{\partial x}{\partial v}\underline{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\underline{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\underline{k}=\underline{j}+\frac{\partial g}{\partial v}\underline{k}$$

Και επομένως: $\underline{T_u}\wedge\underline{T_v}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}=$

$$=\underline{i}\left(-\frac{\partial g}{\partial u}\right)-j\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)+\underline{k} = -\frac{\partial g}{\partial x}\underline{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\underline{j}+\underline{k}$$

$$\Rightarrow \|\underline{T_u}\wedge\underline{T_v}\|=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow A(S)=\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}\; dA.$$

Ολοκληρώματα βαθμωτών συναρτήσεων επί επιφανειών

<u>Ορισμός</u>: Έστω επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$ που παραμετρικοποιείται με απεικόνιση $\Phi: D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου D στοιχειώδες χωρίο και $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Αν $f(x,y,z)$ είναι συνεχής συνάρτηση ορισμένη στην S, τότε το ολοκλήρωμα της f επί της S ορίζεται ως:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_S f\, dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \cdot \|T_u \wedge T_v\|\, du dv$$

και όπου

$$\|T_u \wedge T_v\| = \left[\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2\right]^{1/2}$$

(Αν $f \equiv 1$, τότε $\iint_S dS = A(S)$ της προηγούμενης παραγράφου).

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω επιφάνεια που ορίζεται από την απεικόνιση $\Phi: D \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta) = (x,y,z)$ και $D = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (ελικοειδές). Αν $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ να βρεθεί το $\iint_S f\, dS$.

<u>Λύση</u>: Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \sin\theta, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \cos\theta$$

και επομένως $\|T_r \wedge T_\theta\| = \sqrt{r^2 + \sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{r^2+1}$.

Επίσης $f(\Phi(r,\theta)) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, \theta) = \sqrt{r^2+1}$. Άρα

$$\iint_S f\, dS = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}\, d\theta\, dr = 2\pi \int_{r=0}^{1} (r^2+1)\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} + r\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{8\pi}{3} \qquad \square$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την $z = x^2+y$ και όπου $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Υπολογίστε το $\iint_S x\, dS$.

<u>Λύση:</u> Έχουμε

$$\iint_S f\, dS = \iint_D x\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=0}^{1} x\sqrt{1+4x^2+1}\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=0}^{1} x\,(4x^2+2)^{1/2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{y=-1}^{1}\int_{x=0}^{1} 8x\,(4x^2+2)^{1/2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{y=-1}^{1}\left[\frac{(4x^2+2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{1} dy$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\int_{y=-1}^{1}\left(6^{3/2}-2^{3/2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\cancel{2}\left(6\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(6\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)$$

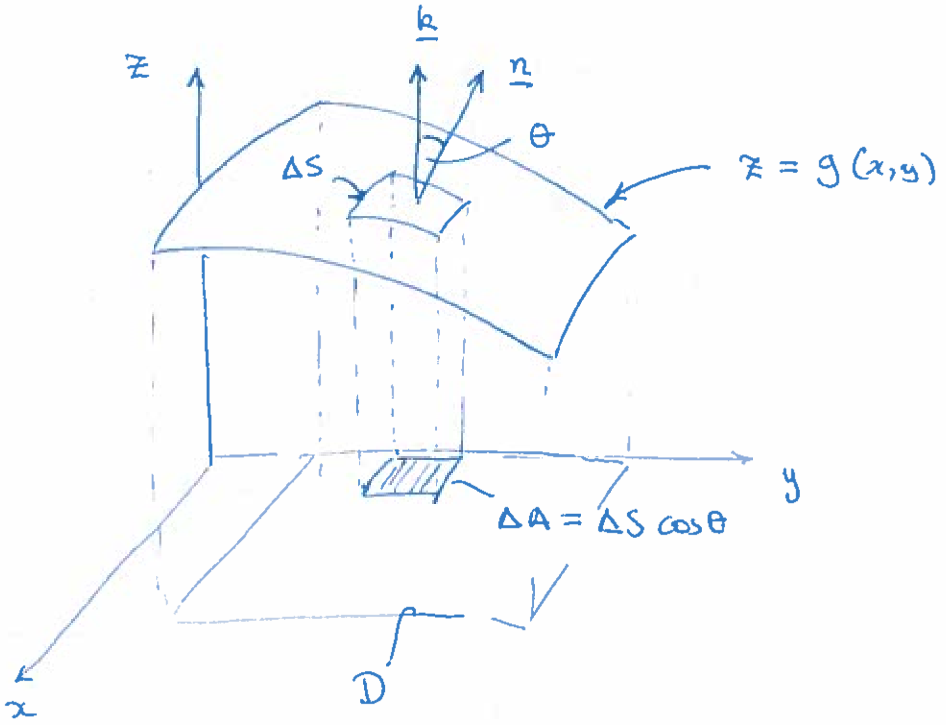
$$= \sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

<u>Ολοκληρώματα επί γραφημάτων</u>

Αν S είναι το γράφημα συνάρτησης $z = g(x,y)$ ένας εναλλακτικός τύπος για επιφανειακά ολοκληρώματα είναι

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{\cos\theta}\, dx\, dy$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα $\underline{n}$ στην επιφάνεια και το διάνυσμα $\underline{k}$ στο σημείο $(x, y, g(x,y))$:



Εφόσον η S περιγράφεται ως επιφάνεια στάθμης:

$$\varphi(x,y,z) = +z - g(x,y) = 0,$$

Έχουμε

$$\underline{n} = \underline{\nabla}\phi = -\frac{\partial g}{\partial x}\,\underline{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\,\underline{j} + \underline{k} \quad \perp S$$

Επομένως: $\underline{n}\cdot\underline{k} = \|\underline{n}\| \cos\theta = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\,\underline{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\,\underline{j} + \underline{k}\right)\cdot\underline{k} = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\;\cos\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

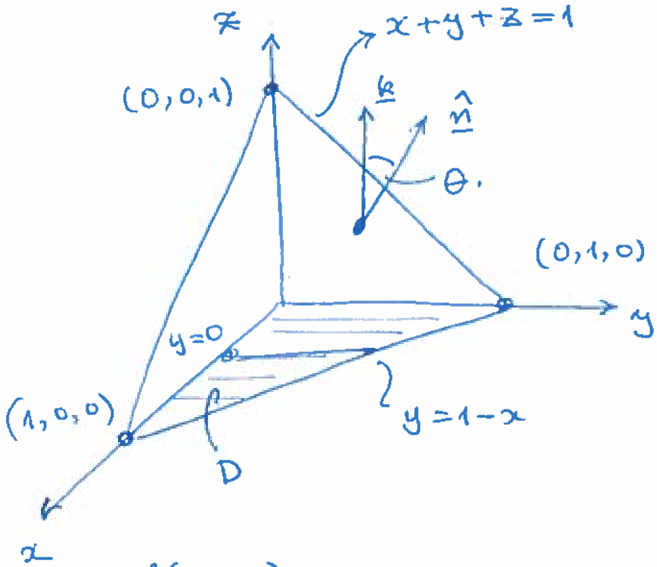
Από προηγούμενη ανάλυση:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,g(x,y)) \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}_{\|\underline{T_u}\wedge\underline{T_v}\|}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{\cos\theta}\,dx\,dy$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε το $\iint_S x\,dS$ όπου S το τρίγωνο με κορυφές $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$

Λύση:



Εξίσωση επιπέδου: $\overbrace{x+y+z=1}^{f(x,y,z)=} \Rightarrow z=1-x-y$

$\underline{n} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{k} = \underline{i}+\underline{j}+\underline{k}$. Άρα,

$\hat{\underline{n}} = \frac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}$

$\Rightarrow \cos\theta = \hat{\underline{n}}\cdot\underline{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}\right)\cdot\underline{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Και

$$\iint_S x\,dS = \iint_D \frac{x}{\cos\theta}\,dA = \iint_D \frac{x}{1/\sqrt{3}}\,dA$$

$$= \sqrt{3}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} x\,dy\,dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

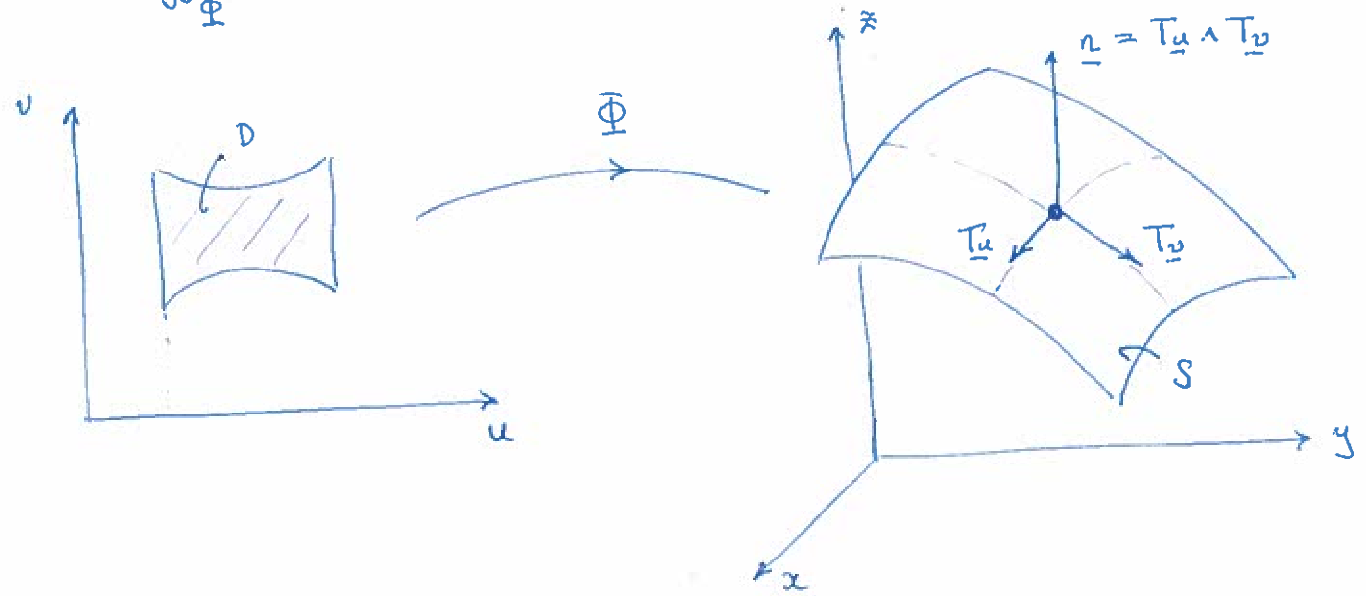
$$= \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right] = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

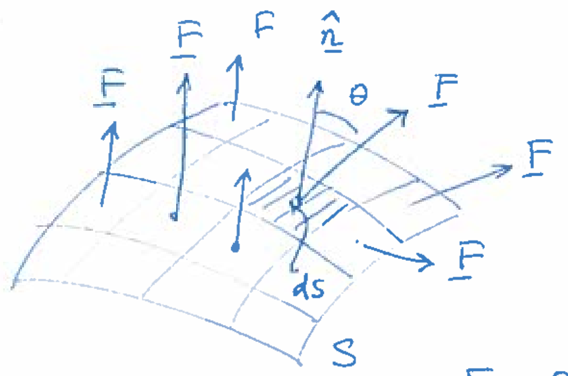
Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων

__Ορισμός:__ Έστω $\underline{F}$ διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $S = \Phi(D)$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα ~~της~~ του $\underline{F}$ επί της S ορίζεται ως:

$$\iint_{\Phi} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \iint_D \underline{F} \cdot (\underline{T_u} \wedge \underline{T_v})\, du\, dv$$



__Φυσική Ερμηνεία:__



Έστω $\underline{F}$ διανυσματικό πεδίο ταχύτητας ρευστού και S δεδομένη επιφάνεια. Ποιά η ροή του ρευστού Q (m^3/s) διαμέσου της επιφάνειας; Η ροή διαμέσου της dS είναι $F\cos\theta\, dS = \underline{F}\cdot(\hat{\underline{n}}\, dS) := \underline{F}\cdot d\underline{s}$ (όπου $\hat{\underline{n}} \perp dS$, $\|\hat{\underline{n}}\| = 1$). Άρα η συνολική ροή είναι $Q = \iint_S \underline{F}\cdot d\underline{s}$.

__Παράδειγμα:__ Έστω D το ορθογώνιο του επιπέδου $\theta\phi$ που ορίζεται από τις ανισότητες $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ και έστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την παραμετρικοποίηση:

$x = \cos\theta \sin\varphi$, $y = \sin\theta \sin\varphi$, $z = \cos\varphi$

(Επομένως S η επιφάνεια μοναδιαίας σφαίρας ο παραμετρικοποιημένη σε σφαιρικές συντεταγμένες $r=1, \theta, \phi$.). Έστω $\underline{r}$ τό διάνυσμα θέσης $\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ ($\underline{r} \in S$). Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_\Phi \underline{r} \cdot \underline{ds}$

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε:

$$\underline{T_\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\sin\theta \sin\varphi\,\underline{i} + \cos\theta \sin\varphi\,\underline{j}$$

$$\underline{T_\varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \cos\theta \cos\varphi\,\underline{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\underline{j} - \sin\varphi\,\underline{k}$$

Καί: $$\underline{T_\theta} \wedge \underline{T_\varphi} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}(-\cos\theta\sin^2\varphi) - \underline{j}(\sin\theta\sin^2\varphi) + \underline{k}(-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$= -\underline{i}\cos\theta\sin^2\varphi - \underline{j}\sin\theta\sin^2\varphi - \underline{k}\sin\varphi\cos\varphi$$

Άρα: $$\underline{r}\cdot(\underline{T_\theta}\wedge\underline{T_\varphi}) = (\cos\theta\sin\varphi\,\underline{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\underline{j} + \cos\varphi\,\underline{k})\cdot(-\cos\theta\sin^2\varphi\,\underline{i} - \sin\theta\sin^2\varphi\,\underline{j} - \sin\varphi\cos\varphi\,\underline{k})$$

$$= -\cos^2\theta\sin^3\varphi - \sin^2\theta\sin^3\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi$$

$$= -\sin^3\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi = -\sin\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$= -\sin\varphi$$

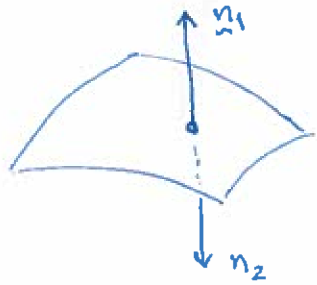
Επομένως $$\iint_\Phi \underline{r}\cdot\underline{ds} = \iint_D \underline{r}\cdot(\underline{T_\theta}\wedge\underline{T_\varphi})\,d\theta\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} -\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 2\pi\left[\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi} = 2\pi(-1-1) = -4\pi$$

Παρατήρηση: Η επιφάνεια της σφαίρας είναι $= 4\pi$.

<u>Προσανατολισμός</u>: Επεκτείνωμε την έννοια προσανατολισμού διαδρομής στην έννοια προσανατολισμού επιφάνειας:

Μία προσανατολισμένη επιφάνεια είναι <u>δίπλευρη</u> επιφάνεια S με μια εξωτερική/θετική πλευρά και μία εσωτερική/αρνητική πλευρά που αντιστοιχούν σέ δύο μοναδιαία διανύσματα $\underline{n}_1$ και $\underline{n}_2$, αντίστοιχα, κάθετα σέ κάθε σημείο $(x,y,z)\in S$.



Αν $\Phi: D\to\mathbb{R}^3$ παραμετρικοποίηση της S, τότε αν η S είναι κανονική στό $\Phi(u_0,v_0)$, $(u_0,v_0)\in D$, ~~τότε~~

$$\frac{T_{u_0}\wedge T_{v_0}}{\|T_{u_0}\wedge T_{v_0}\|} = \pm \underline{n}_1 \qquad (-\underline{n}_1=\underline{n}_2)$$

Αν $T_u\wedge T_v$ έχει κατεύθυνση πρός το "εξωτερικό" της επιφάνειας τότε λέμε ότι η Φ διατηρεί τον προσανατολισμό, διαφορετικά τον αντιστρέφει. (Γιά κλειστές επιφάνειες, π.χ. σφαίρες, η "εξωτερική" επιφάνεια είναι προφανής διαισθητικά, ενώ γιά ανοικτές επιφάνειες μπορούν νά καθοριστούν αυθαίρετα).

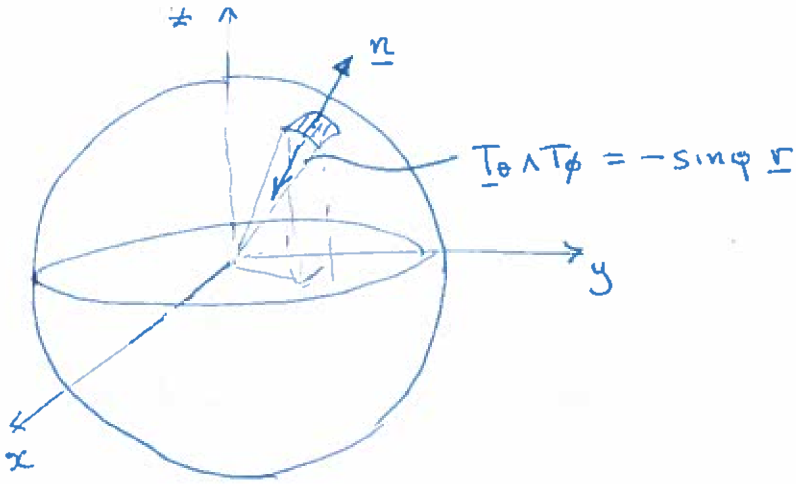
<u>Παράδειγμα</u>: Στό προηγούμενο παράδειγμα:

$$T_\theta\wedge T_\varphi = -\underline{i}\cos\theta\sin^2\varphi - \underline{j}\sin\theta\sin^2\varphi - \underline{k}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= -\sin\varphi\,(\sin\varphi\cos\theta\,\underline{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\underline{j} + \cos\varphi\,\underline{k})$$

$$= -\sin\varphi\,\underline{r}$$

Καί εφόσον $0\le\varphi\le\pi \Rightarrow -\sin\varphi\le 0$ το διάνυσμα $T_\theta\wedge T_\varphi$ ~~από~~ κατευθύνεται προς τό εσωτερικό της σφαίρας και η ~~πτο~~ παραμετρικοποίηση αντιστρέφει τον προσανατολισμό.



Παρατηρούμε επίσης ότι για την συγκεκριμένη παραμετρικοποίηση:

$$\iint_\Phi \underline{r}\cdot d\underline{S} = \iint_D \underline{r}\cdot(\underline{T_\theta}\wedge \underline{T_\varphi})\,d\theta\,d\varphi = \iint_D \underline{r}\cdot\underline{r}\,(-\sin\varphi)\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \iint_D \underbrace{\|\underline{r}\|^2}_{1}(-\sin\varphi)\,d\theta\,d\varphi = \iint_D(-\sin\varphi)\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}(-\sin\varphi)\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}(-\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= 2\pi\left[\cos\varphi\right]_0^{\pi} = -4\pi = (-1)\times \text{Εμβαδόν επιφανείας μοναδιαίας σφαίρας}$$

Μία παραμετρικοποίηση που διατηρεί τον προσανατολισμό προκύπτει αν αναστρέψουμε τον ρόλο των (θ,φ), δηλ.

$$\hat{D} = \{(\varphi,\theta) : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Τότε $\underline{T_\varphi}\wedge\underline{T_\theta} = -\underline{T_\theta}\wedge\underline{T_\varphi} = \sin\varphi\,\underline{r}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό της σφαίρας και $\iint_{\hat\Phi}\underline{r}\cdot d\underline{S} = 4\pi.$

Ανεξαρτησία από παραμετρικοποίηση

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Θεώρημα: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια και Φ_1, Φ_2 δύο κανονικές παραμετρικοποιήσεις που διατηρούν τον προσανατολισμό. Αν $\underline{F}$ συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην S, τότε

$$\iint_{\Phi_1} \underline{F}\cdot d\underline{S} = \iint_{\Phi_2} \underline{F}\cdot d\underline{S} \qquad \left(:= \iint_S \underline{F}\cdot d\underline{S}\right)$$

Αν η Φ_1 διατηρεί τον προσανατολισμό και η Φ_2 τον αντιστρέφει, τότε

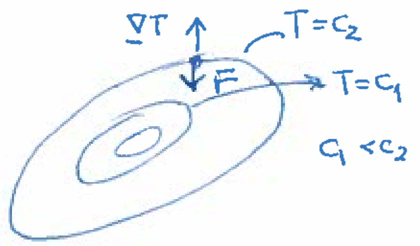
$$\iint_{\Phi_1} \underline{F}\cdot d\underline{S} = \iint_S \underline{F}\cdot d\underline{S} = -\iint_{\Phi_2} \underline{F}\cdot d\underline{S}$$

Αν f συνεχής (βαθμωτή) συνάρτηση ορισμένη στην S και Φ_1, Φ_2 είναι παραμετρικοποιήσεις της S, τότε:

$$\iint_{\Phi_1} f\, dS = \iint_{\Phi_2} f\, dS$$

(ανεξάρτητα από προσανατολισμό).

Παράδειγμα: Στην Φυσική αν $T(x,y,z)$ είναι (βαθμωτό) πεδίο θερμοκρασίας κλάσης C^1, τότε η θερμότητα $\underline{F}$ ρέει κατά το διανυσματικό πεδίο $\underline{F} = -k\underline{\nabla}T$ όπου k θετική σταθερά.



Έστω $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ και

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

(με τον συνηθισμένο (θετικό) προσανατολισμό).

Να βρεθεί η ροή θερμότητας διαμέσου της S αν $k=1$.

Λύση: Έχουμε $\underline{F} = -\nabla T = -2x\underline{i} - 2y\underline{j} - 2z\underline{k} = -2\underline{r}$

$$Q = \iint_S \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\, dS = \iint_S -2\underline{r}\,\frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|}\, dS = \iint_S -2\,\frac{\|\underline{r}\|^2}{\|\underline{r}\|}\, dS = \iint_S -2\,\underbrace{\|\underline{r}\|}_{1}\, dS$$

$$= -2\iint_S dS = -2(4\pi) = -8\pi$$

Απόκλιση - Στροβιλισμός (Divergence - Curl)

Γιά τις πράξεις της απόκλισης και του στροβιλισμού χρησιμοποιούμε τον διανυσματικό τελεστή "ανάδελτα" ($\underline{\nabla}$)

$$\underline{\nabla} \equiv \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

τον οποίο έχουμε ήδη συναντήσει στον ορισμό κλίσης βαθμωτού πεδίου, $\underline{\nabla} f = \underline{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial f}{\partial z}$

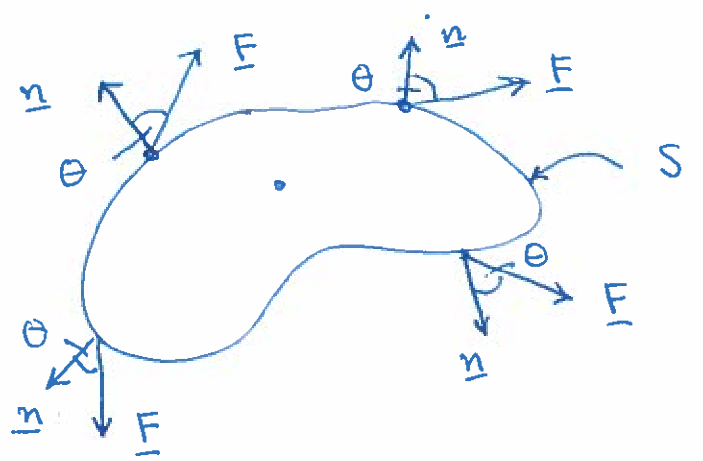
<u>Ορισμός</u>: Αν $\underline{F}(x,y,z) = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k}$ διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$, τότε η απόκλιση του $\underline{F}$ είναι το βαθμωτό πεδίο:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

<u>Ισοδύναμος ορισμός</u>: (ανεξάρτητος από σύστημα συντεταγμένων):

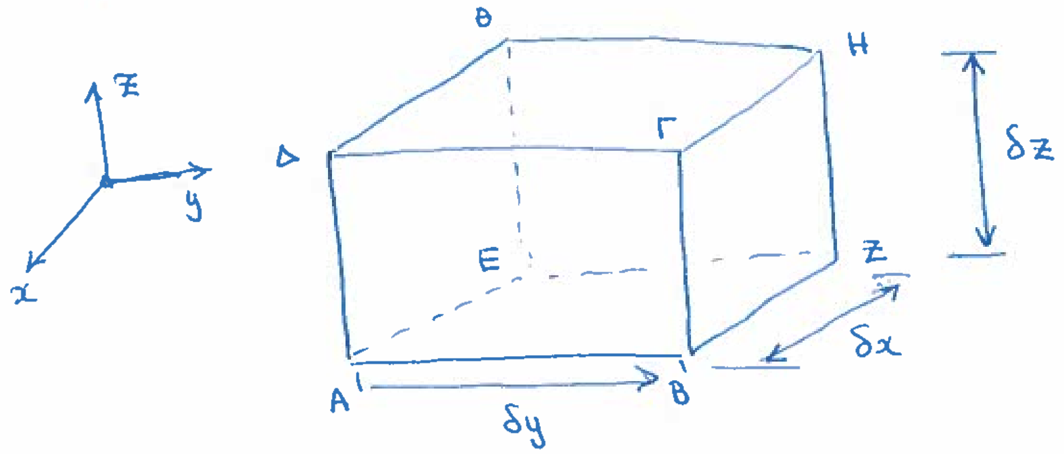
$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = \lim_{\delta V\to 0} \frac{\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\, dS}{\delta V}$$

όπου S προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που περικλείει όγκο δV και $\underline{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο σε κάθε σημείο της S με θετική κατεύθυνση, δηλ. προς το εξωτερικό της επιφάνειας.

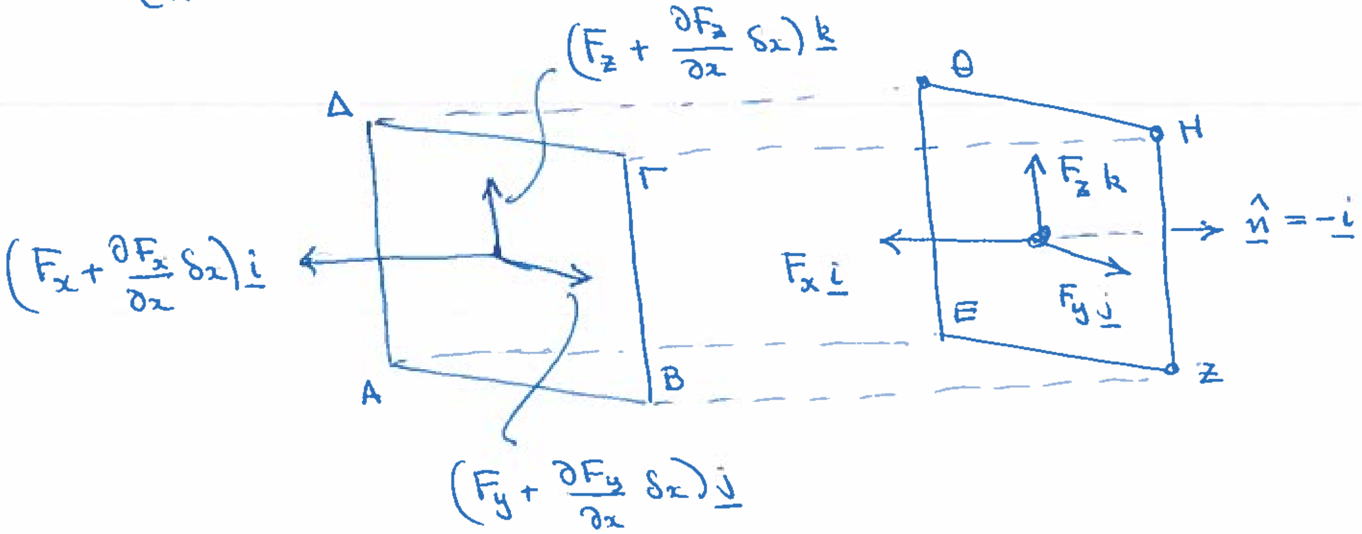


Γεωμετρική ερμηνεία (Ισοδυναμία ορισμών)

Έστω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με (μικρά) μήκη ακμών $\delta x, \delta y, \delta z$ και επιφάνειες (έδρες) παράλληλες στά επίπεδα xy, xz, yz.



Εξετάζουμε την ροή πεδίου $\underline{F}$ στήν κατεύθυνση του x-άξονα. Η ροή μέσω της επιφάνειας του ~~κύ~~ παραλληλεπιπέδου είναι μή-μηδενική μόνο στις επιφάνειες (έδρες) ΕΖΗΘ ("πίσω") καί ΑΒΓΔ ("εμπρός").



Προσεγγιστικά (γιά "μικρά" δx, δy, δz):

$$\iint_{EZH\Theta} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\, dS \simeq (F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k})\cdot(-\underline{i})\ \delta y\, \delta z$$

$$= -F_x\, \delta y\, \delta z$$

$$\iint_{AB\Gamma\Delta} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS \cong \left[\left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x}\delta x\right)\underline{i} + (\cdot)\,\underline{j} + (\cdot)\,\underline{k}\right]\cdot\underline{i}\,\delta y\,\delta z$$

$$= \cancel{\left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z}$$

$$= F_x\,\delta y\,\delta z + \frac{\partial F_x}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

Επομένως, συνολική ροή στην διεύθυνση του x-άξονα:

$$\iint_{AB\Gamma\Delta} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS + \iint_{EZH\Theta} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS \cong \frac{\partial F_x}{\partial x}\,\underbrace{\delta x\,\delta y\,\delta z}_{\delta V}.$$

Παρόμοια:

$$\iint_{B\Gamma HZ} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS + \iint_{AE\Theta\Delta} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS \cong \frac{\partial F_y}{\partial y}\,\underbrace{\delta x\,\delta y\,\delta z}_{\delta V}$$

και

$$\iint_{ABZE} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS + \iint_{\Delta\Gamma H\Theta} \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS \cong \frac{\partial F_z}{\partial z}\,\underbrace{\delta x\,\delta y\,\delta z}_{\delta V}.$$

Άρα,

$$\iint_S \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS \cong \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\delta V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\iint_S \underline{F}\cdot\hat{\underline{n}}\,dS}{\delta V} \cong \underline{\nabla}\cdot\underline{F}$$

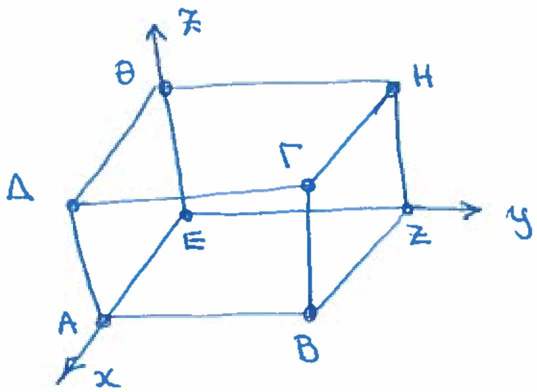
και η προσέγγιση γίνεται ακριβέστερη καθώς $\delta x, \delta y, \delta z \to 0$.

Θεώρημα (Gauss): Εστω W συμμετρικό στοιχειώδες χωρίο του $\mathbb{R}^3$. Συμβολίζουμε με ∂W την προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια που φράσσει το W. Αν $\underline{F}$ ομαλό διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο W, τότε

$$\iiint_W (\underline{\nabla}\cdot\underline{F})\,dV = \iint_{\partial W} \underline{F}\cdot d\underline{s} \quad \left(= \iint_{\partial W} \underline{F}\cdot\underline{n}\,ds\right)$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου $\underline{F} = x^2yz\,\underline{i} + y^2xz\,\underline{j} + z^2xy\,\underline{k}$ επί της επιφάνειας S μοναδιαίου κύβου που φράσσεται από τις επιφάνειες $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ και $z=1$.

Λύση: 1ος τρόπος:



Γιά να απλοποιήσουμε την περιγραφή των 6 εδρών του κύβου ορίζουμε:

ΑΒΓΔ = "εμπρός"
ΕΖΗΘ = "πίσω",
ΑΕΘΔ = "αριστερή", ΒΓΗΖ = "δεξιά", ΑΒΖΕ = "κατω",
ΓΔΘΗ = "πάνω". Εχουμε:

$$\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS = \iint_{\text{κατω}} \underline{F}\cdot(-\underline{k})\,dS + \iint_{\text{πάνω}} \underline{F}\cdot\underline{k}\,dS$$

$$+ \iint_{\text{αριστ.}} \underline{F}\cdot(-\underline{j})\,dS + \iint_{\text{δεξ.}} \underline{F}\cdot\underline{j}\,dS$$

$$+ \iint_{\text{πισω}} \underline{F}\cdot(-\underline{i})\,dS + \iint_{\text{εμπρός}} \underline{F}\cdot\underline{i}\,dS$$

$$= -\iint_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} F_z\, dS + \iint_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} F_z\, dS - \iint_{\alpha\rho\iota\sigma\tau.} F_y\, dS + \iint_{\delta\varepsilon\xi.} F_y\, dS$$

$$- \iint_{\pi\acute{\iota}\sigma\omega} F_x\, dS + \iint_{\acute{\varepsilon}\mu\pi\rho\sigma\varsigma} F_x\, dS$$

$$= -\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \cancelto{0}{0^2 xy}\, dy\, dx + \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} 1^2 xy\, dy\, dx$$

$$- \int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1} \cancelto{0}{0^2 xz}\, dz\, dx + \int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1} 1^2 xz\, dz\, dx$$

$$- \int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} \cancelto{0}{0^2 yz}\, dz\, dy + \int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} 1^2 yz\, dz\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} x \int_{y=0}^{1} y\, dy\, dx + \int_{x=0}^{1} x \int_{z=0}^{1} z\, dz\, dx$$

$$+ \int_{y=0}^{1} y \int_{z=0}^{1} z\, dz\, dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}. //$$

2^{os} τρόπος: $\nabla \cdot \underline{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = 2xyz + 2xyz + 2xyz$
$= 6xyz.$

Άρα (Θεώρημα Gauss): $\iint_S \underline{F}\cdot \underline{n}\, dS = \iiint_W 6xyz\, dx\, dy\, dz =$

$$= 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} //$$

Ορισμός (Στροβιλισμός): Αν $\underline{F}(x,y,z) = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$ είναι διανυσματικό πεδίο, τότε ο στροβιλισμός (curl) του $\underline{F}$ είναι το διανυσματικό πεδίο:

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \left(\underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge \left(F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \underline{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \underline{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

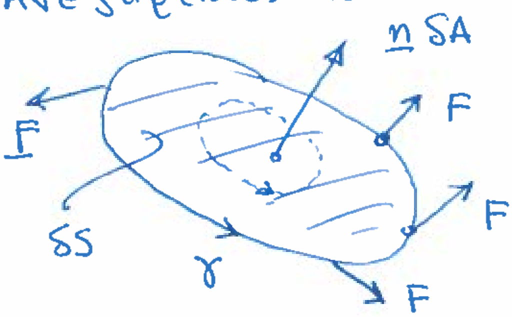
Παράδειγμα: Βρείτε το $\underline{\nabla} \wedge \underline{F}$ αν $\underline{F} = xy\,\underline{i} - \sin z\,\underline{j} + \underline{k}$

Λύση: $$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & -\sin z & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}\,(0 + \cos z) - \underline{j}\,(0-0) + \underline{k}\,(0 - x)$$

$$= \cos z\,\underline{i} - x\,\underline{k}$$

Ισοδύναμος ορισμός στροβιλισμού (Ανεξάρτητος από Καρτεσιανές συντεταγμένες):



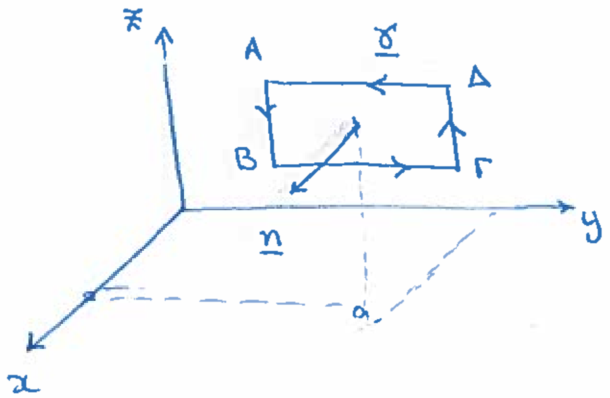
$$(\underline{\nabla} \wedge \underline{F})_{\underline{n}} = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{ds}}{\delta A}$$

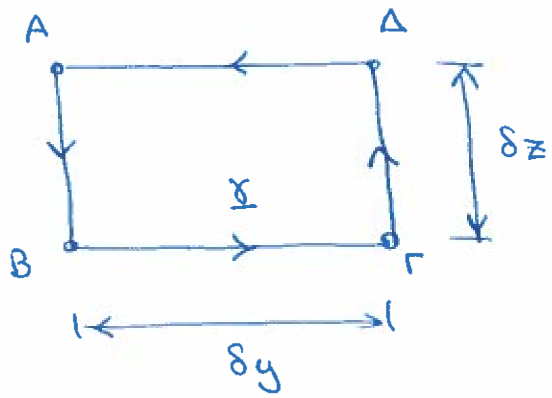
όπου $(\underline{\nabla} \wedge \underline{F})_{\underline{n}}$ η προβολή του $\underline{\nabla} \wedge \underline{F}$ στην διεύθυνση $\underline{n}$, $\|\underline{n}\|=$

$\underline{\gamma} = \partial \Delta S$ διαδρομή με αντιωρολόγια προσανατολισμό που περικλείει επιφάνεια $\underline{\delta S} = \underline{n}\,\delta A$.

Γεωμετρική ερμηνεία (Ισοδυναμία ορισμών)

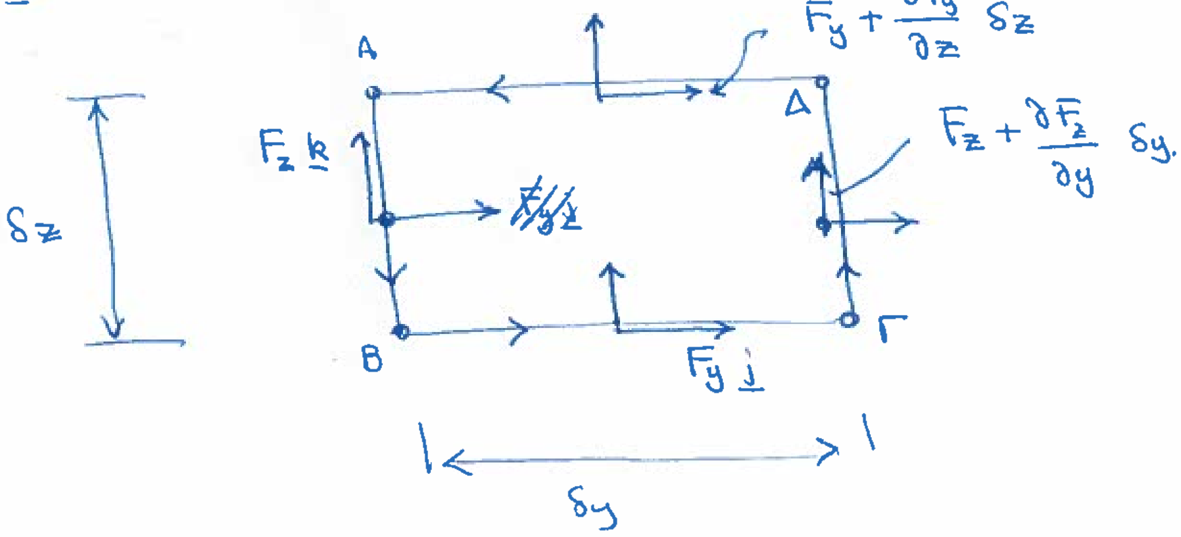
Έστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέ πλευρές "μικρού" μήκους $\delta y, \delta z$ σε επίπεδο παράλληλο μέ το επίπεδο yz





Υπολογίζουμε (προσεγγιστικά) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$\cancel{\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{s}\, ds = \int_\gamma \underline{F}\cdot \underline{n}\, ds}$ $\quad \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{s}$:



$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{s} \cong -F_z\,\delta z + F_y\,\delta y + \left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial y}\delta y\right)\delta z - \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial z}\delta z\right)\delta y$$

$$\cong \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\delta z\,\delta y$$

$$\cong \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\delta A = (\underline{\nabla}\wedge\underline{F})_x\,\delta A$$

Παρόμοια (αλλάζοντας τον προσανατολισμό των ορθογωνίων παραλληλογράμμων):

$$(\underline{\nabla}\wedge \underline{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad (\underline{\nabla}\wedge \underline{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

<u>Θεώρημα</u>: Αν $f(x,y,z)$ κλάσης C^2, τότε $\underline{\nabla}\wedge\underline{\nabla} f = \underline{0}$

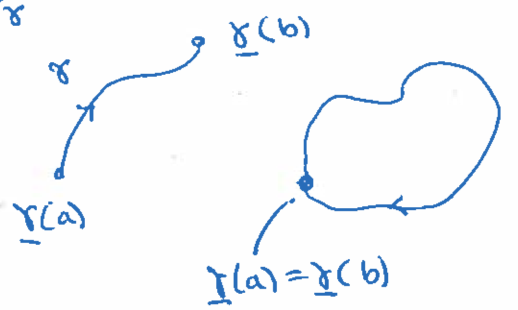
<u>Απόδειξη 1</u>: (από τον 1° ορισμό):

$$\underline{\nabla}\wedge\underline{\nabla} f = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \underline{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) - \underline{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) + \underline{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \underline{0}$$

λόγω ισότητας μεικτών παραγώγων για C^2 συναρτήσεις.

<u>Απόδειξη 2</u>: Έστω $\underline{F} = \underline{\nabla} f$. Τότε το $\underline{F}$ είναι συντηρητικό πεδίο και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του σε κάθε κλειστή καμπύλη είναι 0. (Αν $\underline{F}$ συντηρητικό και $\underline{\gamma}$ απλή διαδρομή, τότε $\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{ds} = f(\underline{\gamma}(b)) - f(\underline{\gamma}(a))$

Για κλειστές καμπύλες γ $\gamma(a) = \gamma(b)$ και επομένως $\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{ds} = 0$).



Εφόσον $\underline{\nabla}\wedge\underline{F}$ είναι το όριο πηλίκων της μορφής $\dfrac{\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{ds}}{\delta A}$ για κλειστές διαδρομές $\underline{\gamma} = \partial S$, ~~τότε~~ έχουμε ότι $\underline{\nabla}\wedge\underline{\nabla} f = \underline{0}$. □

Ορισμός: Αν $\nabla\wedge F = 0$, τότε το $\underline{F}$ λέγεται αστρόβιλο.

Θεώρημα: Αν $\underline{F} = \underline{F}(x,y,z)$ διανυσματικό πεδίο κλάσης C^2 τότε $\operatorname{div} \operatorname{curl} \underline{F} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = 0$.

Απόδειξη:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \left(\underline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial}{\partial y} + \underline{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\underline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial}{\partial y} + \underline{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\underline{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \underline{j} \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \underline{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right)$$

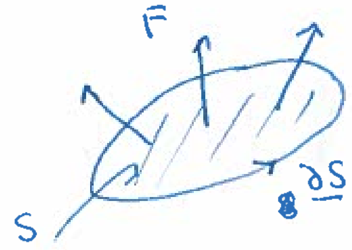
$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y}} = 0$$

πάλι λόγω ισότητας μικτών μερικών παραγώγων $2^{ης}$ τάξης για C^2 συναρτήσεις. ∎

Θεώρημα (Stokes): Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια που ορίζεται από 1-1 παραμετρικοποίηση $\Phi: D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ όπου D απλό χωρίο. Αν ∂S είναι το προσανατολισμένο σύνορο της S και $\underline{F}$ διανυσματικό πεδίο C^1 στο S, τότε:

$$\iint_S (\nabla \wedge \underline{F}) \cdot d\underline{S} = \int_{\partial S} \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

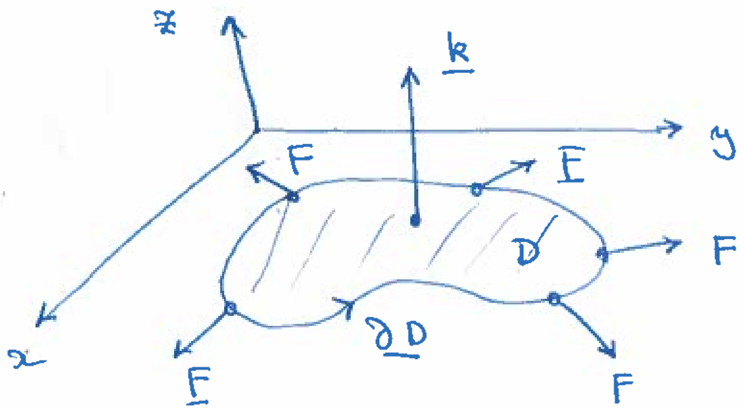


Αν η S δεν έχει σύνορο (π.χ είναι σφαίρα) το αριστερό ολοκλήρωμα ισούται με 0.

Ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Stokes είναι το Θεώρημα του Green.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ απλό χωρίο και ∂D το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του. Αν $\underline{F}(x,y) = F_x(x,y)\underline{i} + F_y(x,y)\underline{j}$ είναι διανυσματικό πεδίο C^1 στο D, τότε

$$\int_{\partial D} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \iint_D (\nabla \wedge \underline{F}) \cdot \underline{k} \, dA$$



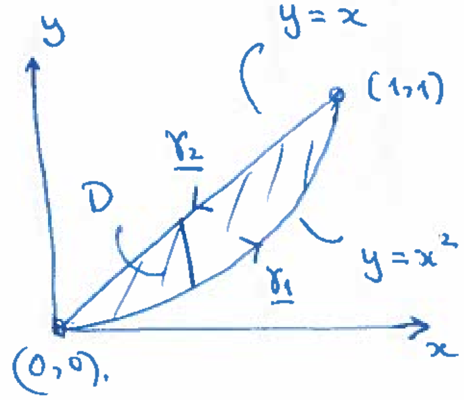
<u>Παρατήρηση</u>: Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\nabla \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \underline{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

και επομένως: $\int_{\partial D} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \iint_D (\nabla \wedge \underline{F}) \cdot \underline{k} \, dA = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dA$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} (F_x \underline{i} + F_y \underline{j})(\underline{i}\,dx + \underline{j}\,dy) = \int_{\partial D} F_x\,dx + F_y\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dx\,dy$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\underline{F} = \underbrace{xy^2}_{F_x}\,\underline{i} + \underbrace{(x+y)}_{F_y}\,\underline{j}$. Επιβεβαιώστε το Θεώρημα Green γιά το χωρίο D στό 1° τεταρτημόριο του επιπέδου xy που φράσσεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=x$.



<u>Λύση</u>: Εστω $\underline{\gamma} = \underline{\gamma_1} + \underline{\gamma_2}$

Υπολογίζουμε αρχικά τον στροβιλισμό $\underline{\nabla} \wedge \underline{F}$:

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x+y & 0 \end{vmatrix} = \underline{k}\,(1-2xy).$$

$$\Rightarrow (\underline{\nabla} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{k} = 1-2xy \quad \text{και επομένως}$$

$$\iint_D (1-2xy)\, dx\, dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (1-2xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[y - xy^2 \right]_{y=x^2}^{x} dx = \int_{x=0}^{1} \left((x-x^3) - (x^2 - x^5) \right) dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^3 - x^2 + x^5)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6-3-4+2}{12} = \frac{1}{12} \,//$$

Υπολογίζουμε απ' ευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\underline{\gamma}} F_x\, dx + F_y\, dy = \int_{\underline{\gamma}} xy^2\, dx + (x+y)\, dy = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

$$\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} x \cdot x^4 \, dx + (x+x^2)\, 2x \, dx = \int_{\gamma_1} (x^5 + 2x^2 + 2x^3)\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^5 + 2x^2 + 2x^3)\, dx = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1+4+3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\int_{\gamma_2} = -\int_{\gamma_2^-} = -\int_0^1 (x^3 + 2x)\, dx = -\left[\frac{x^4}{4} + x^2 \right]_0^1 =$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + 1 \right) = -\frac{5}{4}.$$

Επομένως $\displaystyle \int_{\underline{\gamma}} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{16-15}{12} = \frac{1}{12}$ //

όπως προηγουμένως.