

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ανάλυση II

Εξέταση 30 Σεπτεμβρίου 2023

1. (15 Βαθμοί) Δώστε μια παραμετρικοποίηση $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες. Σε καθεμία από τις τρεις περιπτώσεις, $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα που εσείς επιλέγετε.

(α) Το γράφημα της $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin(x^2)$.

(β) Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το $(0, 1)$ με το $(6, 3)$.

(γ) Η έλλειψη $x^2/4 + y^2/2 = 1$.

2. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) := x \sin(xy^2) + x + 2$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y, f_{xy} .

(β) Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $(1, 1)$ κατά μήκος του μοναδιαίου διανύσματος $u := (2a, -a)$. Αν γνωρίζουμε ότι $a > 0$, να υπολογιστεί το a .

3. (15 Βαθμοί) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε το όρισμά της με (u, v) και με f_u, f_v τις παραγώγους της ως προς την πρώτη και δεύτερη μεταβλητή αντίστοιχα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x, y) = f(\log x, -xy)$ για κάθε $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

(α) $xg_x(x, y) - yg_y(x, y)$,

(β) $g_{xy}(x, y)$

ως συναρτήσεις των μερικών παραγώγων της f .

4. (15 Βαθμοί) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) := 6xy - 4x^3 - 3y^2$, όπου $\Omega := (-1, 1) \times (-1, 1)$, και χαρακτηρίστε καθένα από αυτά (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο, σαγματικό σημείο).

5. (20 Βαθμοί) Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε καθένα από τα ολοκληρώματα

(α) $I := \int_0^1 \int_x^1 x^2 y^3 dy dx$,

(β) $J := \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$.

6. (15 Βαθμοί) Να βρεθεί ο όγκος του χωρίου που περιέχεται στο πρώτο ογδομήριο (δηλαδή το σύνολο $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$) και περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0$, τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 3$ και το γράφημα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = xy$.

7. (15 Βαθμοί) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} y dx - 2x dy$$

αν:

(α) γ είναι το μονοπάτι $\gamma(t) = (t, t^2), t \in [0, 1]$.

(β) γ είναι ένα οποιοδήποτε C^1 μονοπάτι που διαγράφει το σύνολο του τετραγώνου $[0, 2] \times [0, 1]$ ακριβώς μία φορά κατά τη θετική φορά.

Υπενθύμιση: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες.

Καλή επιτυχία!