Άσκηση 1

Να βρεθούν τα μήκη των καμπυλών:

α) $\underline{\gamma}(t) = (a\cdot\cos t,\ a\cdot\sin t,\ bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 2\pi]$.

β) $\underline{\gamma}$ που είναι η τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = \frac{1}{5}x^2 + y^2$ και του επιπέδου $z = 3 - 2y$.

Λύση

α) $$l = \int_0^{2\pi} \|\underline{\gamma}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$

β) Πρώτα πρέπει να βρούμε την $\underline{\gamma}$.

Η προβολή της καμπύλης στο xy-επίπεδο έχει εξίσωση:

$$\frac{1}{5}x^2 + y^2 = 3 - 2y \iff \frac{x^2}{20} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Αυτή είναι έλλειψη και μία παραμέτρησή της είναι:

$$x(t) = \sqrt{20}\cos t = 2\sqrt{5}\cdot\cos t \ , \quad y(t) = -1 + 2\sin t \ , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Άρα μία παραμέτρηση της $\underline{\gamma}$ είναι η:

$$\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2\sqrt{5}\cos t,\ -1+2\sin t,\ 5 - 4\sin t)$$

(αφού $z(t) = 3 - 2y(t)$ από υπόθεση)

Άρα $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{20 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 16 \cdot \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\pi\sqrt{5}\,.$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

i) $\int_\gamma (2x+3yz)\,ds$ κατά μήκος της καμπύλης με παραμέτρηση

$$\underline{\gamma}(t) = (t, 2\cos t, 2\sin t) \quad , \quad 0 \le t \le \pi$$

ii) $\int_\gamma (2xy+3yz)\,ds$ όπου γ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα

$A(1,0,0)$ και $B(2,-2,2)$

iii) $\int_\gamma x\,ds$ όπου γ το τόξο κύκλου $x^2+y^2=4$, $x>0$, $y>0$

Λύση

i) $\gamma(t) = (\underset{x(t)}{t}, \underset{y(t)}{2\cos t}, \underset{z(t)}{2\sin t})$ άρα $\gamma'(t) = (1, -2\sin t, 2\cos t)$ και

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{5}$$

οπότε $\int_\gamma (2x+3yz)\,ds = \int_0^\pi (2t + 3\cdot 2\cos t \cdot 2\sin t)\|\gamma'(t)\|\,dt =$

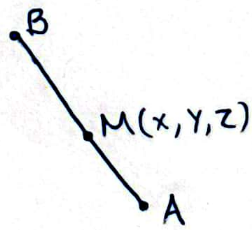
$$= \int_0^\pi (2t + 12\cos t\cdot\sin t)\sqrt{5}\,dt = 2\sqrt{5}\int_0^\pi (t + 6\sin t\cdot\cos t)\,dt =$$

$$= \pi^2\sqrt{5}.$$

ii) Μία παραμέτρηση του ευθύγραμμου τμήματος AB δίνεται ως εξής: αν $M(x,y,z)$ τυχαίο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB έχουμε $AM \parallel AB \Rightarrow AM = t\,AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1, y-0, z-0) = t(2-1, -2-0, 2-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1, y, z) = (t, -2t, 2t)$$



άρα $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1+t, -2t, 2t)$

$\gamma'(t) = (1, -2, 2)$ και $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$

Για τα σημεία A, B έχουμε: $z_A = 2t_A \Rightarrow t_A = 0$ και

$$z_B = 2t_B \Rightarrow t_B = 1$$

Άρα $\int_\gamma (2xy + 3yz)\, ds = \int_0^1 (2\cdot(1+t)\cdot(-2t) + 3\cdot(-2t)\cdot 2t)\cdot \|\gamma'(t)\|\, dt =$

$= \int_0^1 (-4t - 16t^2)\cdot 3\, dt = -22.$

iii) Εδώ η καμπύλη μας είναι κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας 2. Μία παραμέτρησή του είναι η εξής:

$x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$ με $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ αφού $x, y > 0$

Οπότε $\underline{\gamma}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ και $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$

και $\|\gamma'(t)\| = 2$

Άρα $\int_\gamma x\, ds = \int_0^{\pi/2} 2\cos t \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos t \cdot 2\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt$

$= 4.$

Για το (ii) ένας άλλος τρόπος παραμέτρησης του ευθύγραμμου τμήματος είναι $\underline{\gamma}(t) = A + t(B - A)$.

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα :

i) $I = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s}$ όπου $\underline{F} = (\sin x, x+y, e^z)$ και $\underline{\gamma}(t) = (t, t^2, \ln t)$

με $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$

ii) $I = \int_\gamma x^2 dx - yz\, dy + xy\, dz$ κατά μήκος της διαδρομής

$\gamma : \{x^2+y^2 = 1 \ , \ x+y+z = 1\}$

Λύση

i) $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, \ln t)$

$\underline{\gamma}'(t) = (1, 2t, 1/t)$

$$I = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, t+t^2, e^{\ln t}) \cdot (1, 2t, 1/t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\sin t + 2t(t+t^2) + t \cdot \frac{1}{t}\right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\sin t + 2t^2 + 2t^3 + 1\right] dt$$

$$= \frac{16\pi^3}{3} + 16\pi^4 + 2\pi .$$

ii) Από την εξίσωση $x^2+y^2=1$ προκύπτει ότι $x(t) = \cos t$ και $y(t) = \sin t$ και από την δεύτερη ότι $z(t) = 1 - \cos t - \sin t$ για $t \in [0, 2\pi)$. Άρα $dx = -\sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$,

$$dz = (\sin t - \cos t)\, dt$$

και το $I = \int_0^{2\pi} \Big[\cos^2 t \cdot (-\sin t)\, dt - \sin t\,(1 - \sin t - \cos t) \cos t\, dt +$

$+ \cos t \cdot \sin t \cdot (\sin t - \cos t)\, dt\Big]$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\sin t \cdot \cos t + 2 \sin^2 t \cdot \cos t - \cos^2 t \cdot \sin t\right] dt$$

$$= 0$$

Άσκηση 4

i) $\oint_C (2y+3)\,dx - (x+2)\,dy$ όπου C η περιφέρεια κύκλου $x^2+y^2=3$ με φορά διαγραφής την ωρολογιακή.

ii) $\oint_\gamma (y+3)\,dx - (x+2)\,dy$ όπου γ η καμπύλη με εξίσωση $x^2+y^2-2x-4y=0$ προσανατολισμένη αντιωρολογιακά.

Λύση

i) C είναι κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{3}$ άρα η παραμετρική μορφή της είναι $\underline{\gamma}(t)=(x(t),y(t))$ με $x(t)=\sqrt{3}\cos t$, $y(t)=\sqrt{3}\sin t$

όπου t πηγαίνει από 2π στο 0 εφόσον η φορά είναι ωρολογιακή.

$$dx=-\sqrt{3}\cdot\sin t\,dt \; , \; dy=\sqrt{3}\cdot\cos t\,dt$$

Άρα $\displaystyle\int_{2\pi}^{0} (2\sqrt{3}\sin t+3)(-\sqrt{3}\sin t)\,dt - (\sqrt{3}\cos t+2)\cdot(\sqrt{3}\cos t)\,dt =$

$$=\int_{2\pi}^{0} \left(-6\sin^2 t - 3\sqrt{3}\sin t - 3\cos^2 t - 2\sqrt{3}\cos t\right) dt = 9\pi$$

ii) $x^2+y^2-2x-4y=0 \Rightarrow x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$ άρα εδώ η καμπύλη είναι

κύκλος κέντρου $(1,2)$ και ακτίνας $\sqrt{5}$.

Η παραμετρική μορφή είναι $\underline{\gamma}(t)=(x(t),\, y(t))$ με

$x(t)=1+\sqrt{5}\cos t$, $y(t)=2+\sqrt{5}\sin t$, $t\in[0,2\pi)$ αφού

η φορά είναι η αντιωρολογιακή.

Οπότε $dx=-\sqrt{5}\sin t\,dt$, $dy=\sqrt{5}\cos t\,dt$

$$\int_0^{2\pi} (2+\sqrt{5}\sin t+3)\cdot(-\sqrt{5}\sin t)dt-(1+\sqrt{5}\cos t+2)(\sqrt{5}\cos t)dt =$$

$= -10\pi$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το $W=\int_\Gamma \underline{F}\cdot d\underline{s}$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma: \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1$, όπου $\underline{F}(x,y)=(y-x^2, x+y^2)$.

Λύση

Εδώ $\underline{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, θα βρω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$\underline{F}=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ άρα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=y-x^2 \xRightarrow[\text{ως προς } x]{\text{ολοκληρώνω}} f(x,y)=xy-\dfrac{x^3}{3}+c_1(y), & c_1(y) \text{ αυθαίρετη συνάρτηση του } y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+y^2 \xRightarrow[\text{ως προς } y]{\text{ολοκληρώνω}} f(x,y)=xy+\dfrac{y^3}{3}+c_2(x), & c_2(x) \text{ αυθαίρετη συνάρτηση του } x \end{cases}$$

άρα $f(x,y)=xy-\frac{x^3}{3}+c_1(y)=xy+\frac{y^3}{3}+c_2(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1(y)=\frac{y^3}{3} \\ c_2(x)=-\frac{x^3}{3}\end{cases}$ δηλαδή $f(x,y)=xy-\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}$

Υπενθύμιση Θεωρήματος: Εάν $\underline{F}: A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$, $\underline{F}\in C^2$ με $\underline{F}=\nabla f$ και Γ καμπύλη με παραμέτρηση $\underline{\gamma}:[a,b]\to A$, C^1, τότε:

$$\int_\Gamma \underline{F}\cdot d\underline{s} = f(\underline{\gamma}(b))-f(\underline{\gamma}(a))$$

Δηλαδή αν Γ κλειστή τότε $\int_\Gamma \underline{F}\cdot d\underline{s}=0$

Εδώ όντως $\underline{F} = \nabla f$ όπως είδαμε και Γ είναι έλλειψη άρα κλειστή καμπύλη, οπότε από το θεώρημα $W = 0$.

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί το $W = \int_\Gamma \underline{F} \cdot d\underline{s}$ με $\underline{F}(x,y,z) = y\underline{i} + (x+e^z)\underline{j} + ye^z\underline{k}$

και $\Gamma : \underline{\gamma}(t) = \left(t, \arctan(t), \sin\left(t^3 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $t \in [0,1]$.

Λύση

Όπως πριν βρίσκουμε f ώστε $\nabla f = \underline{F}$ δηλαδή πρέπει:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f(x,y,z) = xy + h_1(y,z) \quad , \ h_1 \text{ αυθαίρετη}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + e^z \Rightarrow f(x,y,z) = xy + ye^z + h_2(x,z) \quad , \ h_2 \text{ αυθαίρετη}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ye^z \Rightarrow f(x,y,z) = ye^z + h_3(x,y) \quad , \ h_3 \text{ αυθαίρετη}$$

και πρέπει αυτοί οι τύποι να είναι ίσοι άρα

$$h_1(y,z) = ye^z \ , \ h_2(x,z) = 0 \ , \ h_3(x,y) = xy$$

οπότε $f(x,y,z) = xy + ye^z$ και $\underline{F} = \nabla f$

άρα $W = \int_\Gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} = f(\underline{\gamma}(1)) - f(\underline{\gamma}(0)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} e^{\sin\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}$.