Ανάλυση ΙΙ

Εξέταση 4 Δεκεμβρίου 2021

1. (15 Βαθμοί) Δίνονται τα διανύσματα $u := (1, -3, 1), v := (-5, 2, 4)$.

(α) Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ που να είναι κάθετο και στο u και στο v.

(β) Δώστε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 1, 1)$ και έχει διεύθυνση u.

2. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \cos(xy^2)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(x, y).$$

3. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y}.$$

(α) Να προσδιοριστεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημά της στο σημείο $(1/2, 1, 4)$.

(β) Στο σημείο $(1/2, 1)$, ποια είναι η κατεύθυνση ταχύτερης μείωσης για την f;

4. (20 Βαθμοί) Για μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $\nabla F(x, y) = (cyx^2, x^3 + \sin(y))$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Να υπολογιστεί το c. [Υπόδειξη: Υπολογίστε την $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.]

(β) Να υπολογιστεί η

$$\frac{d}{dt} F(\sin(t), 2 - t).$$

5. (15 Βαθμοί) Έστω $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $u(s, t) = F(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ για κάθε $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Να δειχθεί ότι

$$t \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) + s \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = 0$$

για κάθε $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

6. (20 Βαθμοί) Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A := [1/2, 2] \times [1/2, 2]$, με

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

για κάθε $(x, y) \in A$.

(α) Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του A; Παρουσιάζει η f σε κάποιο από αυτά τοπικό ακρότατο;

(β) Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;

(γ) Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο A.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. (α) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = ... = (-14, -9, -13).$$

(β) $\ell(t) = (1, 1, 1) + t(1, -3, 1), t \in \mathbb{R}$.

2. Απλή άσκηση.

3. Απλή άσκηση.

4. (α) $c = 3$ αφού $F_{xy} = F_{yx}$.

(β) Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(\sin(t), 2-t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\sin(t), 2-t)\frac{\partial}{\partial t}\sin(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\sin(t), 2-t)\frac{\partial}{\partial t}(2-t) \\ &= 3(2-t)\sin^2(t)\cos(t) - \{\sin^3(t) + \sin(2-t)\}.\end{aligned}$$

5. Έστω x, y οι μεταβλητές της F, δηλαδή γράφουμε $F(x, y)$ για μία γενική τιμή της F. Συμβολίζουμε με F_x την $\partial F/\partial x$ και με F_y την $\partial F/\partial y$. Έπειτα θεωρούμε τις συναρτήσεις $x(s,t) := s^2 - t^2$, $y(s,t) := t^2 - s^2$ (με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$). Τότε ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial x}{\partial s}(x(s), y(s)) + \frac{\partial F}{\partial y}(y(s,t), y(s,t))\frac{\partial y}{\partial s}(x(s), y(s)) \\ &= 2sF_x(s^2 - t^2, t^2 - s^2) - 2sF_y(s^2 - t^2, t^2 - s^2), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(s,t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial x}{\partial t}(x(s), y(s)) + \frac{\partial F}{\partial y}(y(s,t), y(s,t))\frac{\partial y}{\partial t}(x(s), y(s)) \\ &= -2tF_x(s^2 - t^2, t^2 - s^2) + 2tF_y(s^2 - t^2, t^2 - s^2).\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις ποσότητες, βρίκουμε ότι

$$t\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) + s\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = ... = 0.$$

6. (α) Εχουμε

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= -\frac{1}{x^2} + y, \\ f_y(x,y) &= -\frac{1}{y^2} + x.\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ δίνουν $(x,y) = (1,1)$, το οποίο ανήκει στο εσωτερικό του A. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο A°, δεν υπάρχει άλλο κρίσιμο σημείο στο A°.

(β) Το A είναι κλειστό και φραγμένο, ενώ η f είναι συνεχής σε αυτό. Από γνωστό θεώρημα, έπεται ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A.

(γ)