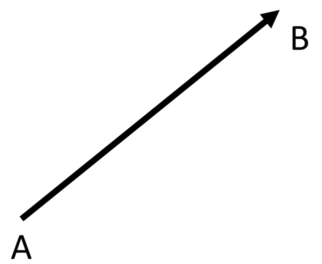
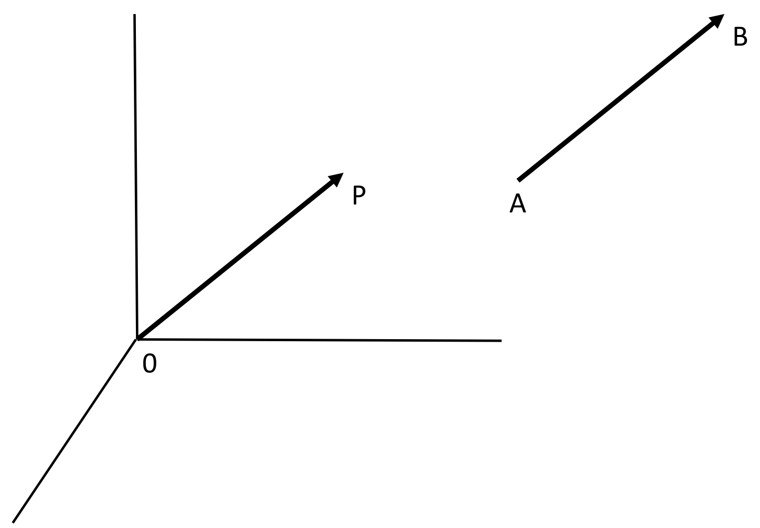
Φροντιστηριακό μάθημα 22-10-2021

1 Γεωμετρικά Διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

Γεωμετρικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ του χώρου, με αρχή το A και πέρας το B και συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$. Το διάνυσμα αυτό καθορίζεται από την **αρχή** του (A), το **μέτρο** του $\|\overrightarrow{AB}\|$ και την **κατεύθυνση** του (διεύθυνση, φορά) και ονομάζεται **εφαρμοστό** διάνυσμα στο σημείο A. Όταν η αρχή του διανύσματος δεν μας ενδιαφέρει τότε το διάνυσμα καθορίζεται



μόνο από το μέτρο, την κατεύθυνση του και λέγεται **ελεύθερο** διάνυσμα. Τα ελεύθερα διανύσματα συμβολίζονται συνήθως με $\mathbf{a}, \mathbf{b}, ...$ ή με $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, ...$ Τα ελεύθερα διανύσματα έχουν αντιπροσώπους τα αντίστοιχα εφαρμοστά διανύσματα. Δύο ελεύθερα διανύσματα λέγονται ίσα όταν οι αντιπροσώποι τους είναι ίσοι, δηλαδή όταν έχουν **ίσα μέτρα** και **ίδια κατεύθυνση**. Για κάθε εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ υπάρχει μοναδικό σημείο P του $\mathbb{R}^3$ ώστε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, όπου O η αρχή των αξόνων. Το διάνυσμα OP λέγεται **διάνυσμα θέσης** του $\overrightarrow{AB}$ και κατ᾽ επέκταση του ελεύθερου διανύσματος $\mathbf{a}$ του οποίου αντιπρόσωπος είναι το $\overrightarrow{AB}$.



Κατεύθυνση ενός μη μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{v}$ λέγεται το μοναδιαίο διάνυσμα $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$. Η κατεύθυνση ενός εφαρμοστού διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι η κατεύθυνση του $\overrightarrow{v}$ του οποίου είναι αντιπρόσωπος.

2 Παραλληλία

Πρόταση

Δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά (παράλληλα) αν και μόνο αν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 Κάθετα διάνυσματα

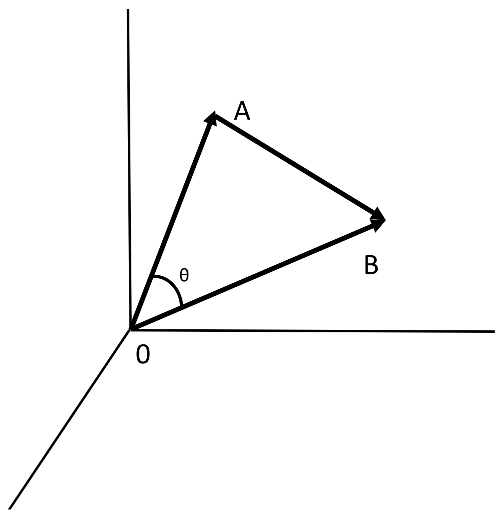
Πόρισμα

Έστω $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ με διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Η γωνία θ που σχηματίζουν μεταξύ τους δίνεται από

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}$$

και συμβολίζεται με $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

Απόδειξη



(Νόμος συνημιτόνων)

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|cos\theta$$

Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε

$$\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 \overset{\text{πράξεις}}{=\cdots=} \|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\ .$$

Άρα από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\cancel{\|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2} - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \cancel{\|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2} - 2\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|cos\theta\ ,$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

Πόρισμα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

Απόδειξη

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| cos\frac{\pi}{2} = 0 \ .$$

4 Ανάλυση Διανύσματος σε 3 ορθογώνιες συνιστώσες

Έστω $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ ένα ορθογώνιο σύνολο του $\mathbb{R}^3$ (ανά δύο κάθετα μεταξύ τους και $\neq \overrightarrow{0}$).
Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο από το γραμμικό συνδυασμό

$$\overrightarrow{a} = proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{a} + proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{a} + proj_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{a} \ ,$$

όπου $proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$, $proj_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2}$, $proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}$ Επιπλέον αν τα διανύσματα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ είναι μοναδιαία (μέτρο ίσο με 1) τότε το σύνολο λέγεται ορθοκανονικό.

5 Εξωτερικό γινόμενο και παραλληλία

Θεώρημα

Έστω $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ και θ η γωνία των $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Τότε

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| sin\theta \ .$$

Απόδειξη

Ταυτότητα *Lagrange* (χωρίς απόδειξη)

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2$$

Με χρήση της ταυτότητας *Lagrange*, τύπου του εσωτερικού γινομένου ως προς τη γωνία των δύο διανυσμάτων και της σχέσης $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$.

Πόρισμα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Απόδειξη

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| sin_{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa\pi = 0 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \ .$$

6 Παραμετρική μορφή ευθείας στον $\mathbb{R}^3$

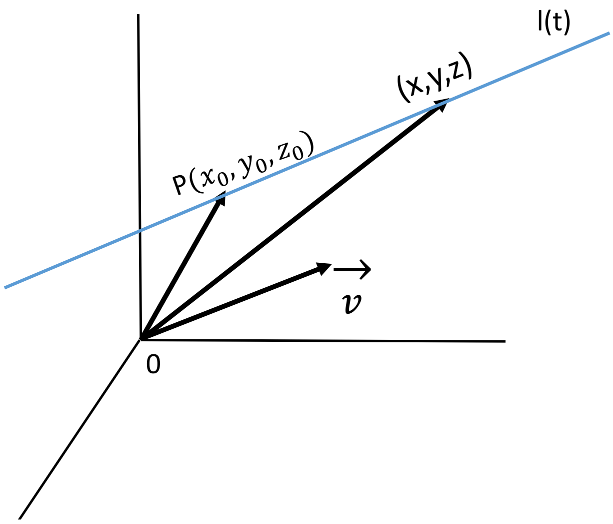
Οι καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ ορίζονται κατα τρεις τρόπους:

- Ως γεωμετρικοί τόποι εξισώσεων $y = f(x)$ (καρτεσιανές καμπύλες).
- Ως γεωμετρικοί τόποι εξισώσεων $F(x, y) = 0$ (αναλυτικές καμπύλες).
- Ως πεδία τιμών διανυσματικών συναρτήσεων $\overrightarrow{l}(t) = (x(t), y(t))$ (παραμετρικές καμπύλες).

Στον $\mathbb{R}^3$ ωστόσο μπορεί να επεκταθεί μόνο η τρίτη μορφή για τις καμπύλες καθώς οι δύο πρώτες παριστούν επίπεδα και κυλινδρικές επιφάνειες.

Επομένως μία ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη σε ένα ελεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{v}$ είναι παραμετρική καμπύλη με εξίσωση

$$\overrightarrow{l}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\overrightarrow{v} \ .$$



7 Επίπεδο του $\mathbb{R}^3$

Ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ το οποίο διέρχεται από ένα σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο προς ένα ελεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ έχει αναλυτική εξίσωση

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

Όντως αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο $P(x, y, z)$ του επιπέδου, τότε το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ θα ανήκει στο επίπεδο και θα είναι κάθετο στο $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. Άρα

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0 \ ,$$

με $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

8 Ασκήσεις

Άσκηση 4 φυλλάδιο 1

Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα ορθογώνια και τα δύο προς το διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$.

Λύση

• Μη παράλληλα αν και μόνο αν γραμμικά ανεξάρτητα.

• Κάθετα αν και μόνο αν εσωτερικό γινόμενο ίσο με 0.

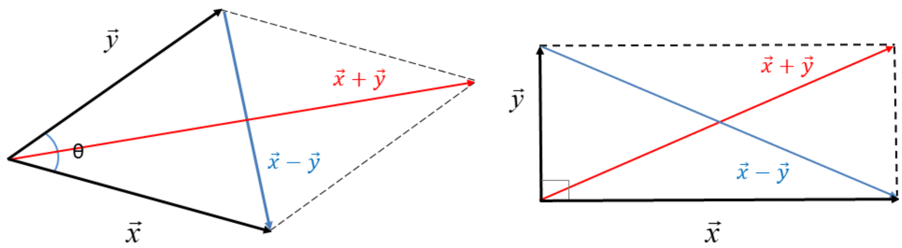
Το διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$ είναι κάθετο διάνυσμα του επιπέδου $x + y + z = 0$ (Π) επομένως αρκεί να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του επιπέδου αυτού. Έστω $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ $\in$Π. Άρα θα ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου $z = -x - y$.

$$\overrightarrow{a} = (x, y, z) = (x, y, -x - y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) = < (1, 0, -1), (0, 1, -1) >$$

Επομένως δύο διανύσματα που ικανοποιούν το ζητούμενο είναι τα $(1, 0, -1)$ και $(0, 1, -1)$.

Άσκηση 6 φυλλάδιο 1
Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις για διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Ερμηνεύστε αυτές τις σχέσεις γεωμετρικά, θεωρώντας το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$.
α) $2\|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\|\overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2$ (Κανόνας παραλληλογράμμου)
β) $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2$
Εξετάστε σε ποια περίπτωση αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Λύση



α)

$$\begin{aligned}
&\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = \\
&= \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} - \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} \overset{(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x})}{=} \\
&= \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\cancel{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}} + \|\overrightarrow{x}\|^2 - 2\cancel{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}} + \|\overrightarrow{y}\|^2 = 2\|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\|\overrightarrow{y}\|^2
\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}
&(\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| - \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 - 2\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 \geqslant 2\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \\
&\overset{(a)}{\Rightarrow} \cancel{2}\|\overrightarrow{x}\|^2 + \cancel{2}\|\overrightarrow{y}\|^2 \geqslant \cancel{2}\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|
\end{aligned}$$

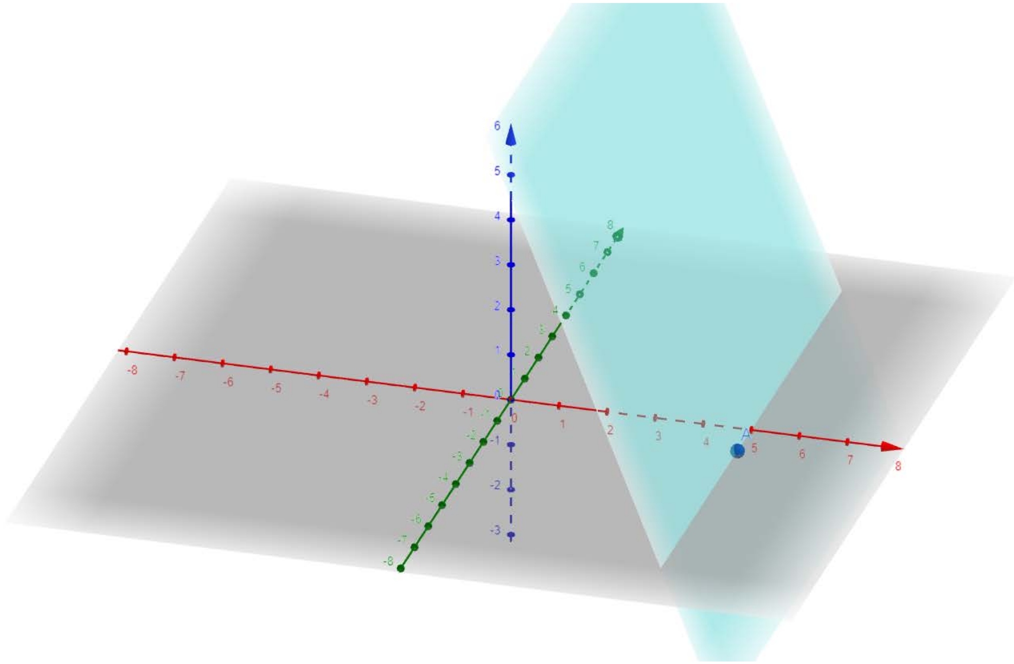
Η ισότητα προφανώς ισχύει όταν $(\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| - \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|)^2 = 0$, δηλαδή όταν $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|$.

$$\begin{aligned}
&\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \\
&\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} + 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \cancel{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}} = \cancel{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} - 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \cancel{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}} \\
&\Leftrightarrow 4\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 10 φυλλάδιο 1
Βρείτε μία εξίσωση για καθένα από τα παρακάτω επίπεδα
α) Το επίπεδο που είναι κάθετο στην ευθεία $l(t) = (3, -1, 1) + (5, 0, 2)t$ και περνάει από το σημείο $(5, -1, 0)$.
β) Το επίπεδο που περνάει από τα σημεία $(2, -1, 3)$, $(0, 0, 5)$ και $(5, 7, -1)$.
γ) Το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $l(t) = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Λύση
Εξ. επιπέδου 3 σημεία / 2 διανύσματα / σημείο + κάθετο διάνυσμα.
Κάθετο στην $l(t) \Leftrightarrow$ κάθετο στο $(5, 0, 2)$. Άρα έχουμε το κάθετο και ένα σημείο το $(5, -1, 0)$. Οπότε η εξίσωση του επιπέδου δίνεται από

$$(x - 5, y + 1, z - 0) \cdot (5, 0, 2) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; 5x + 2z = 25\ .$$



β) Από τα 3 σημεία κατασκευάζουμε δύο εφαρμοστά δΙανύσματα με ίδια αρχή.

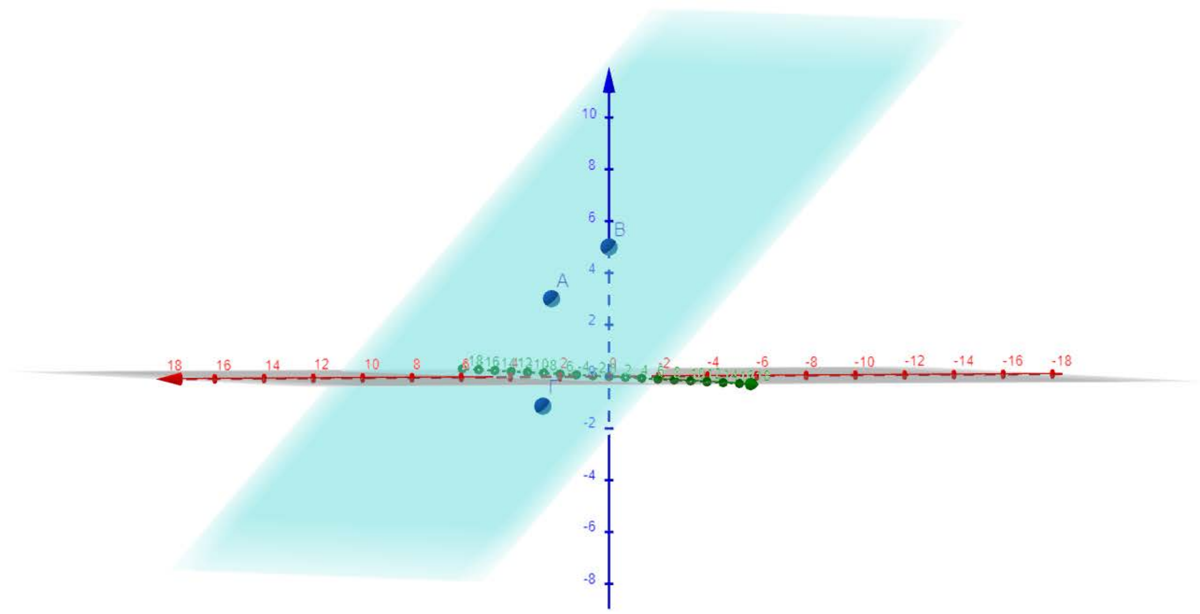
$$\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 2) \qquad \overrightarrow{A\Gamma} = (3, 8, -4) \ .$$

Τα δύο διανύσματα αυτά είναι γρ. ανεξάρτητα (γιατι;) επομένως σχηματίζουν ένα επίπεδο. Ένα κάθετο διάνυσμα στα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και επομένως στο ζητούμενο επίπεδο είναι το εξωτερικό τους γινόμενο

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(1 \cdot (-4) - 2 \cdot 8) - \overrightarrow{j}((-2) \cdot (-4) - 2 \cdot 3) + \overrightarrow{k}((-2) \cdot 8 - 1 \cdot 3) = (-20, -2, -19) \ .$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το κάθετο διάνυσμα και ένα απο τα 3 σημεία του επιπέδου (π.χ. το B), η εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου δίνεται από

$$(-20, -2, -19) \cdot (x - 0, y - 0, z - 5) = 0 \ \Leftrightarrow \ 20x + 2y + 19z = 95 \ .$$

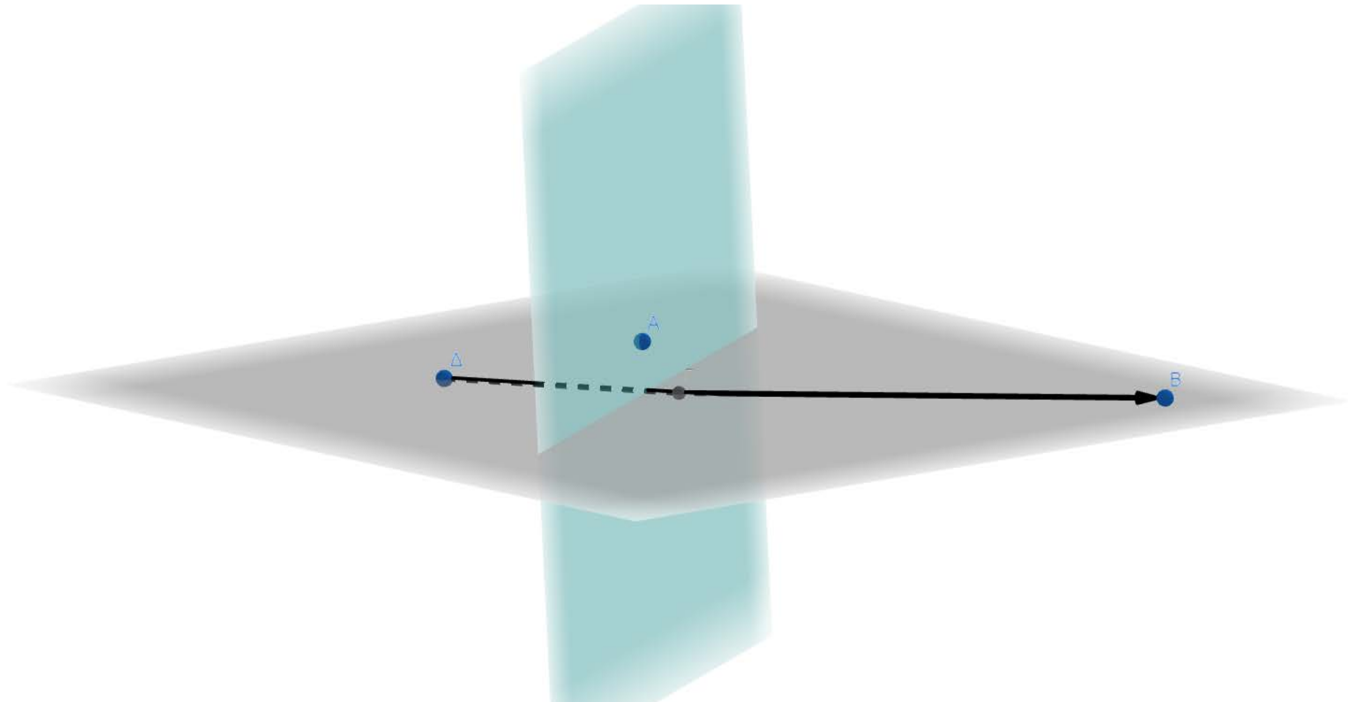


γ) Από τη μορφή της ευθείας έχουμε ότι διέρχεται από το $(-1,1,2)$ και είναι παράλληλη στο $(3,2,4)$. Αφού το επίπεδο περιέχει την ευθεία l άρα θα περιέχει και το σημείο $(-1,1,2)$. Μένει να βρούμε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο. Για το κάθετο διάνυσμα μπορούμε να βρούμε δύο διανύσματα που είναι παράλληλα στο ζητούμενο επίπεδο και να πάρουμε το εξωτερικό τους γινόμενο. Το ένα από αυτά είναι το διάνυσμα $(3,2,4)$ στο οποίο είναι παράλληλη η ευθεία l και επομένως το επίπεδο αφού την περιέχει. Το δεύτερο διάνυσμα θα δοθεί από το επίπεδο στο οποίο είναι κάθετο το ζητούμενο επίπεδο. Δηλαδή αφού το ζητούμενο επίπεδο είναι κάθετο στο $2x+y-3z+4=0$ άρα θα είναι παράλληλο στο $(2,1,-3)$. Επομένως το ζητούμενο κάθετο διάνυσμα είναι

$$\overrightarrow{n} = (2,1,-3)\times(3,2,4) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (10,-17,1)$$

Επομένως η εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου θα είναι

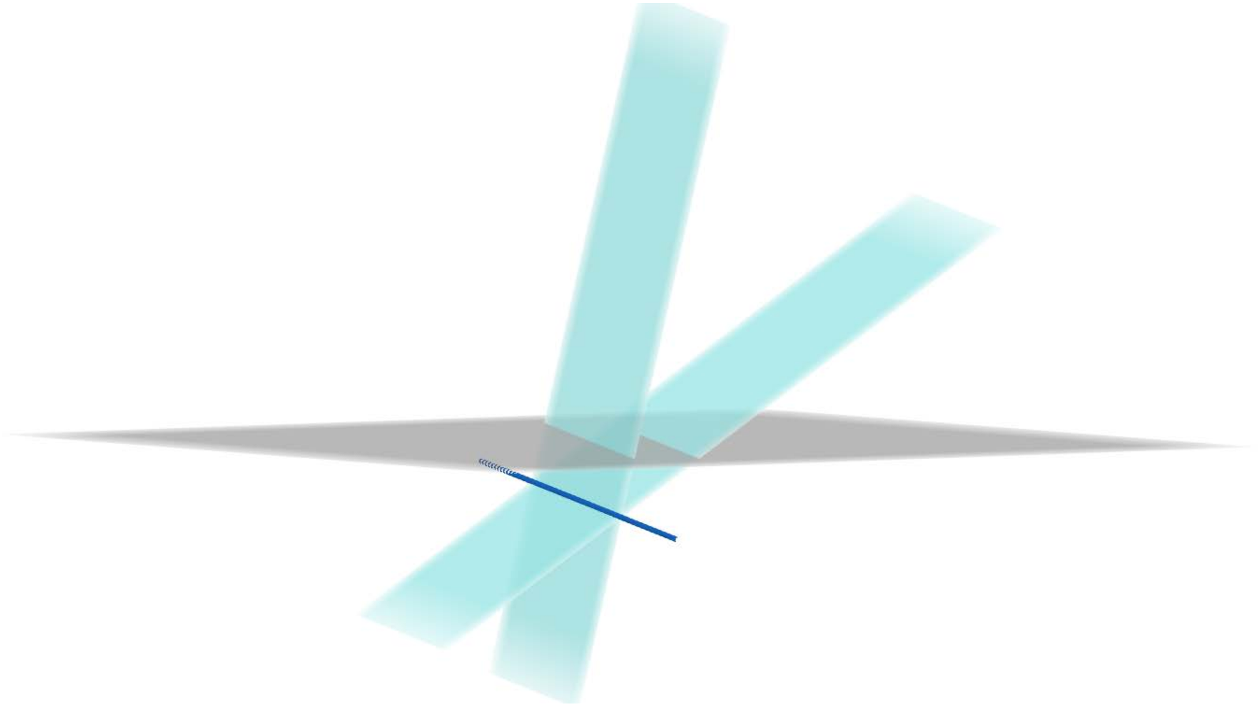
$$10(x+1)-17(y-1)+(z-2)=0 \;\Leftrightarrow\; 10x-17y+z=-25.$$



Άσκηση

Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία τομής των επιπέδων $4x-2y+z-3=0$ και $2x-y+3z+1=0$ και είναι κάθετο στο $3x+y-z+7=0$.

Λύση



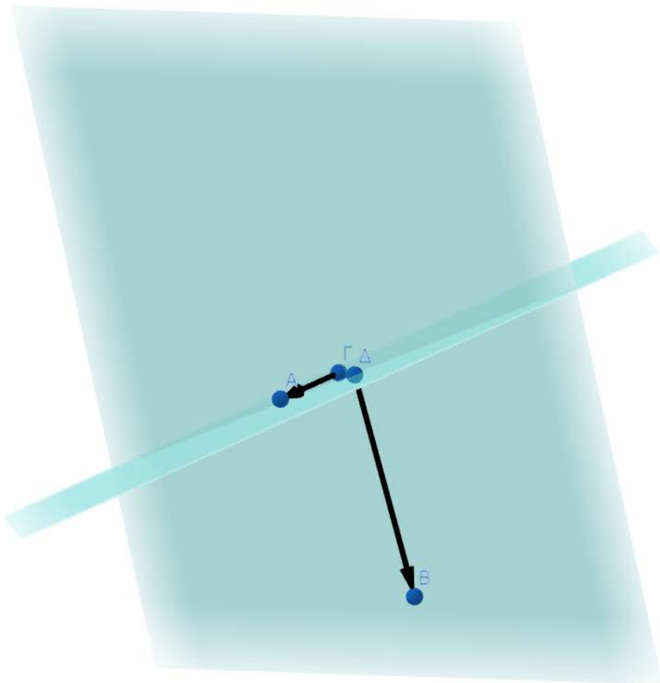
Το επίπεδο που περιέχει την ευθεία τομής θα περιέχει και όλα τα σημεία της τομής, δηλαδή όλα τα (x, y, z) τα οποία θα ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$4x - 2y + z - 3 = 0 \qquad 2x - y + 3z + 1 = 0.$$

Αν ικανοποιούνται οι δύο εξισώσεις τότε ικανοποιείται και κάθε γραμμικός συνδιασμός τους

$$4x - 2y + z - 3 + \kappa(2x - y + 3z + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (2\kappa + 4)x - (\kappa + 2)y + (3\kappa + 1)z + \kappa - 3 = 0 \;,$$

με κάθετο διάνυσμα το $(2\kappa + 4, -\kappa - 2, 3\kappa + 1)$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$ που πρέπει να προσδιορίσουμε. Αφού το ζητούμενο επίπεδο είναι κάθετο στο $3x + y - z + 7 = 0$ επομένως και τα κάθετα διανύσματα θα είναι κάθετα μεταξύ τους.



Άρα

$$(2\kappa + 4, -\kappa - 2, 3\kappa + 1) \cdot (3, 1, -1) = 0 \;\Rightarrow\; 2\kappa + 9 = 0 \;\Rightarrow\; \kappa = -\frac{9}{2} \;.$$

9 Ορίζουσα Τετραγωνικού Πίνακα

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας (n θετικός ακέραιος) με στοιχεία από ένα σύνολο K.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} , \qquad A = (a_{ij}) \text{ για } i, j \in \{1, ..., n\} ,$$

με $r_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ η i-οστή γραμμή του.

Ορισμός

Έστω n θετικός ακέραιος. Μία απεικόνιση $D : K^{n\times n} \longrightarrow K$ λέγεται απεικόνιση ορίζουσας αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$D1)$ $\forall$ $A \in K^{n\times n}$ και $i = 1, 2, ..., n$ με $r_i = b_i + c_i$ όπου $r_i, b_i, c_i \in K^{1\times n}$ έχουμε

$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ b_i + c_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ b_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) + D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ c_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) .$$

$D2)$ $\forall$ $A \in K^{n\times n}$ και $i = 1, 2, ..., n$ με $r_i = \lambda r$ όπου $r_i, r \in K^{1\times n}$ και $\lambda \in K$ έχουμε

$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) = \lambda D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) .$$

$D3)$ $\forall$ $A \in K^{n\times n}$ με $r_i = r_j$ για $i, j \in \{1, ..., n\}$ και $i \neq j$ (δύο διακεκριμένες γραμμές ίσες μεταξύ τους) έχουμε

$$D(A) = 0 .$$

$D4)$ Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ισούται με $D(I_n) = 1$.

Συμβολισμός

$D(A),\ det(A),\ |A|$.

Παραδείγματα

• $n = 1$

$A = a \in K$ (πίνακας στοιχείο).
Στην περίπτωση αυτή η απεικόνιση $D : K^{1\times 1} \longrightarrow K$ με $D(A) = a$ είναι απεικόνιση ορίζουσας καθώς ικανοποιεί τις ιδιότητες $D1, D2, D4$ ενώ η $D3$ είναι κενή περιεχομένου σε αυτή την περίπτωση.

• $n = 2$

Έστω $A \in K^{2\times 2}$ με $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Η απεικόνιση $D : K^{2\times 2} \longrightarrow K$ με

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow ad - bc$$

είναι απεικόνιση ορίζουσας καθώς για $r_1 = [a\ b]$ και $r_2 = [c\ d]$ έχουμε:

(Ιδιότητα $D1$)
Έστω $r_2 = [c\ d] = [c'\ d'] + [c''\ d'']$ τότε

$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) + D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c'' & d'' \end{bmatrix}\right) = ad' - bc' + ad'' - bc'' = a(d' + d'') - b(c' + c'') = ad - bc = D(A)\ .$$

(Ιδιότητα $D2$)
Έστω $r_2 = [c\ d] = [\lambda c'\ \lambda d'] = \lambda[c'\ d']$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε

$$\lambda D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) = \lambda(ad' - bc') = a\lambda d' - b\lambda c' = ad - bc = D(A)\ .$$

(Ιδιότητα $D3$)
Έστω $r_1 = r_2$, δηλαδή $a = c$ και $b = d$. Τότε

$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \longrightarrow ad - bc = ab - ba = 0\ .$$

(Ιδιότητα $D4$)

$$D(I_2) = D\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1\ .$$

• $n \times n$.
$\forall$ πίνακα $A \in K^{n\times n}$ και δείκτες $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ θα συμβολίσουμε με A_{ij} τον $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη.

Παράδειγμα

$$A_{12} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \qquad A_{13} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \qquad A_{23} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Πρόταση(Ανάπτυγμα *Laplace*)
Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant 2$, $\forall A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ με $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Η απεικόνιση ορίζουσας δίνεται από

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}D(A_{ij}) = (-1)^{1+j}a_{1j}D(A_{1j}) + (-1)^{2+j}a_{2j}D(A_{2j}) + \ ... \ + (-1)^{n+j}a_{nj}D(A_{nj}) \ ,$$

και λέγεται το ανάπτυγμα *Laplace* του πίνακα A ως πρός την j-στήλη.
Αντίστοιχα,

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D(A_{ij}) = (-1)^{i+1}a_{i1}D(A_{i1}) + \ ... \ + (-1)^{i+n}a_{in}D(A_{in}) \ ,$$

λέγεται ανάπτυγμα *Laplace* ως προς την i- γραμμή του A.

Παράδειγμα
Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ξέρουμε ότι $D(A) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$.

- $A_{12} = 3$ με $D(A_{12}) = 3$.
- $A_{21} = 2$ με $D(A_{21}) = 2$.
- $A_{11} = 4$ με $D(A_{11}) = 4$.
- $A_{22} = 1$ με $D(A_{22}) = 1$.

Ανάπτυγμα ως προς την 1η στήλη.

$$D(A) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}a_{i1}D(A_{i1}) = (-1)^{1+1}a_{11}D(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}D(A_{21}) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1)^3 \cdot 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \ .$$

Ανάπτυγμα ως προς την 2η γραμμή.

$$D(A) = \sum_{j=1}^{2}(-1)^{2+j}a_{2j}D(A_{2j}) = (-1)^{2+1}a_{21}D(A_{21}) + (-1)^{2+2}a_{22}D(A_{22}) = (-1)^3 3 \cdot 2 + (-1)^4 4 \cdot 1 = -6 + 4 = -2$$

Ίδιο αποτέλεσμα θα δώσει το ανάπτυγμα ως προς 2η στήλη ή ως προς 1η γραμμή.

- $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ανάπτυγμα ως προς j στήλη (έστω 1η)

$$\begin{aligned} D(A) = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i1}D(A_{i1}) &= (-1)^{1+1}a_{11}D(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}D(A_{21}) + (-1)^{3+1}a_{31}D(A_{31}) \\ &= (-1)^2 \cdot 1 \cdot D(A_{11}) + (-1)^3 \cdot 1 \cdot D(A_{21}) + (-1)^4 \cdot 3 \cdot D(A_{31}) \ , \end{aligned}$$

όπου

- $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ με $D(A_{11}) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5$.

- $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ με $D(A_{21}) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3$.
- $A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ με $D(A_{31}) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4$.

Άρα

$$D(A) = 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot (-4) = 5 - 3 - 12 = -10 \ .$$

Ανάπτυγμα ως προς i γραμμή (έστω 2η)

$$\begin{aligned} D(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2j} D(A_{2j}) &= (-1)^{2+1} a_{21} D(A_{21}) + (-1)^{2+2} a_{22} D(A_{22}) + (-1)^{2+3} a_{23} D(A_{23}) \\ &= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 3 + (-1)^4 \cdot 2 \cdot (-6) + (-1)^5 \cdot 1 \cdot (-5) = -3 - 12 + 5 = -10 \ . \end{aligned}$$

Ομοίως ως προς τις υπόλοιπες γραμμές ή στήλες.

Το πρόσημο του $(-1)^{i+j}$ δίνεται από το σχήμα

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots & \dots \\ - & + & - & + & \dots & \dots \\ + & - & + & - & \dots & \dots \\ - & + & - & + & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(Αρκεί να θυμόμαστε ότι 1η γραμμή ή 1η στήλη πάει + - + - + - ...)
Άρα

$$D(A) = 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) - 2 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (6-3) - 2 \cdot (0-3) + 1 \cdot (0-3) = 3 + 6 - 3 = 6$$

Παράδειγμα 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(Το πιο βολικό είναι να πάρω ανάπτυγμα ως προς τη στήλη ή τη γραμμή με τα περισσότερα 0, όπως π.χ εδώ 1η γραμμή ή 3η γραμμή ή 2η στήλη). Τα πρόσημα για την πρώτη γραμμή είναι +-+- . Άρα

$$D(A) = 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) - 0 \cdot \cancelto{0}{D\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right)} + 1 \cdot D\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) - 0 \cdot \cancelto{0}{D\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right)} = 4$$

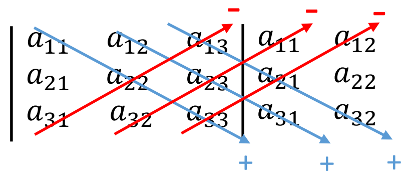
Κανόνας *Sarrus* (μόνο για 3×3 πίνακες)

Έστω $A \in K^{3\times 3}$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του σύμφωνα με τον κανόνα *Sarrus* δίνεται από

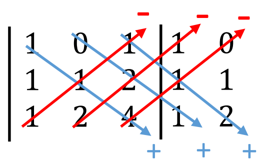
$$D(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \ .$$



Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- *Sarrus*



$$D(A) = 1\cdot 1\cdot 4 + 0\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 0\cdot 1\cdot 4 = 4 + 0 + 2 - 1 - 4 - 0 = 1$$

- Ανάπτυγμα *Laplace*

Ως προς την 1η στήλη

$$D(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) = (-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} D(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} D(A_{31})$$
$$= 1\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot(-1) = 0 + 2 - 1 = 1 \ .$$

Θεώρημα

Για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση ορίζουσας $D : K^{n\times n} \longrightarrow K$.

Ορισμός

Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant 1$ και D μοναδική απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων. Για κάθε πίνακα $A \in K^{n\times n}$ η εικόνα $D(A) \in K$ του A μέσω της D καλείται ορίζουσα του A.

10 Ιδιότητες Οριζουσών

- Έστω A πίνακας $n \times n$ με i-οστή γραμμή $r_i = 0$ (ή αντίστοιχα i-οστή στήλη $c_i = 0$) τότε $D(A) = 0$.

  Πράγματι, θα έχουμε $r_i = 0 = 0 \cdot r_i$ για οποιοδήποτε $r \in K^{1 \times n}$ οπότε από ιδιότητα $D2$ θα έχουμε $D(A) = 0 \cdot D(A) = 0$. (Αντίστοιχα θα είχαμε $c_i = 0 = 0 \cdot c_i$).

- Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από έναν $A \in K^{n \times n}$ με μετασχηματισμό γραμμών (ή στηλών) της μορφής
$$r_i \longrightarrow r_i + \lambda r_j \quad (c_i \longrightarrow c_i + \lambda c_j) \ ,$$
  για $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ με $i \neq j$. Τότε $D(A) = D(B)$.

  Πράγματι, έστω $i < j$ χωρίς βλάβη γενικότητας.

$$D(B) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i + \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) \overset{D1,D2}{=} D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) + \lambda D\cancelto{0 \text{ από } D3}{\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right)} = D(A) \ .$$

- Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από έναν πίνακα $A \in K^{n \times n}$ με μετασχηματισμό γραμμών (ή στηλών) της μορφής
$$r_i \longleftrightarrow r_j \quad (c_i \longleftrightarrow c_j) \ ,$$
  για $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ με $i \neq j$. Τότε $D(B) = -D(A)$.

  Πράγματι, έστω $i < j$ χωρίς βλάβη γενικότητας.

$$D\cancelto{0 \text{ από } D3}{\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right)} \overset{D1}{=} D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) + D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{D1}{=} D\cancelto{0 \text{ από } D3}{\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right)} + D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) + D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right) + D\cancelto{0 \text{ από } D3}{\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}\right)}$$

  Άρα $D(A) + D(B) = 0 \Leftrightarrow D(A) = -D(B)$.

- Αν $B \in K^{n\times n}$ πίνακας που προκύπτει από τον $A \in K^{n\times n}$ με κάποιον από τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} &r_i \longrightarrow \lambda r \qquad (c_i \longrightarrow \lambda c) \\ &r_i \longrightarrow r_i + \lambda r_j \qquad (c_i \longrightarrow c_i + \lambda c_j) \\ &r_i \longleftrightarrow r_j \qquad (c_i \longleftrightarrow c_j) \end{aligned}$$

  για $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ με $i \neq j$. Τότε $D(A) = 0$ αν και μόνο αν $D(B) = 0$.

- Ένας πίνακας $A \in K^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $D(A) \neq 0$.

- Η απεικόνιση ορίζουσας είναι ομογενής, δηλαδή

$$D(\lambda A) = \lambda^n D(A) \quad (A \in K^{n\times n}\ ,\ \lambda \in K)\ .$$

- Έστω $A \in K^{n\times n}$ είναι ένας τριγωνικός πίνακας (άνω ή κάτω), δηλαδή $a_{ij} = 0$ για $i > j$(άνω τριγωνικός) και αντίστοιχα $i < j$ (κάτω τριγωνικός). Τότε

$$D(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22}\ ...\ \cdot a_{nn}$$

- $D(AB) = D(A)D(B)$, όπου $A, B \in K^{n\times n}$.

- $D(A^k) = (D(A))^k$.

- Γραμμική ανεξαρτησία γραμμών (ή στηλών) ενός πίνακα A ισοδυναμεί με $D(A) \neq 0$.

11 Ασκήσεις Οριζουσών

Άσκηση 1

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Λύση
1ος Τρόπος: Με ανάπτυγμα *Laplace* (αφήνεται ως άσκηση).

2ος Τρόπος: Χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετ/μους γραμμών ή στηλών ώστε να φέρουμε τον πίνακα σε άνω η κάτω τριγωνική μορφή με ορίζουσα το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων (ιδιότητα).

$$D \overset{r_1 \longleftrightarrow r_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{r4 \longrightarrow r_4 + 3r_1}{\overset{r_2 \longrightarrow r_2 - 2r_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{r4 \longrightarrow r_4 + 7r_2}{\overset{r_3 \longrightarrow r_3 + r_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 20 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4 \longrightarrow r_4 - 10r_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{vmatrix} = -(1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-22) = -44\ .$$

Προσοχή!!! Αν κάναμε γραμμικό μετασχηματισμό της μορφής $r_i \longrightarrow \mu r_i + \lambda r_j$ τότε η καινούργια ορίζουσα θα ήταν ίση με την παλιά πολλ/μένη με μ.

Άσκηση 2

Να εξετάσετε αν τα $\overrightarrow{v}_1 = (4,1,-2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (-3,0,1)$ και $\overrightarrow{v}_3 = (1,-2,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση

Τα διανύσματα στήλες (ή γραμμές) ενός πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν η ορίζουσα είναι $\neq 0$.

Έστω λοιπόν $r_1 = \overrightarrow{v}_1 = (4,1,-2)$, $r_2 = \overrightarrow{v}_2 = (-3,0,1)$ και $r_3 = \overrightarrow{v}_3 = (1,-2,1)$. Θα υπολογίσουμε λοιπόν την ορίζουσα του πίνακα με γραμμές τα 3 δεδομένα διανύσματα

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{αναπτ. } Laplace \text{ 1η γραμμή}}{=} 4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 6 = 0 \ .$$

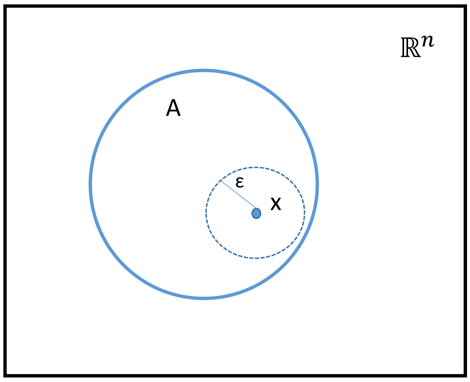
Επομένως τα διανύσματα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Φροντιστηριακό μάθημα 29-10-2021

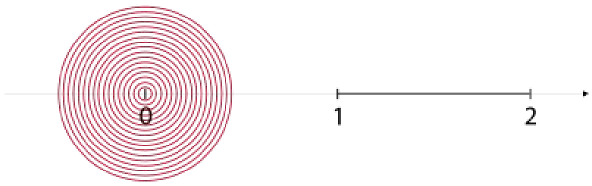
1 Σύντομη υπενθύμιση θεωρίας ορίων και συνέχειας

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

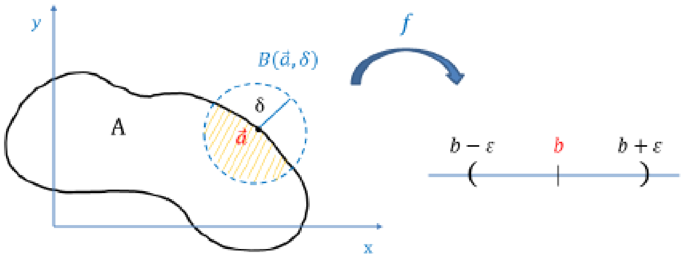
- Ένα σημείο a του A ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του A όταν $\forall\ \varepsilon > 0$ ισχύει ότι $A \cap (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, δηλαδή όταν κάθε ανοικτή ε-μπάλα $B_\varepsilon(a)$ (με κέντρο το a και ακτίνα ε περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A διαφορετικό του a.



- Ένα σημείο a του A ονομάζεται **μεμονωμένο σημείο** του A όταν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $B_\delta(a) \cap A = \{a\}$.



- Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού A υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω a ένα σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει όριο ένα $b \in \mathbb{R}$ όταν το x τείνει στο a και γράφουμε $\lim_{x\to a} f(x) = b$ αν και μόνο αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ με $0 < \|x - a\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.



- Όταν a είναι μεμονωμένο σημείο του A τότε $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- Το $\lim_{x\to a} f(x)$ όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.
- $\lim_{x\to a} f(x) = b \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} |f(x)| = |b|$. (Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά)
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$
- Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού A υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $a \in A$. Λεμε ότι η f είναι συνεχής στο $a \in A$ αν και μόνο αν

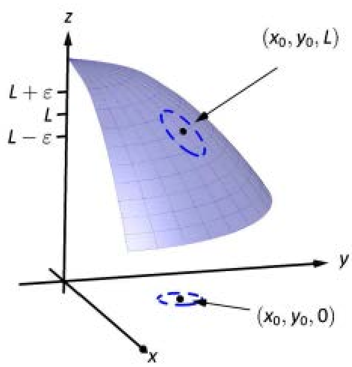
  $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ ,$$

  δηλαδή το όριο υπάρχει και ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Όταν πούμε ότι η f είναι συνεχής εννοούμε σε κάθε σημείο $a \in A$. Αν η f δεν είναι συνεχής στο $a \in A$ τότε λέμε ότι είναι ασυνεχής στο a.
- (συνέχεια με ε και δ)
  Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $a \in A$ αν και μόνο αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall\ x \in A$ με $\|x-a\| < \delta$ έπεται ότι $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
- Σημείωση: Στη συνέχεια δεν γράφουμε το $\|x-a\| > 0$ όπως στο όριο. (Γιατί;;)

2 Όριο και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Οι συνιστώσες $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ της f είναι πραγματικές συναρτήσεις.

- Έστω a εσωτερικό η συνοριακό σημείο του A. Λέμε ότι η f έχει όριο ένα $b \in \mathbb{R}^m$ όταν το x τείνει στο a και γράφουμε $\lim_{x\to a} f(x) = b$ αν και μόνο αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ με $0 < \|x-a\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.



- $\lim_{x\to a} f(x) = b$ $\left[\text{ισοδύναμα } \lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)} \big(f_1(x_1,...,x_n), ..., f_m(x_1,...,x_n)\big) = (b_1, b_2, ..., b_m)\right]$ $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$
- Η $f = (f_1, ..., f_m)$ είναι συνεχής στο $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ αν και μόνο αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ με $\|x-a\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
- Αντίστοιχα γράφονται και ως $\|(x_1, x_2, ..., x_n) - (a_1, a_2, ..., a_n)\| < \delta$, $\|\big(f_1(x_1,...,x_n), f_2(x_1,...,x_n), ..., f_m(x_1,...,x_n)\big) - \big(f_1(a_1,...,a_n), f_2(a_1,...,a_n), ..., f_m(a_1,...,a_n)\big)\| < \varepsilon$.

3 Ασκήσεις

Άσκηση 25 κεφ. 2.2 βιβλίου

α) Μπορεί η $\dfrac{sin(x+y)}{x+y}$ να γίνει συνεχής ορίζοντάς την κατάλληλα στο (0,0);

β) Ομοίως για την $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

γ) Να δείξετε ότι είναι συνεχής η $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = ye^x + sinx + (xy)^4 \ .$$

Λύση

α) Η συνάρτηση $\dfrac{sin(x+y)}{x+y}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x+y=0\}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, εφόσον ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδέν στο σύνολο αυτό. Επομένως θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλα τη συνάρτηση στο σύνολο $\{(x,y) : x+y=0\}$ ώστε να είναι συνεχής και στο σύνολο αυτό (άρα και στο ζητούμενο $(0,0)$ σημείο).

Θα δούμε αρχικά αν υπάρχει το όριο στο σύνολο αυτό. Έστω λοιπόν $(a,b) \in \{(x,y) : x+y=0\}$. Θέτουμε $x+y=h$. Τότε για $(x,y) \to (a,b)$ έχουμε ότι $x+y \to a+b$ δηλαδή $h \to 0$ και το όριο είναι:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{sin(x+y)}{x+y} = \lim_{h\to 0} \frac{sinh}{h} = 1 \ .$$

δηλαδή υπάρχει και είναι ίσο με 1. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(x+y)}{x+y} \ , & x+y \neq 0 \\ \quad 1 \ , & x+y=0 \end{cases} \qquad ,$$

δηλαδή ορίζοντας $f(a,b)=1$ (και άρα $f(0,0)=1$) για κάθε $(a,b) \in \{(x,y) : x+y=0\}$, η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

β) Το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Πράγματι, αν πάρουμε τη διαδρομή $(x=0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0 \ ,$$

ενώ αν πάρουμε τη διαδρομή $(y=x)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \ .$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο στο $(0,0)$ λόγω μοναδικότητας και συνεπώς η συνάρτηση δεν μπορεί να οριστεί καταλλήλως στο $(0,0)$ ώστε να είναι συνεχής.

γ) Έστω (a,b) τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^2$. Έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \ , \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} e^x = e^a \ , \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} sinx = sina \ , \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} (xy)^4 = (ab)^4 \ ,$$

η f είναι συνεχής ώς άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^2$.

4 Ισοσταθμικές Καμπύλες

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Ως ισοσταθμικό σύνολο στάθμης c της f ορίζεται το παρακάτω υποσύνολο του A:

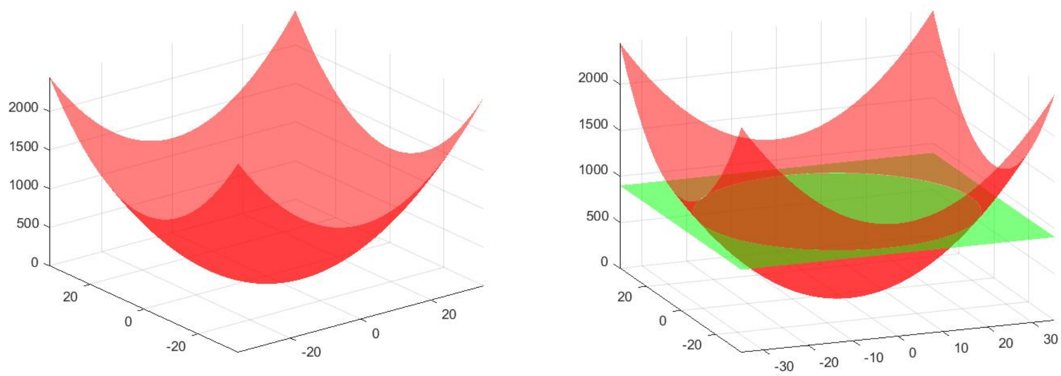
$$L = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in A : f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\} \ .$$

Είναι δηλαδή το υποσύνολο του A στο οποίο η συνάρτηση f παίρνει σταθερή τιμή c.

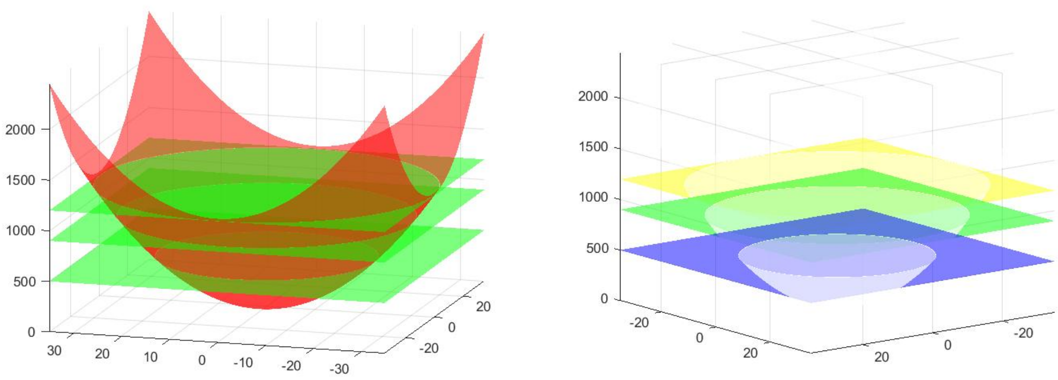
- Για $n = 2$ το σύνολο L ονομάζεται ισοσταθμική καμπύλη στάθμης c.
- Για $n = 3$ το σύνολο L ονομάζεται ισοσταθμική επιφάνεια στάθμης c.

Επειδή όμως σχεδιάζουμε τις σταθμικές καμπύλες στον χώρο και συγκεκριμένα στο επίπεδο $z = c$ γιαυτό χρησιμοποιούμε τον όρο ισοϋψείς καμπύλες ύψους c και είναι η τομή του γραφήματος της f με το επίπεδο $z = c$.

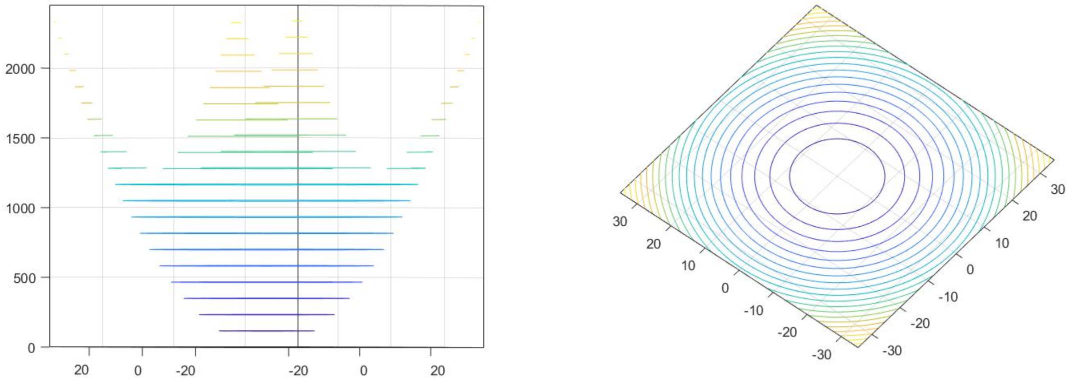
Παραδείγματα
1) Ελλειπτικό παραβολοειδές με εξίσωση $z = x^2 + y^2$



Σχήμα 1: Ελλειπτικό παραβολοειδές και η τομή του με το επίπεδο $z = 900$

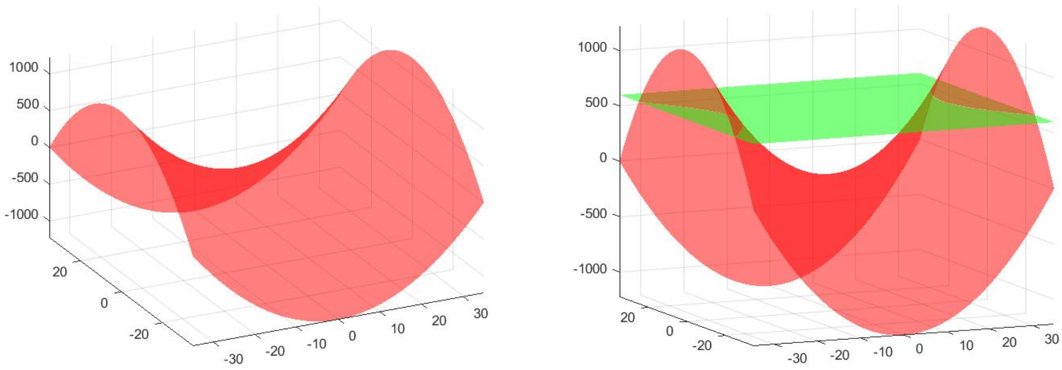


Σχήμα 2: Τομή με 3 επίπεδα $z = 1200$, $z = 900$, $z = 500$

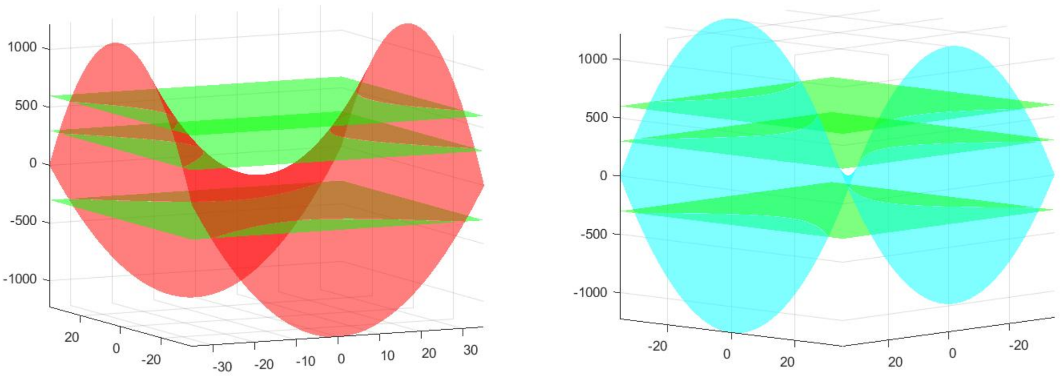


Σχήμα 3: Ισοσταθμικές καμπύλες και οι προβολές τους πάνω στο xy επίπεδο

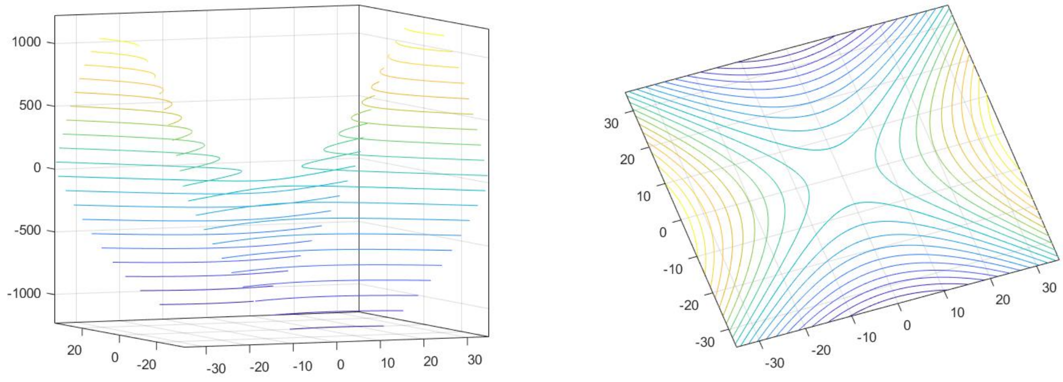
2) Υπερβολικό παραβολοειδές με εξίσωση $z = x^2 - y^2$



Σχήμα 4: Υπερβολικό παραβολοειδές και η τομή του με το επίπεδο $z = 600$



Σχήμα 5: Τομή με 3 επίπεδα $z = 600$, $z = 300$, $z = -300$



Σχήμα 6: Ισοσταθμικές καμπύλες και οι προβολές τους πάνω στο xy επίπεδο

Φροντιστηριακό μάθημα 05-11-2021

1 Σύντομη υπενθύμιση της θεωρίας

Μερική παράγωγος

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το U. Τότε οι **μερικές παράγωγοι** της f ως προς την 1η,2η,...,n-οστή μεταβλητή συμβολίζονται με $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$,..., $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ και είναι πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών οι οποίες στο σημείο $x = (x_1, ..., x_n)$ ορίζονται από:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_j + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} ,$$

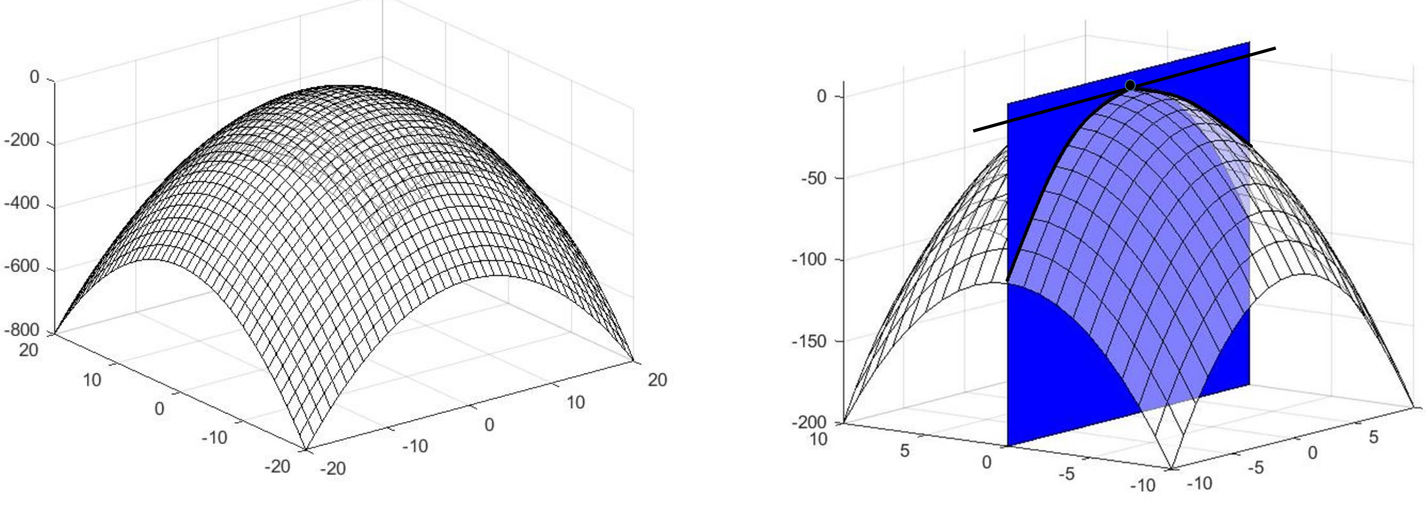
για $j = 1, 2, ..., n$, δεδομένου ότι το όριο αυτό υπάρχει. Το πεδίο ορισμού των $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ για $j = 1, 2, ..., n$ είναι το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία το όριο υπάρχει.

• Αντίστοιχα για μία διανυσματική συνάρτηση $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συμβολίζουμε με $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ για $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ την μερική παράγωγο της i-οστής συνιστώσας της f ως προς την j-οστή μεταβλητή της.

• Συμβολισμός μερικής παραγώγου στο σημείο (x_0, y_0):

$$f_x(x_0, y_0) \ , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\ y=y_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)} .$$

Γεωμετρική Ερμηνεία



Σχήμα 1: Ελλειπτικό παραβολοειδές $z = -x^2 - y^2$. Τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $y = 0$ και εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο

Παράγωγος και Διαφορικό συνάρτησης

Παραγωγίσιμη συνάρτηση

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού (π.ο.) U (ανοικτό). Η f λέγεται **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο a του U, όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}(a), ..., f_{x_n}(a)$. Τότε ως παράγωγος $f'(a)$ της συνάρτησης στο a ορίζεται ο $1 \times n$ πίνακας

$$f'(a) = [f_{x_1}(a) \ f_{x_2}(a) \ \dots \ f_{x_n}(a)] \ .$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται πίνακας *Jacobi* (Ιακωβιανός πίνακας) και συμβολίζεται με $Jf(x)$.

Αντίστοιχα, η f είναι παραγωγίσιμη στο U όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\forall x \in U$.

Σημείωση: Μία $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geqslant 2)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα $a \in U$ δεν είναι πάντοτε συνεχής στο a. (Σκεφτείτε αντιπαράδειγμα που έχει μελετηθεί αρκετές φορές στην τάξη).

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διανυσματική συνάρτηση. Η $f = (f_1, ..., f_m)$ ονομάζεται παραγωγίσιμη στο U αν οι συνιστώσες της $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (πραγματικές συναρτήσεις) για $i = 1, ..., m$ είναι παραγωγίσιμες $\forall x \in U$. Τότε ο πίνακας

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

είναι η παράγωγος της f στο U. Ονομάζεται επίσης και πίνακας *Jacobi* ή Ιακωβιανός πίνακας και συμβολίζεται με $Jf(x)$.

• Συμβολισμός παραγώγου της f στο σημείο a:

$$f'(a) \ , \quad \frac{df}{dx}(a) \ , \quad Df(a) \ , \quad Jf(a) \ .$$

Παρένθεση:
• Μία συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **γραμμικός μετασχηματισμός** όταν

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \ , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

• Μία διανυσματική συνάρτηση $T = (T_1, T_2, ..., T_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός αν και μόνο αν όλες οι συνιστώσες T_i για $i = 1, 2, ..., m$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί.

• Έστω A $m \times n$ πίνακας. Τότε η συνάρτηση $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $L_A(x) = A \cdot x$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

• Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός (γραμμική απεικόνιση) μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή $A \cdot x$ για κάποιον πίνακα x.

Κλίση (*Gradient*)

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο a του U, τότε το διάνυσμα

$$\nabla f(a) = (f_{x_1}(a), ..., f_{x_n}(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \ ,$$

λέγεται κλίση της f στο a. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το U, τότε αντίστοιχα έχουμε την διανυσματική συνάρτηση $\nabla f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Με

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) .$$

(Συμβολίζεται και με $gradf(x)$).

Σημαντικό! Η παράγωγος $f'(x)$ και η κλίση $\nabla f(x)$ συνδέονται με τη σχέση

$$f'(x) = \nabla f(x)^\top .$$

• Λέμε ότι η f είναι C^1 συνάρτηση στο U όταν είναι παραγωγίσιμη στο U και οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

Κλίση και σταθμικές καμπύλες

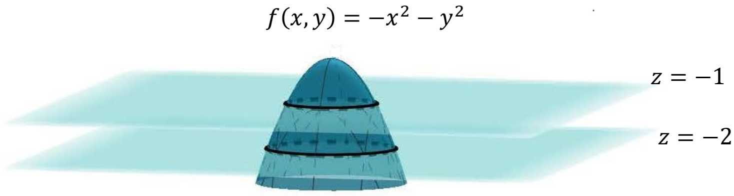
Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό U. Έστω $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ μία σταθμική καμπύλη στάθμης c η οποία προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης $Graph(f)$ με το επίπεδο $z = c$. Τότε σε κάθε σημείο της καμπύλης ισχύει

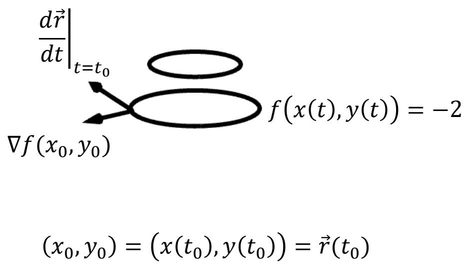
$$f(x(t), y(t)) = c \;\Rightarrow\; \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = 0 ,$$

Από κανόνα αλυσίδας η σχέση αυτή ισοδυναμεί με

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla f(x, y) \cdot \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = 0 .$$

Γνωρίζοντας ότι το $\overrightarrow{u} = \dfrac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}$ είναι εφαπτόμενο στην $\overrightarrow{r}(t)$, άρα η κλίση $\nabla f(x, y)$ θα είναι κάθετο διάνυσμα στην $\overrightarrow{r}(t)$.





Διαφορίσιμη συνάρτηση

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με π.ο. το ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση ονομάζεται διαφορίσιμη σε ένα $a \in U$ όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - T(x - a)|}{\|x - a\|} = 0$$

Σχόλιο: Καθώς όπως αναφέραμε πιο πάνω η συνάρτηση $L_A(x) = A \cdot x$ (A $1 \times n$ πίνακας) είναι γραμμικός μετασχηματισμός, επομένως η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - A \cdot (x - a)|}{\|x - a\|} = 0$$

Επομένως μπορούμε στη θέση του πίνακα A να βάλουμε τον $Jacobi$ $f'(a) = Jf(a) = Df(a)$ και έχουμε

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x-a)|}{\|x-a\|} = 0$$

Τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός $T(x-a) = A \cdot (x-a) = Jf(a) \cdot x = f'(a) \cdot (x-a) = Df(a)(x)$ από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$ λέγεται το διαφορικό της f στο a.

Θεώρημα

Έστω f όπως ορίζεται πιο πάνω. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι διαφορίσιμη στο a.
2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο a και ισχύει

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x-a)|}{\|x-a\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a) \cdot (x-a)|}{\|x-a\|} = 0$$

Αντίστοιχα για το διαφορικό διανυσματικής συνάρτησης, έστω $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών με π.ο. το ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ και τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Η f ονομάζεται διαφορίσιμη σε ένα $a \in U$, όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

ή ισοδύναμα με χρήση Γ. Μ. με πίνακα

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - A \cdot (x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

A $m \times n$ και διάνυσμα $(x-a)$ είναι $n \times 1$. Ο γραμμικός μετασχηματισμός $Df(a)(x) = f'(a) \cdot (x-a) = T(x-a) = Jf(a) \cdot (x-a)$ από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$, λέγεται το διαφορικό της f στο a.

Θεώρημα

Η $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη σε ένα $a \in U$ αν και μόνο αν όλες οι συνιστώσες της $f_j : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (πραγματικές συναρτήσεις) για $j = 1, 2, ..., m$ είναι διαφορίσιμες στο a δηλαδή αν ισχύει

$$\lim_{x \to a} \frac{|f_j(x) - f_j(a) - T_j(x-a)|}{\|x-a\|} = 0$$

όπου $T_j : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ οι συνιστώσες του γραμμικού μετασχηματισμού T για $j = 1, ..., m$.

Θεώρημα

Έστω $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών με π.ο. το ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ και τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι διαφορίσιμη στο a.
2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο a και ισχύει

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

Θεώρημα

Μία πραγματική συνάρτηση $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία είναι C^1 σε ένα σημείο a του ανοικτού U, είναι διαφορίσιμη στο a ενώ ο αντίστροφος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντοτε.

Θεώρημα

Μία διανυσματική συνάρτηση $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η οποία είναι C^1 σε ένα σημείο a του ανοικτού U, είναι διαφορίσιμη στο a ενώ ο αντίστροφος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντοτε.

Γραμμική προσέγγιση (γραμμικοποίηση)

(1 μεταβλητή) Έστω $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής με πεδίο ορισμού το I και η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $a \in I$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $L_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$L_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \ .$$

Επομένως

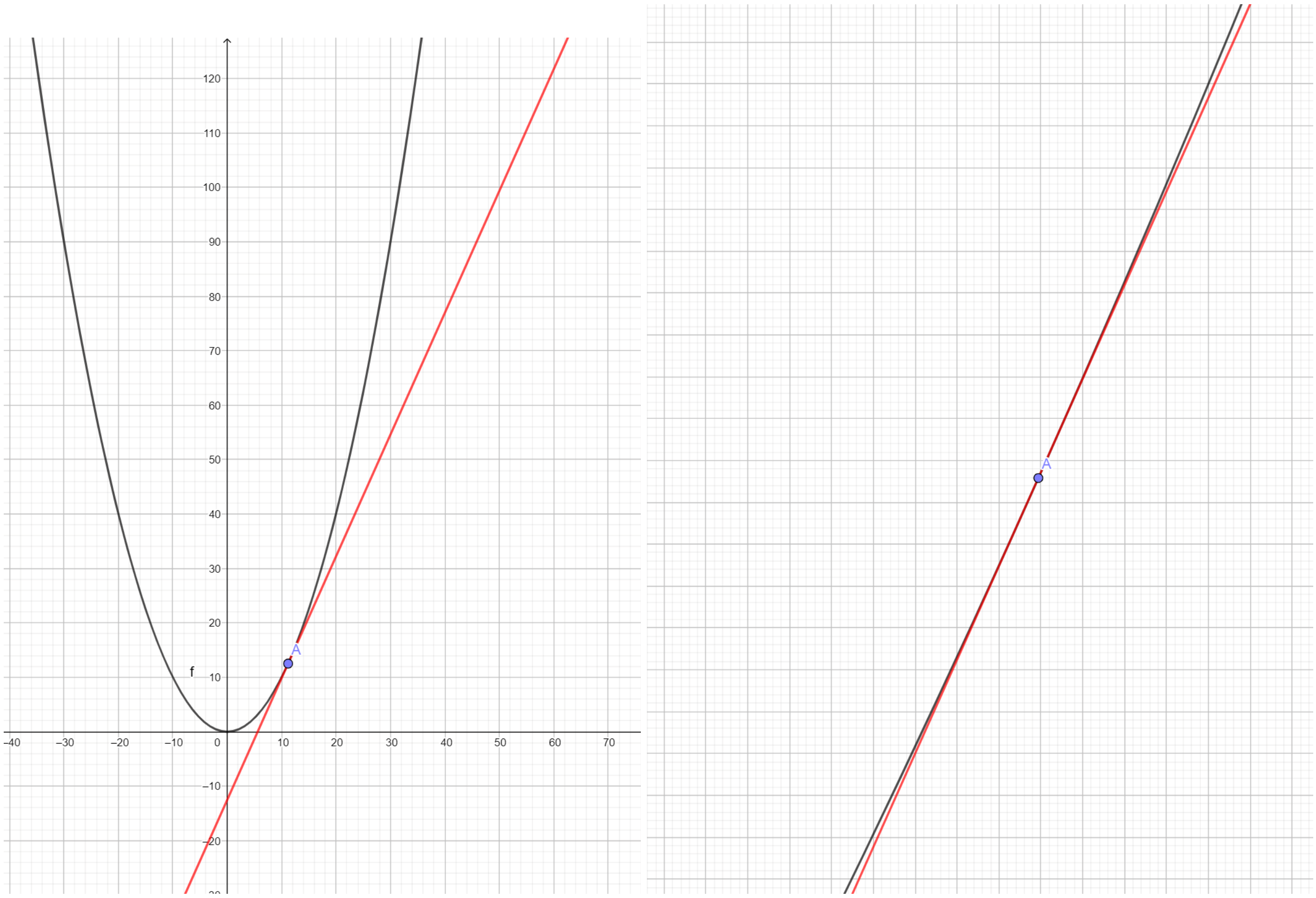
$$f(x) - L_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right](x-a) \ , \ x \neq a \ ,$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\lim_{x\to a} |f(x) - L_a(x)| = 0 \ .$$

Άρα κοντά στο a η τιμή της f προσεγγίζεται από την τιμή της L_a. Για το λόγο αυτό, η L_a ονομάζεται **γραμμική προσέγγιση** ή **γραμμικοποίηση** της f στο σημείο a.

Παράδειγμα



Σχήμα 2: $y = x^2$ και η εφαπτομένη της στο σημείο A.

Όπως παρατηρούμε αν κάνουμε "*zoom*" σε μία περιοχή πολύ κοντά στο σημείο A οι τιμές της εφαπτομένης $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ προσεγγίζουν τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$.

(2 μεταβλητές) Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση 2 μεταβλητών "αρκετά ομαλή" (τι εννοούμε;) στο $(a,b) \in U$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $L_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

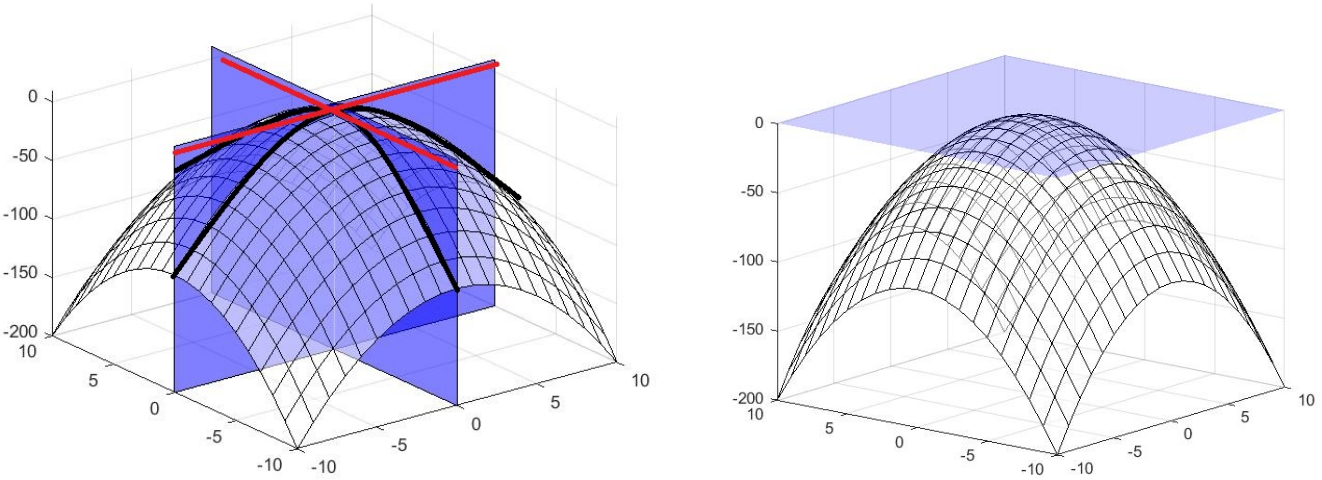
$$L_{(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = f(a,b) + Df(a,b) \cdot (x-a, y-b) \ .$$

Σύμφωνα με τον ορισμό διαφορισιμότητας έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y) - L_{(a,b)}(x,y)| = 0 \ .$$

Η γραμμική αυτή προσέγγιση παριστά (γεωμετρικά) ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ το οποίο εφάπτεται στο γράφημα της f στο σημείο $(a,b,f(a,b)) = (a,b,L_{(a,b)}(a,b))$ (εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό).

Παράδειγμα



Σχήμα 3: $z = -x^2 - y^2$, η τομή με τα επίπεδα $y = 0$, $x = 0$. Το εφαπτόμενο επίπεδο $z = 0$ στο $(0,0,0)$.

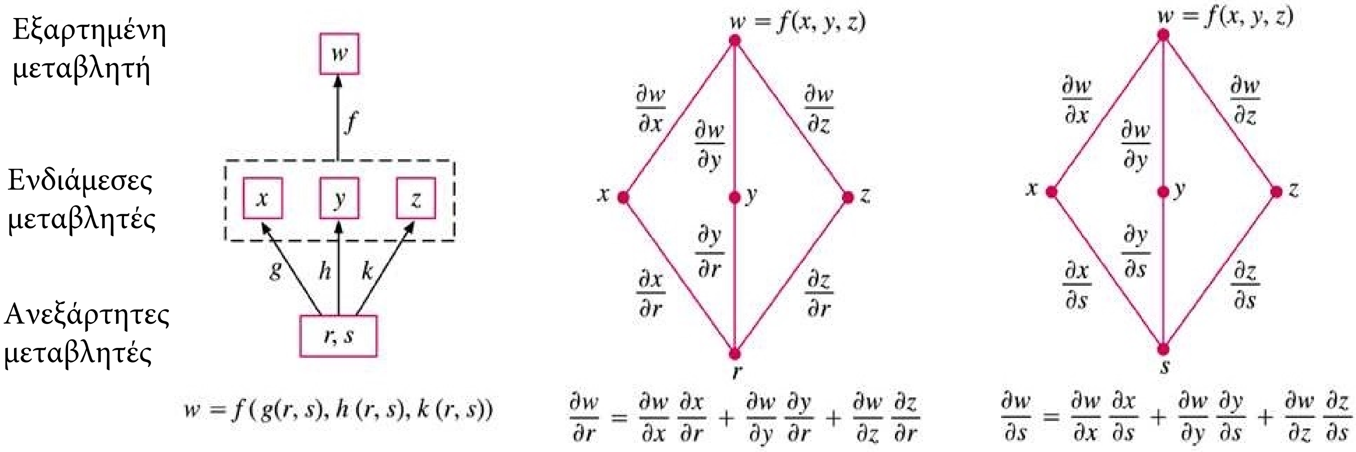
Κανόνας αλυσίδας

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας) (Θεώρημα 11 κεφ. 2.5)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτά σύνολα και έστω $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ γνωστές συναρτήσεις τέτοιες ώστε η g να απεικονίζει το U στο V ώστε η συνάρτηση $f \circ g$ να ορίζεται. Έστω επιπλέον ότι η g είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο x_0 και η f είναι διαφορίσιμη στο $y_0 = g(x_0)$. Τότε η $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(y_0)Dg(x_0)\,,$$

όπου το δεξί μέλος είναι το γινόμενο των πινάκων $Df(y_0)$ με $Dg(x_0)$.



2 Ασκήσεις

Άσκηση 4 φυλλάδιο 3

Γιατί μπορούμε να πούμε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x,y) = x^2 + y^2$ και $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ εφάπτονται στο σημείο $(0,0,0)$;

Λύση

Τα γραφήματα $graph(f)$ και $graph(g)$ των f και g αντίστοιχα εφάπτονται στο σημείο $(0,0,0)$ αν έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό. Ως πολυωνυμικές συναρτήσεις οι f και g είναι C^1 και επομένως είναι διαφορίσιμες. Άρα υπάρχουν τα εφαπτόμενα επίπεδα του $graph(f)$ και του $graph(g)$ στο $(0,0,0)$ τα οποία έστω ότι συμβολίζουμε με Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, το εφαπτόμενο επίπεδο Π_1 του $graph(f)$ στο $(0,0,0)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\Pi_1 : \quad z = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y\,,$$

όπου

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$$

άρα είναι το

$$\Pi_1 : \quad z = 0\,.$$

Επίσης, το εφαπτόμενο επίπεδο Π_2 του $graph(g)$ στο $(0,0,0)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\Pi_2 : \quad z = g(0,0) + \frac{\partial g(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial g(0,0)}{\partial y}y\,,$$

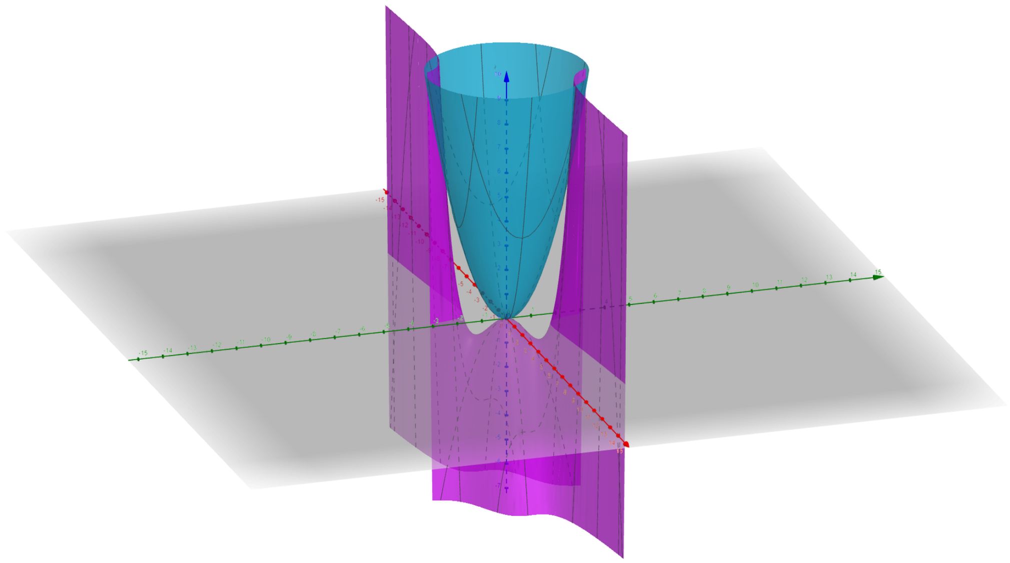
όπου

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -2x + y^3 \Rightarrow \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = -2y + 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} = 0$$

άρα είναι το

$$\Pi_2 : \quad z = 0\,.$$

Επομένως τα εφαπτόμενα επίπεδα Π_1 και Π_2 συμπίπτουν, δηλαδή τα $graph(f)$ και $graph(g)$ έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(0,0,0)$.



Άσκηση 7 φυλλάδιο 3
Αν η $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μία γραμμική απεικόνιση και $a \in \mathbb{R}^n$, ποιό είναι το διαφορικό της f στο a ;

Λύση
Εφόσον η $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική απεικόνιση, υπάρχει πίνακας-γραμμή $B=[b_1,b_2,...,b_n]$ τέτοιος ώστε:

$$f(x)=Bx \Rightarrow f(x)=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n\,.$$

Οι μερικές παράγωγοι της f είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=b_1\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=b_2\ ,\quad \ldots \quad ,\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=b_n\,,$$

και επομένως η παράγωγος $Df(a)$ της f είναι ο πίνακας B αφού:

$$Df(a)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}=B\,,$$

που είναι ανεξάρτητο από το x στη συγκεκριμένη περίπτωση.
Για να είναι διαφορίσιμη η f στο σημείο $a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-B(x-a)|}{||x-a||}=0\,. \qquad (1)$$

(Σχολιάζουμε ότι το $B(x-a)$ είναι γινόμενο πινάκων και συγκεκριμένα το γινόμενο του πίνακα-γραμμή B με τον πίνακα-στήλη $x-a$).
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(a)-B(x-a)\\
&=(b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n)-(b_1a_1+b_2a_2+...+b_na_n)-\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \\ \vdots \\ x_n-a_n \end{bmatrix}\\
&=(b_1(x_1-a_1)+b_2(x_2-a_2)+...+b_n(x_n-a_n))\\
&\quad-(b_1(x_1-a_1)+b_2(x_2-a_2)+...+b_n(x_n-a_n))=0
\end{aligned}$$

άρα και το ζητούμενο όριο της (1) είναι ίσο με μηδέν.
Επομένως η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε λοιπόν ότι το διαφορικό $Df(a)(x)$ της f στο a δίνεται από $Df(a)(x) = Bx = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n$.

Άσκηση 9 κεφ. 2.3 βιβλίου

Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων.
γ) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x + e^z + y \, , \, yx^2)$.
δ) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xye^{xy} \, , \, xsiny \, , \, 5xy^2)$.

Λύση

γ) Θέτοντας $f = (f_1, f_2)$ με

$$f_1(x,y,z) = x + e^z + y \; , \quad f_2(x,y,z) = yx^2$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 1\,, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 1\,, & \frac{\partial f_1}{\partial z} &= e^z\,, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 2yx\,, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= x^2\,, & \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως η παράγωγος της f είναι:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

δ) Θέτοντας $f = (f_1, f_2, f_3)$ με

$$f_1(x,y) = xye^{xy} \; , \quad f_2(x,y) = xsiny \; , \quad f_3(x,y) = 5xy^2 \; .$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= ye^{xy} + xy^2e^{xy}\,, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= xe^{xy} + x^2ye^{xy}\,, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= siny\,, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= xcosy\,, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} &= 5y^2\,, & \frac{\partial f_3}{\partial y} &= 10xy\,. \end{aligned}$$

Επομένως η παράγωγος της f είναι:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ye^{xy} + xy^2e^{xy} & xe^{xy} + x^2ye^{xy} \\ siny & xcosy \\ 5y^2 & 10xy \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2 φυλλάδιο 5
Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^1 και $z = f(x, y)$. Κάνουμε την αντικατάσταση $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$ (πολικές συντεταγμένες). Να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

Λύση
Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες παίρνουμε $z = f\left(x(r, \theta), y(r, \theta)\right) = f(rcos\theta, rsin\theta)$.
Επομένως, η ζητούμενη μερική παράγωγος $\partial z/\partial \theta$ από τον κανόνα της αλυσίδας δίνεται από:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(-rsin\theta\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(rcos\theta\right) .\end{aligned}$$

Άσκηση 10 κεφ. 2.5 βιβλίου
Έστω ότι η θερμοκρασία ενός σημείου (x, y, z) στον χώρο είναι $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Έστω ένα σωματίδιο που ακολουθεί τη δεξιά-κυκλική έλικα $\sigma(t) = (cost\, ,\, sint\, ,\, t)$ και έστω $T(t)$ η θερμοκρασία του τη στιγμή t.
α) Να υπολογιστεί το $T'(t)$.
β) Να βρεθεί μία προσεγγιστική τιμή για τη θερμοκρασία στο $t = \dfrac{\pi}{2} + 0.01$.

Λύση
α) $T(t) = cos^2t + sin^2t + t^2 = 1 + t^2$. Άρα $T'(t) = 2t$.
β) $T(t) \simeq T(t_0) + T'(t_0)(t - t_0)$. Θέτοντας λοιπόν $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ και $t = \dfrac{\pi}{2} + 0.01$ παίρνουμε
$T\left(\dfrac{\pi}{2} + 0.01\right) \simeq T\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + T'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)(0.01) \Rightarrow T\left(\dfrac{\pi}{2} + 0.01\right) \simeq 1 + \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + 2\dfrac{\pi}{2}(0.01)$.

Άσκηση 17 κεφ. 2.5 βιβλίου
Να γραφεί ο κανόνας αλυσίδας για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις και να αιτιολογηθεί η απάντηση σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 11.

α) $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, όπου $h(x, y) = f(x, u(x, y))$.
β) $\dfrac{dh}{dx}$, όπου $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.
γ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, όπου $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$.

Λύση
α) Θέτοντας $v(x, y) = x$ έχουμε $\partial v/\partial x = 1$, $\partial v/\partial y = 0$ και $h(x, y) = f(v(x, y), u(x, y))$.
Επίσης, θέτοντας $g(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$ έχουμε ότι:

$$h(x, y) = (f \circ g)(x, y)$$

και επομένως από το Θεώρημα 11 έχουμε:

$$Dh(x, y) = Df(g(x, y))Dg(x, y) ,$$

όπου

$$Dh(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} , \quad Df(v, u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} , \quad Dg(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} .$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

και επομένως η ζητούμενη μερική παράγωγος $\partial h/\partial x$ δίνεται από:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\ .$$

β) Θέτοντας $w(x)=x$ έχουμε $dw/dx=1$ και $h(x)=f(w(x),u(x),v(x))$.
Επίσης, θέτοντας $g(x)=(w(x),u(x),v(x))$ έχουμε ότι

$$h(x)=(f\circ g)(x)\ .$$

Έπομένως από το Θεώρημα 11 έχουμε:

$$Dh(x)=Df(g(x))Dg(x)\ ,$$

όπου

$$Dh=\frac{dh}{dx}\ ,\quad Df=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial w} & \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\end{bmatrix}\ ,\quad Dg=\begin{bmatrix}\dfrac{dw}{dx}\\ \dfrac{du}{dx}\\ \dfrac{dv}{dx}\end{bmatrix}\ .$$

Άρα

$$\frac{dh}{dx}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial w} & \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{dw}{dx}\\ \dfrac{du}{dx}\\ \dfrac{dv}{dx}\end{bmatrix}=\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}\ .$$

γ) Θέτοντας $g(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y),w(x))$ παίρνουμε:

$$h(x,y,z)=(f\circ g)(x,y,z)\ .$$

Τότε από το Θεώρημα 11 έχουμε ότι:

$$Dh(x,y,z)=Df(g(x,y,z))Dg(x,y,z)\ ,$$

όπου

$$Dh=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z}\end{bmatrix}\ ,\quad Df=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w}\end{bmatrix}\ ,\quad Dg=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & 0\\ \dfrac{dw}{dx} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Δηλαδή

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & 0\\ \dfrac{dw}{dx} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

και επομένως η ζητούμενη μερική παράγωγος $\partial h/\partial x$ δίνεται από:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}\,.$$

Άσκηση 18 κεφ. 2.5 βιβλίου

Επαληθεύστε τον κανόνα αλυσίδας για $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, όπου $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ και

$$f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\ , \quad u(x,y) = e^{-x-y}\ , \quad v(x,y) = e^{xy}\ .$$

Λύση

Ο κανόνας αλυσίδας λέει ότι:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{2}$$

Θα υπολογίσουμε το αριστερό μέλος και το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης και θα δούμε ότι είναι ίσα. Όσον αφορά το αριστερό μέλος έχουμε ότι:

$$h(x,y) = \frac{\left(e^{-x-y}\right)^2 + \left(e^{xy}\right)^2}{\left(e^{-x-y}\right)^2 - \left(e^{xy}\right)^2} = \frac{e^{-2x-2y}+e^{2xy}}{e^{-2x-2y}-e^{2xy}}$$

Άρα

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\left(-2e^{-2x-2y}+2ye^{2xy}\right)\left(e^{-2x-2y}-e^{2xy}\right) - \left(e^{-2x-2y}+e^{2xy}\right)\left(-2e^{-2x-2y}-2ye^{2xy}\right)}{\left(e^{-2x-2y}-e^{2xy}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-2e^{-4x-4y}+2e^{-2x-2y+2xy}+2ye^{-2x-2y+2xy}-2ye^{4xy}\right)}{e^{-4x-4y}-2e^{-2x-2y+2xy}+e^{4xy}}$$

$$- \frac{\left(-2e^{-4x-4y}-2ye^{-2x-2y+2xy}-2e^{-2x-2y+2xy}-2ye^{4xy}\right)}{e^{-4x-4y}-2e^{-2x-2y+2xy}+e^{4xy}}$$

$$= \frac{4e^{-2x-2y+2xy}+4ye^{-2x-2y+2xy}}{e^{-4x-4y}-2e^{-2x-2y+2xy}+e^{4xy}} \tag{3}$$

Όσον αφορά το δεξί μέλος έχουμε ότι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x-y}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = ye^{xy}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u(u^2-v^2)-(u^2+v^2)2u}{\left(u^2-v^2\right)^2}$$

$$= \frac{2e^{-x-y}\left(e^{-2x-2y}-e^{2xy}\right) - \left(e^{-2x-2y}+e^{2xy}\right)\left(2e^{-x-y}\right)}{\left(e^{-2x-2y}-e^{2xy}\right)^2}$$

$$= \frac{2e^{-3x-3y}-2e^{-x-y+2xy}-2e^{-3x-3y}-2e^{-x-y+2xy}}{e^{-4x-4y}-2e^{-2x-2y+2xy}+e^{4xy}}$$

$$= \frac{-4e^{-x-y+2xy}}{e^{-4x-4y}-2e^{-2x-2y+2xy}+e^{4xy}}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2v(u^2 - v^2) - (u^2 + v^2)(-2v)}{\left(u^2 - v^2\right)^2}$$

$$= \frac{2e^{xy}\left(e^{-2x-2y} - e^{2xy}\right) - \left(e^{-2x-2y} + e^{2xy}\right)\left(-2e^{xy}\right)}{\left(e^{-2x-2y} - e^{2xy}\right)^2}$$

$$= \frac{2e^{-2x-2y+xy} - 2e^{3xy} + 2e^{-2x-2y+xy} + 2e^{3xy}}{e^{-4x-4y} - 2e^{-2x-2y+2xy} + e^{4xy}}$$

$$= \frac{4e^{-2x-2y+xy}}{e^{-4x-4y} - 2e^{-2x-2y+2xy} + e^{4xy}}$$

Επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-4e^{-x-y+2xy}}{e^{-4x-4y} - 2e^{-2x-2y+2xy} + e^{4xy}}\left(-e^{-x-y}\right)$$

$$+ \frac{4e^{-2x-2y+xy}}{e^{-4x-4y} - 2e^{-2x-2y+2xy} + e^{4xy}}\left(ye^{xy}\right)$$

$$= \frac{4e^{-2x-2y+2xy} + 4ye^{-2x-2y+2xy}}{e^{-4x-4y} - 2e^{-2x-2y+2xy} + e^{4xy}} \tag{4}$$

Από (3)=(4) επαληθεύεται η (2).

Φροντιστηριακό μάθημα 26-11-2021

Σύντομη υπενθύμιση θεωρίας

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας. Οι **πρωτεύοντες οδηγοί υποπίνακες** του A είναι

- $A_1 = (a_{11})$.
- $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

  $\vdots$
- $A_n = A$.

Επομένως οι **κύριες ελάσσονες ορίζουσες του** A(*leading principal minors*) είναι

- $|A_1| = a_{11}$.
- $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

  $\vdots$
- $|A_n| = |A|$.

Θεώρημα *Sylvester*

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας συμμετρικός (ερμητιανός αν τα στοιχεία του ανήκουν στο $\mathbb{C}$) $n \times n$ πίνακας. Τότε, ισχύουν

- Ο A είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \ \forall\ 1 \leqslant k \leqslant n.$
- Ο A είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν ισχύει

  $$(-1)^k |A_k| > 0 \ , \quad \forall\ 1 \leqslant k \leqslant n \ .$$

  Δηλαδή αν $|A_1| < 0,\ |A_2| > 0,\ |A_3| < 0,\ \dots$.
- Αν $|A_k| \neq 0 \ \forall\ 1 \leqslant k \leqslant n$, τότε ο πίνακας A είναι αόριστος αν και μόνο αν το σύνολο

  $$\{|A_1|,\ |A_2|/|A_1|, \dots,\ |A_n|/|A_{n-1}|\} \ ,$$

  περιέχει θετικά και αρνητικά στοιχεία (Δηλαδή όταν δεν ισχύουν τα προηγούμενα).

- Αντίστοιχα ο A θα είναι θετικά ημιορισμένος και αρνητικά ημιορισμένος αν και μόνο αν ισχύουν τα παραπάνω με $\leqslant 0$ και $\geqslant 0$.

Θεώρημα

Έστω A ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας. Τότε ισχύουν

- Ο A είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (αντίστοιχα θετικά ημιορισμένος αν είναι $\geqslant 0$).
- Ο A είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές (αντίστοιχα αρνητικά ημιορισμένος αν είναι $\leqslant 0$).
- Ο A είναι αόριστος αν και μόνο αν ίεχει μία τουλάχιστον θετική ιδιοτιμή και μία τουλάχιστον αρνητική.

Ορισμός (Κρίσιμο σημείο)

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών και πεδίο ορισμού το ανοικτό U. Ένα $\overrightarrow{a} \in U$ ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** της f, όταν η f είναι διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{a}$ με $\nabla f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, ή όταν η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{a}$.

Σημείωση: Τα τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης εντοπίζονται μεταξύ των κρίσιμων σημείων της f.

• Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το ανοικτό U, η οποία είναι C^2 σε ένα $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε ο $n \times n$ πίνακας

$$H = Hf(\overrightarrow{a}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix} (\overrightarrow{a}) \ ,$$

ονομάζεται Εσσιανός πίνακας της f στο $\overrightarrow{a}$.

Επομένως αν η f είναι C^2 σε όλο το U (δηλαδή $\forall \overrightarrow{x} \in U$) τότε ο Εσσιανός πίνακας είναι ο $n \times n$ πίνακας

$$Hf(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix} (\overrightarrow{x}) \ ,$$

με στοιχεία $(Hf)_{i,j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

• Λόγω της υπόθεσης ότι η f είναι C^2 και του θεωρήματος $Clairaut$ ($f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i}\ \forall i,j \in \{1,2,...,n\}$) προκύπτει ότι ο Hf είναι συμμετρικός $n \times n$ πίνακας.

• Ο Εσσιανός πίνακας μίας συνάρτησης f είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του ∇f, δηλαδή $H\left(f(\overrightarrow{x})\right) = J\left(\nabla f(\overrightarrow{x})\right)$.

Θεώρημα

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^2 πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το ανοικτό U και $\overrightarrow{a}$ ένα κρίσιμο σημείο της f. Τότε

- Αν ο πίνακας $Hf(\overrightarrow{a})$ είναι θετικά ορισμένος, τότε η f έχει στο $\overrightarrow{a}$ τοπικό ελάχιστο.
- Αν ο πίνακας $Hf(\overrightarrow{a})$ είναι αρνητικά ορισμένος, τότε η f έχει στο $\overrightarrow{a}$ τοπικό μέγιστο.
- Αν ο πίνακας $Hf(\overrightarrow{a})$ είναι αόριστος, τότε το $\overrightarrow{a}$ είναι σαγματικό σημείο.

Δεσμευμένα τοπικά ακρότατα

Θεώρημα

Έστω δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις $f(\overrightarrow{x}), g(\overrightarrow{x}) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το ανοικτό U. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$ δεσμευμένο τοπικό ακρότατο υπό τη δέσμευση $g(\overrightarrow{x}) = 0$ και ισχύει $\nabla g(\overrightarrow{a}) \neq \overrightarrow{0}$. Τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός λ έτσι ώστε να ισχύει

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = \lambda \nabla g(\overrightarrow{a}) \quad \text{και} \quad g(\overrightarrow{a}) = 0 \ .$$

Ένα τέτοιο σημείο σημείο $\overrightarrow{a}$ ονομάζεται **δεσμευμένο κρίσιμο σημείο** της f υπό τον περιορισμό $g(\overrightarrow{x}) = 0$. (Ο περιορισμός μπορεί να έχει τη μορφή $g(\overrightarrow{x}) = c$ στη βιβλιογραφία επομένως θέτουμε $h(\overrightarrow{x}) = g(\overrightarrow{x}) - c = 0$ και έχουμε το θεώρημα υπό τον περιορισμό $h(\overrightarrow{x}) = 0$).

• Η παράμετρος λ ονομάζεται **πολλαπλασιαστής** *Lagrange* ενώ η μέθοδος αναζήτησης τοπικών ακροτάτων υπό περιορισμό με χρήση του παραπάνω θεωρήματος ονομάζεται **μέθοδος** *Lagrange*.

• **Σημείωση:** Σύμφωνα με το Θεώρημα τα σημεία δεσμευμένων ακροτάτων βρίσκονται μεταξύ των δεσμευμένων κρίσιμων σημείων, των σημείων στα οποία μία από τις f και g δεν είναι C^1 ή τα σημεία για τα οποία ισχύει $\nabla g(\overrightarrow{a}) = 0$.

• Εάν ο περιορισμός $g(x, y) = 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $y = y(x)$ ή $x = x(y)$ τότε τα δεσμευμένα τοπικά ακρότατα θα αναζητηθούν μεταξύ των κρίσιμων σημείων της $f(x, y(x))$ ή $f(x(y), y)$ που είναι συναρτήσεις μίας μεταβλητής και τα οποία θα αποτελούν επίσης δεσμευμένα κρίσιμα σημεία. (Επομένως η μέθοδος *Lagrange* είναι για την περίπτωση που ο περιορισμός είναι σε πεπλεγμένη μορφή).

Μεθοδολογία Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2 πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού U και K ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του U. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K και ο υπολογισμός γίνεται με τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό $\overset{o}{K}$ του K.
2. Βρίσκουμε τις τιμές της f στα δεσμευμένα τοπικά ακρότατα της f υπό τις δεσμεύσεις που ορίζει το ∂K και τα οποία ανήκουν στο ∂K.
3. Συγκρίνουμε τις τιμές της f των προηγούμενων δύο βημάτων και η μεγαλύτερη από αυτές είναι η μέγιστη ενώ η μικρότερη είναι η ελάχιστη.

Σχόλιο σχετικά με τα ολικά ακρότατα: Μία συνάρτηση $f(x, y)$ που είναι συνεχής σε συμπαγές υποσύνολο (κλειστό + φραγμένο) έχει ολικά ακρότατα σάυτό. (Συνεχής συνάρτηση σε ένα A συμπαγές τότε το $f(A)$ θα είναι επίσης συμπαγές)

Ασκήσεις

Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των

$a)\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3$
$b)\quad f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3xz + 3yz$

Λύση

$a)$ Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους

$$f_x(x,y,z) = 2x - 2\,, \quad f_y(x,y,z) = 2y\,, \quad f_z(x,y,z) = 2z\,.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία βρίσκονται από την επίλυση του συστήματος

$$\nabla f(x,y,z) = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Επομένως το κρίσιμο σημείο είναι το $A(1,0,0)$.
Για να βρούμε τον Εσσιανό πίνακα της f σε αυτό το σημείο υπολογίζουμε πρώτα τις δεύτερες μερικές παραγώγους:

$$f_{xx}(x,y,z) = 2, \quad f_{yy}(x,y,z) = 2, \quad f_{zz}(x,y,z) = 2,$$
$$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 0, \quad f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 0, \quad f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 0\,.$$

Άρα ο Εσσιανός πίνακας στο σημείο $A(1,0,0)$ είναι

$$Hf(1,0,0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(1,0,0) & f_{xy}(1,0,0) & f_{xz}(1,0,0) \\ f_{yx}(1,0,0) & f_{yy}(1,0,0) & f_{yz}(1,0,0) \\ f_{zx}(1,0,0) & f_{zy}(1,0,0) & f_{zz}(1,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= f_{xx}(1,0,0) = 2 > 0 \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} f_{xx}(1,0,0) & f_{xy}(1,0,0) \\ f_{yx}(1,0,0) & f_{yy}(1,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} f_{xx}(1,0,0) & f_{xy}(1,0,0) & f_{xz}(1,0,0) \\ f_{yx}(1,0,0) & f_{yy}(1,0,0) & f_{yz}(1,0,0) \\ f_{zx}(1,0,0) & f_{zy}(1,0,0) & f_{zz}(1,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.2.2 = 8 > 0
\end{aligned}$$

Άρα αφού οι κύριες ελάσσονες είναι όλες θετικές έχουμε ότι στο $A(1,0,0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(1,0,0) = 2$.

$b)$ Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 + 3y + 3z\,, \quad f_y(x,y,z) = 3y^2 + 3x + 3z\,, \quad f_z(x,y,z) = 3z^2 + 3x + 3y\,.$$

Τα κρίσιμα σημεία δίνονται από την επίλυση του

$$\nabla f(x,y,z) = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3x^2 + 3y + 3z = 0 & (1) \\ 3y^2 + 3x + 3z = 0 & (2) \\ 3z^2 + 3x + 3y = 0 & (3) \end{cases}$$

Λόγω συμμετρικότητας ($x \to y \to z$ αμετάβλητο σύστημα) οι λύσεις του θα είναι $x = y = z$. Έχουμε λοιπόν την εξίσωση

$$3x^2 + 3x + 3x = 0 \;\Rightarrow\; 3(x^2 + 2x) = 0 \;\Rightarrow\; x(x+2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ή } x = -2\,.$$

Επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι τα $A(0,0,0)$ και $B(-2,-2,-2)$.

Για να βρούμε τον Εσσιανό πίνακα σε αυτά τα σημεία υπολογίζουμε πρώτα τις δεύτερες μερικές παραγώγους:

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y,z) = 6x\,, \quad f_{yy}(x,y,z) = 6y\,, \quad f_{zz}(x,y,z) = 6z\,,\\
&f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 3\,, \quad f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 3\,, \quad f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 3\,.
\end{aligned}$$

Για το κρίσιμο σημείο $A(0,0,0)$ βλέπουμε αμέσως ότι $\Delta_1 = f_{xx}(0,0,0) = 0$ άρα δεν ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη για τις κύριες ελάσσονες ώστε να προσδιορίσουμε από την θεωρία αν είναι σημείο μεγίστου ή ελαχίστου. Έστω λοιπόν ένα σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$ κοντά στο σημείο $A(0,0,0)$ και έστω η διαφορά

$$\delta = f(0,0,0) - f(x_0,y_0,z_0) = 0 - x_0^3 - y_0^3 - z_0^3 - 3x_0y_0 - 3y_0z_0 - 3x_0z_0\,.$$

Αν πάρουμε π.χ. $y_0 = z_0 = 0$ και $x_0 \neq 0$ έχουμε $\delta = -x_0^3$ το οποίο δεν έχει σταθερό πρόσημο άρα το σημείο $A(0,0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Για το κρίσιμο σημείο $B(-2,-2,-2)$ έχουμε

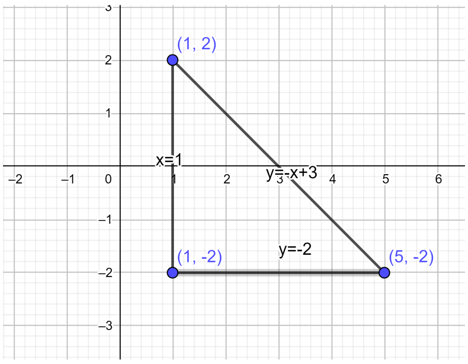
$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= f_{xx}(-2,-2,-2) = -12 < 0\\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} f_{xx}(-2,-2,-2) & f_{xy}(-2,-2,-2)\\ f_{yx}(-2,-2,-2) & f_{yy}(-2,-2,-2)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 3\\ 3 & -12\end{vmatrix} = 144 - 9 = 135 > 0\\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} f_{xx}(-2,-2,-2) & f_{xy}(-2,-2,-2) & f_{xz}(-2,-2,-2)\\ f_{yx}(-2,-2,-2) & f_{yy}(-2,-2,-2) & f_{yz}(-2,-2,-2)\\ f_{zx}(-2,-2,-2) & f_{zy}(-2,-2,-2) & f_{zz}(-2,-2,-2)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 3 & 3\\ 3 & -12 & 3\\ 3 & 3 & -12\end{vmatrix}\\
&= -12\,((-12).(-12) - 3.3) - 3\,(3.(-12) - 3.3) + 3\,(3.3 - (-12).3) = -1350 < 0
\end{aligned}$$

Άρα το $B(-2,-2,-2)$ είναι θέση τοπικού μεγίστου με $f(-2,-2,-2) = 12$.

Άσκηση 44 Κεφαλαίου 3.3 βιβλίου

Έστω $f(x,y) = 1 + xy + x - 2y$ και D τρίγωνο στον $\mathbb{R}^2$ με άκρα $(1,-2)$, $(5,-2)$, $(1,2)$. Να βρεθούν τα ολικά μέγιστα και ολικά ελάχιστα της f στο D. Να δοθούν όλα τα κρίσιμα σημεία.

Λύση



Το D είναι κλειστό και φραγμένο (συμπαγές) και η f συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική, επομένως παίρνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο D.

Βήμα 1 (Ελεύθερα κρίσιμα σημεία)

• Οι μερικές παράγωγοι της f είναι οι

$$f_x(x,y) = y+1\,, \quad f_y(x,y) = x-2\ .$$

Άρα το κρίσιμο σημείο είναι το σημείο που ικανοποιεί $(f_x(x,y)\,,\, f_y(x,y)) = (0,0) \ \Rightarrow \ \begin{cases} y+1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$ δηλαδή το σημείο $(2,-1)$. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα, το $(2,-1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου με $f(2,-1)=3$.

Βήμα 2 (σύνορο)

Το σύνορο του τριγώνου αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα με $x=1$, $-2\leqslant y\leqslant 2$, $y=-2$, $1\leqslant x\leqslant 5$ και την ευθεία που συνδέει τα σημεία $(1,2)$ και $(5,-2)$

$$y-2 = \frac{-2-2}{5-1}(x-1) \ \Rightarrow \ \varepsilon_3 : y = -x+3\ .$$

Για $x=2 \ \Rightarrow \ y=1$. Άρα όντως το κρίσιμο σημείο $(2,-1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου (δεν ανήκει σε καμία από τις πλευρές του τριγώνου, οι οποίες αποτελούν το σύνορό του).

Βήμα 3 (Δεσμευμένα κρίσιμα σημεία)

Το σύνορο του χωρίου (Τρίγωνο) αποτελείται από τα 3 σημεία (κορυφές τριγώνου) καθώς και τα 3 ευθύγραμμα τμήματα που τα συνδέουν (πλευρές τριγώνου) Εδώ οι περιορισμοί μπορούν να πάρουν την μορφή συνάρτησης μίας μεταβλητής $y=y(x)$ ή $x=x(y)$ το οποίο μας επιτρέπει να αποφύγουμε τη μέθοδο *Lagrange*.

• Για τα άκρα (κορυφές) έχουμε

$$\begin{aligned} &f(1,2) = 1+2+1-4 = 0\,,\\ &f(1,-2) = 4\,,\\ &f(5,-2) = 0\ . \end{aligned}$$

• Στο σύνορο $y=-x+3$ για $1\leqslant x\leqslant 5$:

$$f(x,-x+3) = 1 + x(-x+3) + x - 2(-x+3) = -x^2+6x-5 =: g(x)\ ,$$

δηλαδή η συνάρτηση f πάνω σε αυτήν την πλευρά του τριγώνου είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής και την ονομάζουμε $g(x) = f(x, -x+3)$. Τότε $g'(x) = -2x + 6$. Άρα $g'(x) = 0 \Rightarrow -2x+6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -3+3 = 0$, δηλαδή το κρίσιμο σημείο είναι το $(3, 0)$ με $g(3) = f(3, 0) = 4$.

• Στο σύνορο $x = 1$ για $-2 \leqslant y \leqslant 2$:

$$f(1, y) = 2 - y =: h(y) \ ,$$

δηλαδή η συνάρτηση f πάνω σε αυτήν την πλευρά του τριγώνου είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής και την ονομάζουμε $h(y) = f(1, y)$. Τότε $h(-2) = 4 = f(1, -2)$ και $h(2) = 0 = f(1, 2)$. (Εδώ παρατηρούμε ότι $h'(y) = -1$ και γιάυτό η h παίρνει μέγιστη 4 και ελάχιστη τιμή 0 στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος).

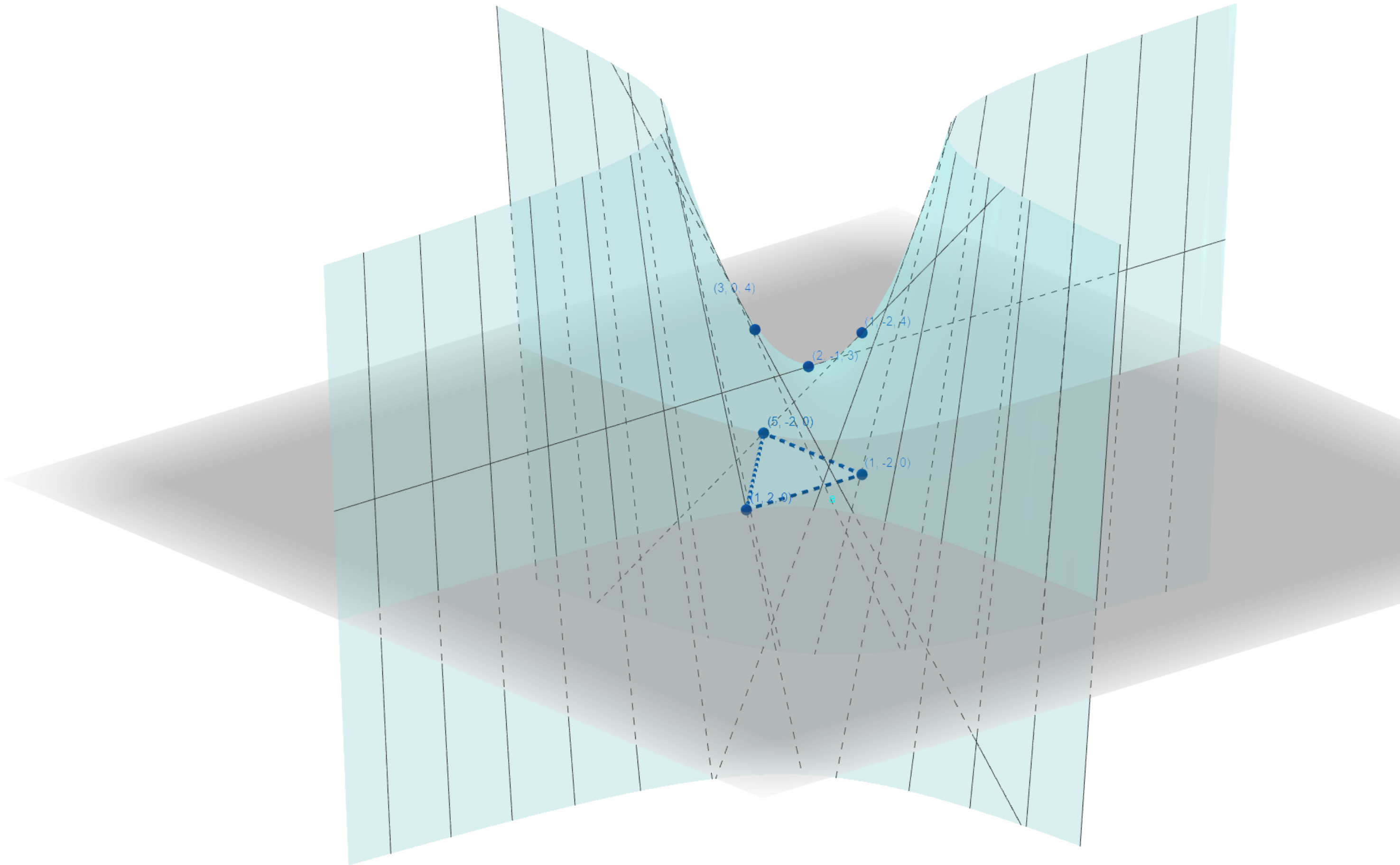
• Στο σύνορο $y = -2$ για $1 \leqslant x \leqslant 5$:

$$f(x, -2) = 5 - x =: k(x) \ ,$$

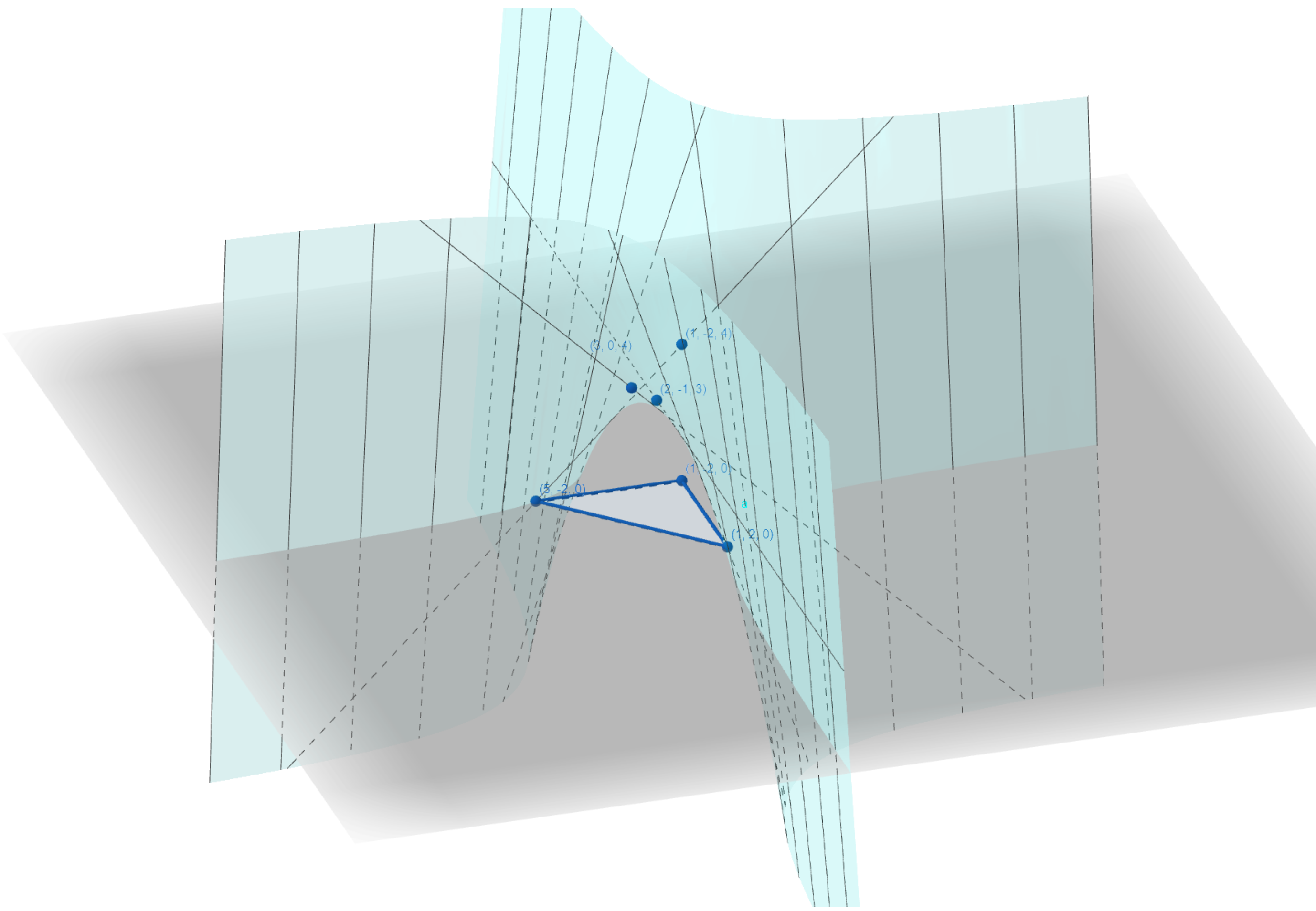
δηλαδή η συνάρτηση f πάνω σε αυτήν την πλευρά του τριγώνου είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής και την ονομάζουμε $k(x) = f(x, -2)$. Τότε $k(1) = f(1, -2) = 4$ και $k(5) = f(5, -2) = 0$. (Και εδώ παρατηρούμε ότι $k'(x) = -1$ επομένως η k παίρνει μέγιστη 4 και ελάχιστη τιμή 0 στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος).

Συνοψίζοντας, τα κρίσιμα σημεία είναι οι κορυφές του τριγώνου $(1, -2)$, $(5, -2)$ και $(1, 2)$ με $f(1, 2) = f(5, -2) = 0$ και $f(1, -2) = 4$ αντίστοιχα, το σημείο $(3, 0)$ που βρίσκεται πάνω στο σύνορο $y = -x + 3$ με $f(3, 0) = 4$ και το εσωτερικό σημείο $(2, -1)$ με $f(2, -1) = 3$.

Επομένως το ολικό μέγιστο είναι το $f(1, -2) = f(3, 0) = 4$ και το ολικό ελάχιστο είναι το $f(1, 2) = f(5, -2) = 0$.



(3, 0, 4)
(1, -2, 4)
(2, -1, 3)
(5, -2, 0)
(1, -2, 0)
(1, 2, 0)
a



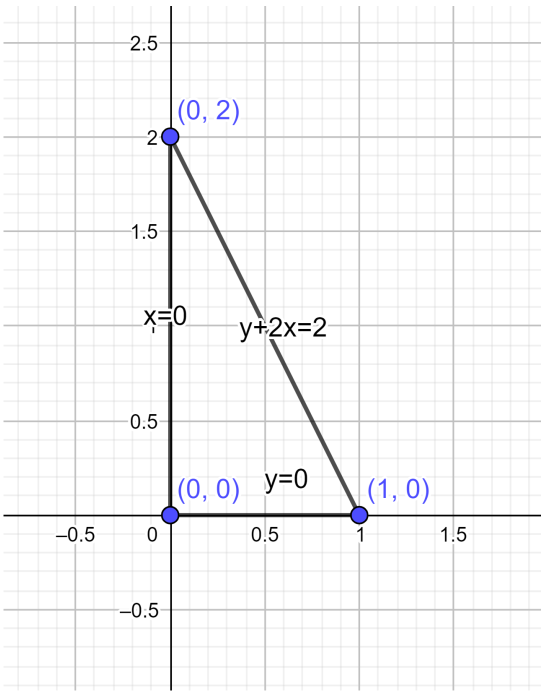
(1, -2, 4)
(3, 0, 4)
(2, -1, 3)
(1, -2, 0)
(5, -2, 0)
a
(1, 2, 0)

Άσκηση
Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2$ στην τριγωνική περιοχή που περιβάλλεται από τους άξονες $x = 0$, $y = 0$ και την ευθεία $y + 2x = 2$, συμπεριλαμβανομένου ολόκληρου του συνόρου.

Λύση
Όπως βλέπουμε και στο σχήμα, η περιοχή είναι ένα τρίγωνο (κλειστή και φραγμένη =συμπαγής περιοχή) και η συνάρτηση συνεχής ως πολυωνιμική, επομένως παίρνει ολικό μέγιστο και ελάχιστο σάυτό.

Βήμα 1 (Σύνορο)

Αρχικά για να βρούμε τις κορυφές του τριγώνου θα βρούμε την τομή (ανά δύο) των καμπυλών που το περιβάλλουν.
Η τομή των $x = 0$ και $y = 0$ είναι το σημείο $A(0,0)$.
Η τομη των $y = 0$ και $y = 2 - 2x$ δίνει $2 - 2x = 0 \ \Rightarrow \ x = 1$ άρα είναι το σημείο $B(1,0)$.
Η τομή των $x = 0$ και $y = 2 - 2x$ δίνει $y = 2$ άρα είναι το σημείο (κορυφή) $\Gamma(0,2)$.
Επομένως, οι κορυφές του τριγώνου είναι τα σημεία $A(0,0)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(0,2)$ και οι πλευρές του τριγώνου είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $AB = \{(x,y) : y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A\Gamma = \{(x,y) : x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ και $B\Gamma = \{(x,y) : y = 2 - 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.



Βήμα 2

- Ελεύθερα κρίσιμα σημεία:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 0\,, \ \ y = 0 \quad (\text{κορυφή A τριγώνου})\ ,$$

Επομένως δεν έχουμε κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του τριγώνου.

Βήμα 3

- Δεσμευμένα κρίσιμα σημεία:

Πρέπει να εξετάσουμε χωριστά τις τρεις καμπύλες του συνόρου.

Στην πλευρά AB : $y = 0$ για $0 \leqslant x \leqslant 1$: $f(x,0) = x^2$ (συνάρτηση μίας μεταβλητής πάνω σε αυτήν την καμπύλη) $\Rightarrow$ $f'(x,0) = 2x = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$. Άρα κρίσιμο σημείο το $(0,0)$ (κορυφή A τριγώνου) με $f(0,0) = 0$.

Στην πλευρά $A\Gamma$: $x = 0$ για $0 \leqslant y \leqslant 2$: $f(0,y) = y^2 \Rightarrow$ $f'(0,y) = 2y = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0$. Άρα κρίσιμο σημείο το $(0,0)$ (κορυφή A τριγώνου) με $f(0,0) = 0$.

Στην πλευρά $B\Gamma$: $y = 2 - 2x$ για $0 \leqslant x \leqslant 1$: $f(x, 2-2x) = x^2 + (2-2x)^2 = 5x^2 - 8x + 4$ (συνάρτηση μίας μεταβλητής πάνω σε αυτήν την καμπύλη) $\Rightarrow$ $f'(x, 2-2x) = 10x - 8 = 0$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{4}{5}$ άρα $y = \dfrac{2}{5}$. Δηλαδή κρίσιμο σημείο το $\Delta\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ με $f\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$.

- Κορυφές τριγώνου:

Οι κορυφές του τριγώνου είναι τα σημεία $A(0,0)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(0,2)$ με $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 1$ και $f(0,2) = 4$ αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας, τα κρίσιμα σημεία είναι οι κορυφές $A(0,0)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(0,2)$ και το σημείο $\Delta\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ που ανήκει στην πλευρά $B\Gamma$ με τιμές $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 1$, $f(0,2) = 4$ και $f\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$ αντίστοιχα. Συνεπώς, η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $(0,2)$ το $f(0,2) = 4$ και ολικό ελάχιστο στο $(0,0)$ το $f(0,0) = 0$.

Άσκηση 30, επαναληπτικές κεφαλαίου 3 βιβλίου

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y) = xy - y + x - 1$ στο σύνολο $x^2 + y^2 \leq 2$.

Λύση

$$f_x(x,y) = y + 1 \quad f_y(x,y) = x - 1 \ .$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του

$$\nabla f(x,y) = \overrightarrow{0} \ \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

άρα το κρίσιμο σημείο είναι το $(1,-1)$.

Χωρίζουμε το σύνολο $x^2 + y^2 \leq 2$ στο $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 2\}$ και το $\partial U = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2\}$.
Το κρίσιμο σημείο $(1,-1)$ ανήκει στο ∂U.
Στο σύνορο επομένως ορίζουμε τη $g(x,y) = x^2 + y^2 = 2$ με $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$.
Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *Lagrange*

$$\nabla f(1,-1) = \lambda \nabla g(1,-1) \ \Rightarrow \begin{cases} y + 1 = 2\lambda x & (1) \\ x - 1 = 2\lambda y & (2) \end{cases}$$
$$x^2 + y^2 = 2 \quad (3)$$

- Για $\lambda = 0$ έχουμε το $(1,-1)$ που ικανοποιεί την $x^2 + y^2 = 2$.
- Για $\lambda \neq 0$ παίρνουμε Αν προσθέσουμε τις (1),(2) παίρνουμε $x + y = 2\lambda(x+y) \ \Rightarrow (x+y)(2\lambda - 1) = 0$ άρα $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ή $x + y = 0 \ \Rightarrow y = -x$.

Αν $y=-x$ και $\lambda \neq \frac{1}{2}$: Από τη συνθήκη παίρνουμε $x^2+(-x)^2=2 \;\Rightarrow x^2=1 \;\Rightarrow x=\pm 1$ και επομένως $y=\mp 1$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(1,-1)$ και $(-1,1)$ με $f(1,-1)=0$ και $f(-1,1)=-4$ αντίστοιχα.
Αν $\lambda=\frac{1}{2}$ και $x+y\neq 0$: Από την (1) παίρνουμε $y=x-1$, Τότε $x^2+(x-1)^2=2 \Rightarrow 2x^2-2x+1=2$ $\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ και άρα $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ με $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=f\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.
Από όλα τα παραπάνω καταλήγουμε ότι η f έχει ελάχιστο το -4 στο $(-1,1)$ και μέγιστο το $\dfrac{1}{2}$ στα $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Άσκηση 9 φυλλάδιο 7
Βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=xyz$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=3$ και $y=2z$.

Λύση
Θεωρούμε $g_1(x,y,z)=x^2+y^2$ και $g_2(x,y,z)=y-2z$.
Το $K=\{(x,y,z)\,|\,g_1(x,y,z)=3\,,\; g_2(x,y,z)=0\}$ είναι συμπαγές σύνολο και η f είναι συνεχής.
Επομένως παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K.

Έχουμε $\nabla f(x,y,z)=(yz,\,xz,\,xy)$, $\nabla g_1(x,y,z)=(2x,\,2y,\,0)$ και $\nabla g_2(x,y,z)=(0,\,1,\,-2)$.

Παρατηρούμε ότι τα ∇g_1 και ∇g_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
Πράγματι, αν υπήρχαν $\lambda_1,\,\lambda_2\in\mathbb{R}$ με $\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2=0$ και $\lambda_1\neq 0$ ή $\lambda_2\neq 0$ τότε θα είχαμε:
i) Αν $\lambda_2\neq 0$, τότε $\nabla g_2=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\nabla g_1 \Rightarrow -2=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}0=0\Rightarrow$ άτοπο.
ii) Αν $\lambda_2=0$, τότε $\lambda_1\nabla g_1=0\Rightarrow \lambda_1(2x,\,2y,\,0)=(0,0,0)$, το οποίο για $\lambda_1\neq 0$ δίνει $x=y=0\Rightarrow$ άτοπο λόγω της $x^2+y^2=3$.
Επομένως $\lambda_1=\lambda_2=0$ και άρα τα ∇g_1 και ∇g_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Ισοδύναμα για την γραμμική ανεξαρτησία θα μπορούσαμε να πάρουμε τις 2×2 ορίζουσες του Ιακωβιανού $J\left(\dfrac{g_1,g_2}{x,y,z}\right)=\begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z}\\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ και αρκεί να δούμε αν τουλάχιστον μία από αυτές είναι $\neq 0$ για να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο Ιωακοβιανός δεν έχει καμία 2×2 ορίζουσα $\neq 0$ αν $x=y=0$ το οποίο απορρίπτεται καθώς τότε δεν θα ικανοποιούταν η $x^2+y^2=3$. Επομένως μία τουλάχιστον από αυτές θα είναι $\neq 0$.

Επομένως, αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο K τότε έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1,\,\lambda_2\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\nabla f=\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2 \Leftrightarrow \begin{cases} yz=\lambda_1 2x+\lambda_2 0\\ xz=\lambda_1 2y+\lambda_2 1\\ xy=\lambda_1 0+\lambda_2(-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz=\lambda_1 2x\\ xz=\lambda_1 2y+\lambda_2\\ xy=-2\lambda_2\end{cases}$$

• Αν $x=0\;\Rightarrow \begin{cases} y=0\Rightarrow x^2+y^2=0\Rightarrow \text{άτοπο.}\\ z=0\Rightarrow y=2.0=0\Rightarrow \text{άτοπο.}\end{cases}$

• Αν $x\neq 0\;\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\dfrac{yz}{2x}\\ \lambda_2=\;-\dfrac{xy}{2}\\ xz=\dfrac{y^2z}{x}-\dfrac{xy}{2}\end{cases}$

• Αν $x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{yz}{2x} \\ \lambda_2 = -\dfrac{xy}{2} \\ xz = \dfrac{y^2 z}{x} - \dfrac{xy}{2} \end{cases}$

όπου πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση επί $2x (\neq 0)$ και αντικαθιστώντας το $z = \dfrac{y}{2}$ από τη δεύτερη συνθήκη της εκφώνησης παίρνουμε

$$x^2 y = y^3 - x^2 y \Rightarrow 2x^2 y = y^3 . \tag{1}$$

όπου τότε έχουμε τις εξης περιπτώσεις:

i) Αν $y = 0 \Rightarrow$ από τις συνθήκες παίρνουμε $z = \dfrac{y}{2} = 0$ και $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

ii) Αν $y \neq 0 \Rightarrow$ από την 1 παίρνουμε $2x^2 = y^2$ και τότε από την πρώτη συνθήκη παίρνουμε $3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1}$. Οπότε $y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$ και άρα $z = \dfrac{y}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε ότι οι πιθανές θέσεις μεγίστου και ελαχίστου είναι τα σημεία $\left(\sqrt{3}, 0, 0\right)$, $\left(-\sqrt{3}, 0, 0\right)$, $(1, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $(1, -\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1, -\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης f στα σημεία αυτά είναι

$f\left(\sqrt{3}, 0, 0\right) = f\left(-\sqrt{3}, 0, 0\right) = 0,$

$f(1, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = f(1, -\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 1,$

$f(-1, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = f(-1, -\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -1.$

Επομένως $\max\limits_K f = 1$ και $\min\limits_K f = -1$.

Άσκηση 10 φυλλάδιο 7

Βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = xy + xz$ υπό τις συνθήκες $2x + 3z = 5$ και $xy = 4$.

Λύση

Η συνάρτηση f μέσω των συνθηκών γράφεται ως

$$f(x, y, z) = xy + xz = 4 + x\left(\frac{5 - 2x}{3}\right) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 4 =: g(x) .$$

Η παράγωγός της είναι

$$g'(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad g'(x) = \frac{1}{3}(5 - 4x)$$

και μηδενίζεται στο σημείο $x = \dfrac{5}{4}$.

Άρα έχουμε

X	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
g′(x)		+		-	
g(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

Επομένως

$$\max_{\substack{xy=4 \\ 2x+3z=5}} f(x,y,z) = \max_{x\in\mathbb{R}} g(x) = g\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{2}{3}.\frac{25}{16} + \frac{5}{3}.\frac{5}{4} + 4 = -\frac{25}{24} + \frac{50}{24} + \frac{96}{24} = \frac{121}{24}\,.$$