

Ανάλυση ΙΙ - Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Εξέταση Φεβρουαρίου 2021 (11-2-2021)

1ο Μέρος - Ομάδα Β

Οδηγίες: Σε πολλά από τα θέματα που ακολουθούν εμφανίζονται οι παράμετροι a, b, c . Οι παράμετροι αυτές αντιστοιχούν με αυτή τη σειρά στα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Για να λύσετε το κάθε θέμα θα πρέπει να ξεκινήσετε αντικαθιστώντας σωστά τις τιμές αυτών των παραμέτρων. Για παράδειγμα, αν ο αριθμός μητρώου σας ήταν sdi1800039, τότε θα έπρεπε να θέσετε $a = 0, b = 3, c = 9$.

Θέμα 1ο.

Δίνεται η ευθεία

$$\vec{\ell}(t) = (5, -1, 2) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}$$

(όπου a, b, c είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας).

A. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στην ευθεία $\vec{\ell}(t)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 4, -3)$.

B. Βρείτε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας $\vec{r}(t)$ που διέρχεται από το σημείο $K(a, b, c)$ και τέμνει την $\vec{\ell}(t)$ υπό ορθή γωνία. (Υπόδειξη: Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών $\vec{\ell}(t)$ και $\vec{r}(t)$, θεωρήστε το διάνυσμα \vec{KB} .)

Θέμα 2ο.

Έστω $\lambda = b + 2$. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = -x^3 + 3\lambda x - 4y^2.$$

A. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και προσδιορίστε το είδος τους.

B. Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης της συνάρτησης f με κέντρο το σημείο $(0, 0)$.

Θέμα 3ο.

A. Έστω $\mu = c + 2$. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \mu y^2 - x^2 - 2x.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f πάνω στην έλλειψη $x^2 + \mu y^2 = 1$.

B. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\beta \in \mathbb{R}$ με $\beta > 0$. Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, αποδείξτε ότι

$$\int_0^\beta \int_0^y f(x) dx dy = \int_0^\beta (\beta - x) f(x) dx .$$