

Ανάλυση II

Ενδιάμεση εξέταση, 3 Δεκεμβρίου 2022

1. (20 Βαθμοί) Έστω \mathcal{P} το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $a := (0, 0, 0)$, $b := (1, -3, 1)$, $c := (-5, 2, 4)$.

(α) Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα του \mathbb{R}^3 που να είναι κάθετο στο επίπεδο \mathcal{P} .

(β) Έστω ότι το διάνυσμα που βρήκατε στο (α) είναι το $(r, s, t) \in \mathbb{R}^3$. Ποια είναι μια εξίσωση για το επίπεδο \mathcal{P} ;

2. (15 Βαθμοί) (α) Ποιες είναι οι πολικές συντεταγμένες, $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, του σημείου με καρτεσιανές συντεταγμένες $(2, 2)$;

(β) Ποιες είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες, (x, y) , των σημείων με πολικές συντεταγμένες $(3, \pi/2)$, $(2, \pi)$;

3. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y).$$

(β) Στο σημείο $(0, 0)$ ποια είναι η κατεύθυνση ταχύτερης αύξησης για την f ;

4. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = xe^{yx}$ και την $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(t) := f(\cos t, t^2)$.

(α) Με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας, να βρεθεί η $h'(t)$.

(β) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος, $D_u f(1, 1)$, της f στο σημείο $(1, 1)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $u := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. (20 Βαθμοί) Έστω $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Συμβολίζουμε με (x, y) τις μεταβλητές της. Θέτουμε $u(s, t) := F(s^2 - t^2, st)$ για κάθε $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Να δειχθεί ότι

$$t \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) + s \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = (t^2 + s^2) \frac{\partial F}{\partial y}(s^2 - t^2, st)$$

για κάθε $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

6. (20 Βαθμοί) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y + 1$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}$. Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία της f ; Χαρακτηρίστε όποια από αυτά μπορείτε (τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, σαγματικό σημείο).

7. (25 Βαθμοί) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και το σύνολο $A := [1, 3] \times [1, 3]$.

(α) Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία της f ; Χαρακτηρίστε όποια από αυτά μπορείτε.

(β) Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο A .

Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήστε σε 5 από τις 7 ερωτήσεις.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

2. (α) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \pi/4$.

(β) $(0, 3), (-2, 0)$.

6. Μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(1, 4)$. Είναι τοπικό ελάχιστο.

7. (α) Κρίσιμα σημεία τα $(0, 0), (2, 2)$. Το πρώτο είναι σαγματικό σημείο, το άλλο είναι τοπικό ελάχιστο.

(β) Ελάχιστη τιμή το -8 , λαμβάνεται στο σημείο $(2, 2)$. Μέγιστη τιμή το 10 , λαμβάνεται στα σημεία $(1, 3), (3, 1)$.