Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ανάλυση ΙΙ

Εξέταση 9 Φεβρουαρίου 2023

1. (10 Βαθμοί) Εστω $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ το επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $3x - 7y + 5z = 2$.
(α) Δώστε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $a := (1, 4, 5)$ και είναι κάθετη στο Π.
(β) Ανήκει το σημείο $(1, 4, 5)$ στο επίπεδο Π;

2. (10 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) := x \sin(xy) + \log(1 + x) + 4$ για κάθε $x > 0, y \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y, f_{xy}, f_{yy}.

3. (20 Βαθμοί) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε το όρισμά της με (u, v, w) και με f_u, f_v, f_w τις παραγώγους της ως προς την πρώτη, δεύτερη, και τρίτη μεταβλητή αντίστοιχα. Θεωρούμε την $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Να δειχθεί ότι για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ισχύει

$$\begin{aligned} &(\alpha) \quad g_x + g_y + g_z &&= 0, \\ &(\beta) \quad g_{xy} + g_{yz} + g_{zx} &&= -f_{uu} - f_{vv} - f_{ww} + f_{uv} + f_{vw} + f_{wu}. \end{aligned}$$

Στο αριστερό μέλος, κάθε μερική παράγωγος υπολογίζεται στο (x, y, z) ενώ στο δεξί κάθε μερική παράγωγος υπολογίζεται υπολογίζεται στο $(x - y, y - z, z - x)$.

4. (20 Βαθμοί) Δίνονται τρεις αριθμοί $x, y, z \geq 0$ με άθροισμα 6. Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους;

[Υπόδειξη: Μεγιστοποιήστε τη συνάρτηση $f(x, y) := xy(6 - x - y)$ στο φραγμένο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0, y = 0, x + y = 6$.]

5. (20 Βαθμοί) Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε καθένα από τα ολοκληρώματα,
(α) $I := \int_1^2 \int_0^x \cos(y/x)\, dy\, dx$,
(β) $J := \int_0^1 \int_{y^2}^1 e^{x^{3/2}}\, dx\, dy$. [Υπενθύμιση: $(x^{3/2})' = (3/2)\sqrt{x}$]

6. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ και το γράφημά της, $G_f := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$.
(α) Ζωγραφήστε την τομή του γραφήματός G_f με το επίπεδο $y = 0$ (το xz επίπεδο). Τι σχήμα έχει το G_f;
(β) Έστω $W \subset \mathbb{R}^3$ το χωρίο πάνω από το G_f και κάτω από το επίπεδο $z = 2$. Υπολογίστε τον όγκο του W.
(γ) Έστω ότι έχουμε ένα στερεό με σχήμα W όπως στο ερώτημα (β) και με πυκνότητα $\delta(x, y, z) = 1$ παντού. Υπολογίστε το κέντρο μάζας του στερεού.

7. (10 Βαθμοί) Έστω το χωρίο $A := [0, 1] \times [0, \pi]$, και $C = \partial A$ το σύνορο του A. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (δεύτερου είδους)

$$I := \int_C e^x \cos y\, dx + e^x \sin y\, dy$$

όπου η καμπύλη C είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το χωρίο A.

Υπενθύμιση: Το κέντρο μάζας ενός στερεού $W \subset \mathbb{R}^3$ το οποίο έχει πυκνότητα $\delta(x, y, z)$ στο σημείο $(x, y, z) \in W$ έχει συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, όπου

$$\bar{x} := \frac{1}{M} \iiint_W x\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \bar{y} := \frac{1}{M} \iiint_W y\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \bar{z} := \frac{1}{M} \iiint_W z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

και $M := \iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.
Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. (α) Η διεύθυνση της ευθείας είναι αυτή ενός οποιουδήποτε κάθετου διανύσματος στο επίπεδο. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $(3, -7, 5)$ (κάθε άλλο κάθετο διάνυσμα είναι πολλαπλάσιο αυτού). Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι $\ell(t) = a + t(3, -7, 5), t \in \mathbb{R}$.
(β) Το σημείο $(1, 4, 5)$ δεν ανήκει στο επίπεδο γιατί δεν ικανοποιεί την εξίσωση του Π αφού

$$3 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 0 \neq 2.$$

4. Πρέπει $z = 6 - x - y$. Επειδή $x, y, z \geq 0$, το (x, y) παίρνει τιμές στο σύνολο $A := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 6, x + y \leq 6\}$, το οποίο είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 0), (6, 0), (0, 6)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) := xy(6 - x - y) = 6xy - x^2y - xy^2$ για κάθε $(x, y) \in A$. Η f είναι το γινόμενο των x, y, z και αναζητούμε το μέγιστό της.
Το A είναι κλειστό και φραγμένο και η f συνεχής. Άρα παίρνει μέγιστη τιμή σε αυτό. Στο σύνορο του A η f ισούται με 0 ενώ στο εσωτερικό του είναι γνήσια θετική, άρα η μέγιστη τιμή θα λαμβάνεται σε εσωτερικό σημείο του A. Στο εσωτερικό του A η f είναι C^1, άρα σε κάθε σημείο ολικού μεγίστου για την f το $\nabla f = 0$. Υπολογίζουμε,

$$\nabla f(x, y) = (6y - 2xy - y^2, 6x - x^2 - 2xy).$$

Η σχέση $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ισοσυναμεί με $y(6 - 2x - y) = x(6 - 2y - x) = 0$, και επειδή στο εσωτερικό του A ισχύει $x \neq 0, y \neq 0$, ισοδυναμεί με $6 - 2x - y = 6 - 2y - x = 0$. Το τελευταίο σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = y = 2$, και το $(2, 2)$ είναι στο εσωτερικό του A. Με βάση τα πιο πάνω, αυτό είναι το σημείο που η f παίρνει τη μέγιστή της τιμή. Η μέγιστη τιμή είναι η $f(2, 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Σχόλιο: Η άσκηση λύνεται επίσης με πολλαπλασιαστές Lagrange όπως και με την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου (αυτή η λύση δεν μας ενδιαφέρει σε αυτό το μάθημα).

5. (β) Αλλάζουμε σειρά ολοκλήρωσης.

$$J = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} e^{x^{3/2}}\, dy\, dx = \int_0^1 e^{x^{3/2}} \sqrt{x}\, dx\, dy = \frac{2}{3} e^{x^{3/2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(e - 1).$$

6. (α) Το G_f είναι κώνος.
(β) Όγκος$(W) = 8\pi/3$.
(γ) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 3/2)$.