Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$

Στον $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε και μία ακόμα πράξη, η οποία ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο.

Αντίθετα με αυτό που συνέβαινε με το εσωτερικό γινόμενο, το αποτέλεσμα αυτής της πράξης είναι ένα διάνυσμα:

Αν $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, τότε $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Ο ορισμός που θα δώσουμε είναι αλγεβρικός και, στη συνέχεια, θα δούμε τη γεωμετρική του σημασία.

Χρειάζεται να θυμηθούμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες της <u>ορίζουσας</u> ενός 3x3 πίνακα:

Για 2x2 πίνακες:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Για 3x3 πίνακες:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ο κανόνας είναι:

Κινούμαστε κατά μήκος της 1ης γραμμής ξεκινώντας με + και εναλλάσσοντας τα πρόσημα.

Για $j = 1, 2, 3$, ο j-στος όρος του προσημασμένου αθροίσματος είναι: Το γινόμενο του a_{1j} επί την ορίζουσα του 2x2 πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε την 1η γραμμή και τη j-στη στήλη του αρχικού πίνακα.

Ιδιότητες των οριζουσών

1) Αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.

2) Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από κάθε γραμμή της, όταν κρατάμε τις άλλες σταθερές, δηλαδή π.χ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

και

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3) Αν ένας πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με 0.

Με βάση το (2), το ίδιο ισχύει και αν η μία γραμμή του πίνακα είναι πολλαπλάσιο της άλλης.

Ορισμός εξωτερικού γινομένου:

Έστω $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, δηλαδή $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$

και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, δηλαδή $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$

Ορίζουμε:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

(Η πρώτη ορίζουσα είναι απλώς ένας συμβολισμός - μια φορμαλιστική παράσταση για να θυμόμαστε πιο εύκολα τη δεύτερη έκφραση).

Για παράδειγμα, αν

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{και} \quad \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$$

τότε

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

2) $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times c) + \mu(\vec{b} \times \vec{c})$

3) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Έπεται ότι, αν $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, τότε πάλι $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου

(i) Διεύθυνση του $\vec{a} \times \vec{b}$

Εισάγουμε πρώτα την έννοια του μεικτού γινομένου τριών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$, στην οποία θα επανέλθουμε αργότερα:

Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, το μεικτό τους γινόμενο είναι ο αριθμός

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \qquad \text{(με αυτή τη σειρά).}$$

Έστω $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Τότε

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

δηλαδή

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Έπεται άμεσα ότι:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \qquad \text{και} \qquad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

(Ιδιότητα 3 οριζουσών)

Άρα και για κάθε γραμμικό συνδυασμό $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ των $\vec{a}, \vec{b}$, είναι

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Με άλλα λόγια, το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγεται από τα $\vec{a}, \vec{b}$, αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ δεν είναι συγγραμμικά.

(ii) Μέτρο του $\vec{a}\times\vec{b}$

Αν $\vec{a}=\vec{0}$ ή $\vec{b}=\vec{0}$, βλέπουμε άμεσα ότι $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Για τον υπολογισμό του μέτρου του $\vec{a}\times\vec{b}$ $\left(\begin{smallmatrix}\vec{a}\neq\vec{0}\\ \vec{b}\neq\vec{0}\end{smallmatrix}\right)$ θα χρειαστούμε την

Ταυτότητα του Lagrange:

Για κάθε a_1, a_2, a_3, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

Απόδειξη: Πράξεις

Παρατηρούμε τώρα ότι:

Αν $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$

τότε

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$\underset{\substack{\text{ταυτότητα}\\ \text{Lagrange}}}{=}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$
$$=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta$$
$$=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\sin^2\theta$$

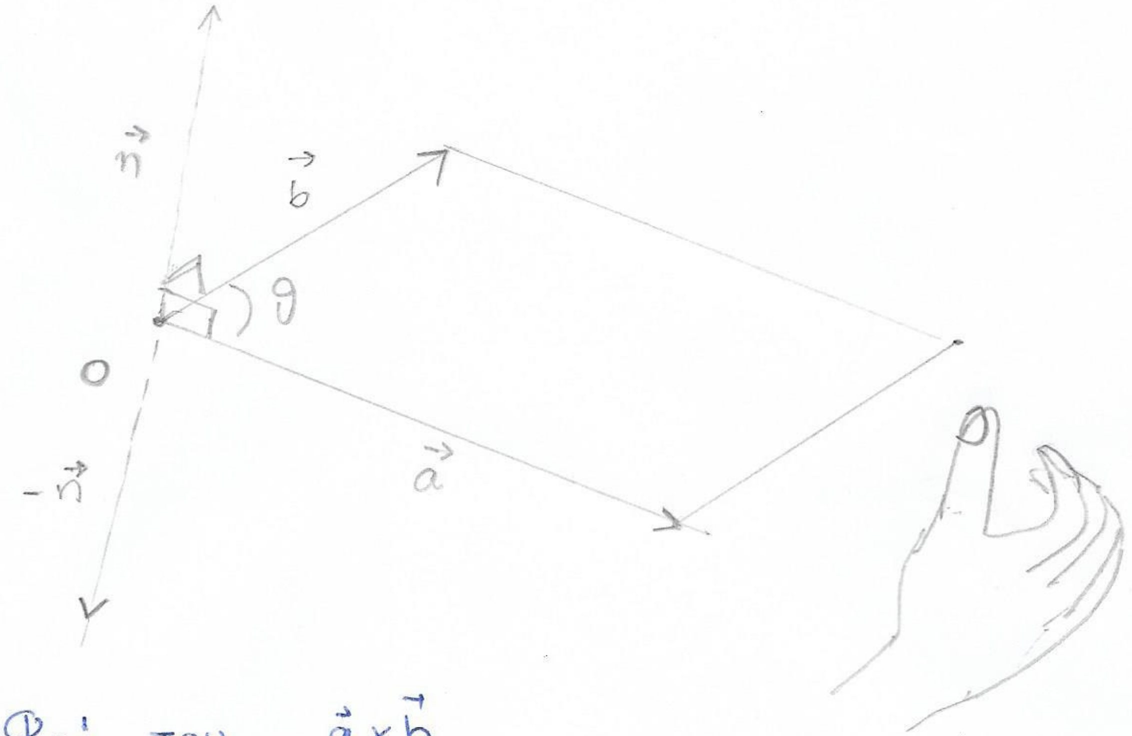
Συμπεραίνουμε ότι

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,|\sin\theta|,$$

όπου θ η γωνία των $\vec{a},\vec{b}$. Αφού $0\leq\theta\leq\pi$, είναι $\sin\theta\geq 0$, άρα τελικά

$$\boxed{\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta}$$

$\vec n = \vec a \times \vec b$



(iii) <u>Φορά του $\vec a \times \vec b$</u>

Όπως είδαμε, αν τα $\vec a, \vec b$ δεν είναι συγγραμμικά (είναι γραμμικώς ανεξάρτητα), τότε το $\vec n = \vec a \times \vec b$ είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγεται από τα $\vec a, \vec b$ και έχει μέτρο $\|\vec n\| = \|\vec a\| \|\vec b\| \sin\theta$. Υπάρχουν όμως δύο διανύσματα (αντίθετα) που έχουν αυτή τη διεύθυνση και αυτό το μέτρο. Για να προσδιορίσουμε πλήρως το $\vec a \times \vec b$ πρέπει να προσδιορίσουμε και τη φορά του. Αυτή προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού:

Αν στρέψουμε τα δάχτυλα του δεξιού μας χεριού παράλληλα με το επίπεδο των $\vec a, \vec b$, κατά θ, με κατεύθυνση από το $\vec a$ προς το $\vec b$, τότε ο αντίχειρας δίνει την κατεύθυνση του $\vec a \times \vec b$.
(Θυμηθείτε ότι $\vec b \times \vec a = -(\vec a \times \vec b)$)

Παράδειγμα 1

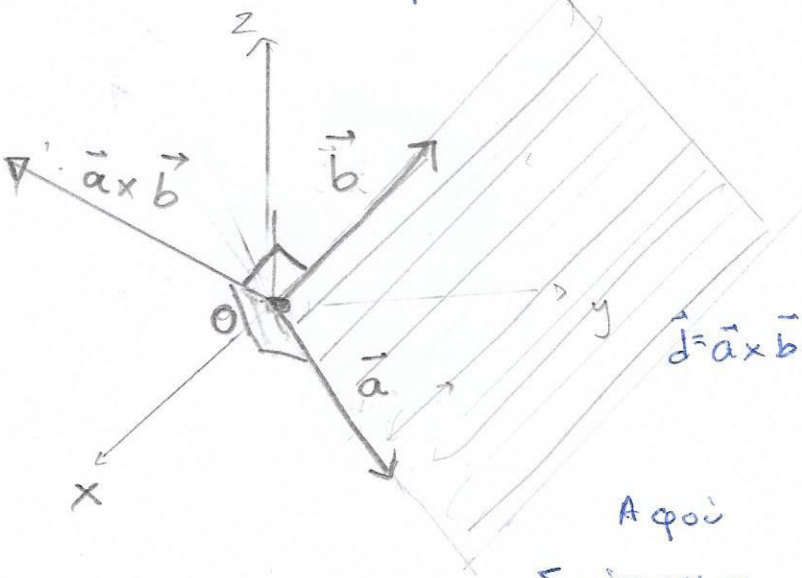
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$,

αλλά $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ κ.λ.π.

Βλέπουμε ότι μία βασική εφαρμογή του εξωτερικού γινομένου είναι ότι μας δίνει ένα διάνυσμα κάθετο σε δεδομένο επίπεδο - αρκεί να γνωρίζουμε δύο διανύσματα αυτού του επιπέδου.

Παράδειγμα 2

Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.



Ένα διάνυσμα κάθετο σε αυτό το επίπεδο είναι το $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Είναι

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Αφού $\|\vec{d}\| = \sqrt{3}$, το διάνυσμα $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k}$

είναι μοναδιαίο και κάθετο στο επίπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$.

Παράδειγμα 3

Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο (Ε) που διέρχεται από τα σημεία
$A(1,2,0)$, $B(0,1,-2)$ και $\Gamma(4,0,1)$.

Δύο διανύσματα του επιπέδου (Ε) είναι τα $\vec{u} = \vec{BA} = (1, 1, 2)$ και $\vec{w} = \vec{A\Gamma} = (3,-2,1)$

Άρα το $\vec{d} = \vec{u} \times \vec{w}$ είναι κάθετο στο επίπεδο (Ε).

Είναι

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} .$$

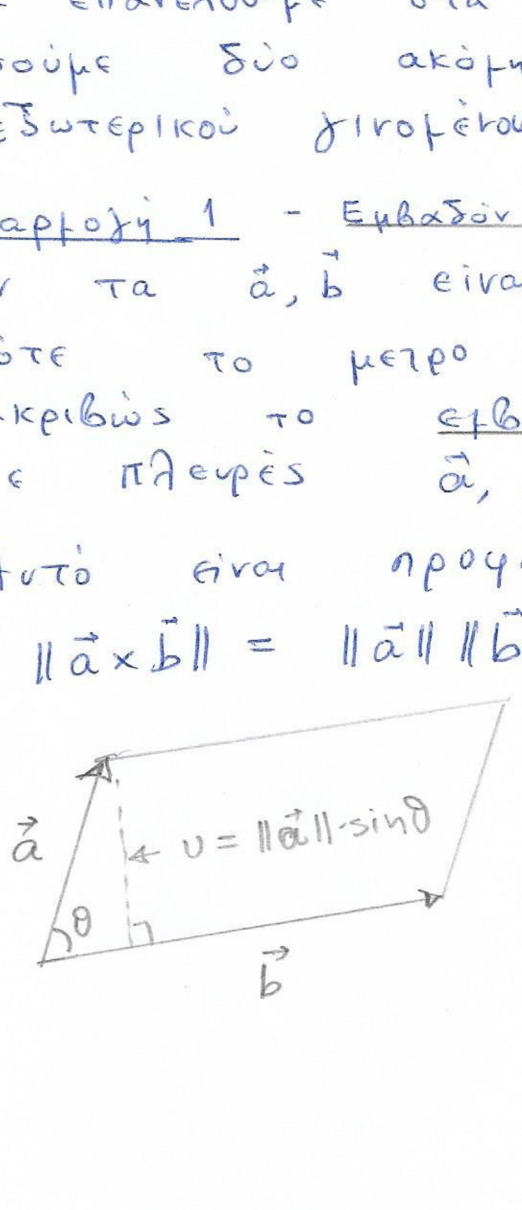
Θα επανέλθουμε στα επίπεδα, αφού πρώτα δούμε δύο ακόμη βασικές εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου.

Εφαρμογή 1 - Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το μέτρο του $\vec{a} \times \vec{b}$ δίνει ακριβώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{a}, \vec{b}$.

Αυτό είναι προφανές, αφού, όπως είδαμε,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta$$



Ειδικότερα, αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ βρίσκονται στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ και $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, τότε

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{a}, \vec{b}$, δίνεται από την απόλυτη τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

$$E = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Απόδειξη

Είναι

$$E = \|\vec{a}\times\vec{b}\|, \text{ όπου } \quad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

Άρα $\quad \vec{a}\times\vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\cdot\vec{k}$,

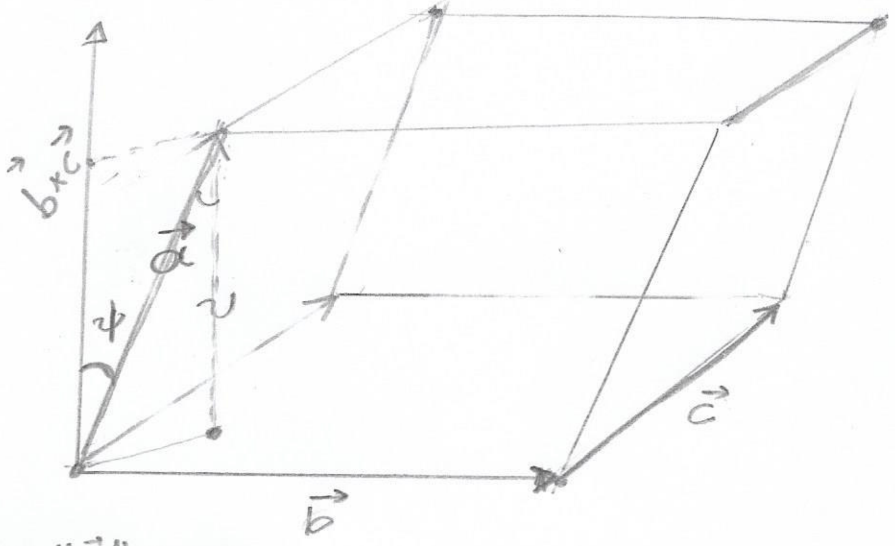
και $\quad E = \|\vec{a}\times\vec{b}\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$

αφού το $\vec{k}$ είναι μοναδιαίο.

Εφαρμογή 2 - Όγκος παραλληλεπιπέδου

Αν $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ είναι τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στον χώρο, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν, δίνεται από την απόλυτη τιμή της ορίζουσας $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, δηλαδή

$$V = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$



$\upsilon = \|\vec{a}\|\cos\psi$

Απόδειξη

Από τη γεωμετρία, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος.
Ως βάση θεωρούμε την έδρα που ορίζεται από τα $\vec{b}, \vec{c}$, η οποία έχει εμβαδόν $\|\vec{b}\times\vec{c}\|$ όπως είδαμε, οπότε το αντίστοιχο ύψος υ είναι ίσο με $\upsilon = \|\vec{a}\|\cos\psi$, όπου ψ η οξεία γωνία μεταξύ του $\vec{a}$ και της ευθείας που είναι κάθετη στο επίπεδο των $\vec{b}, \vec{c}$, η διεύθυνση της οποίας δίνεται από το διάνυσμα $\vec{b}\times\vec{c}$.
Άρα

$$V = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\times\vec{c}\|\cdot\cos\psi$$

Η τελευταία έκφραση όμως ισούται με
$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$.
(Η απόλυτη τιμή χρειάζεται, γιατί η γωνία μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{b}\times\vec{c}$ μπορεί να ισούται με την ψ, αλλά μπορεί και να ισούται με την $\pi-\psi$).

Η ποσότητα μέσα στην απόλυτη τιμή είναι το μεικτό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, που συναντήσαμε και νωρίτερα, το οποίο έχουμε δει ότι ισούται με:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

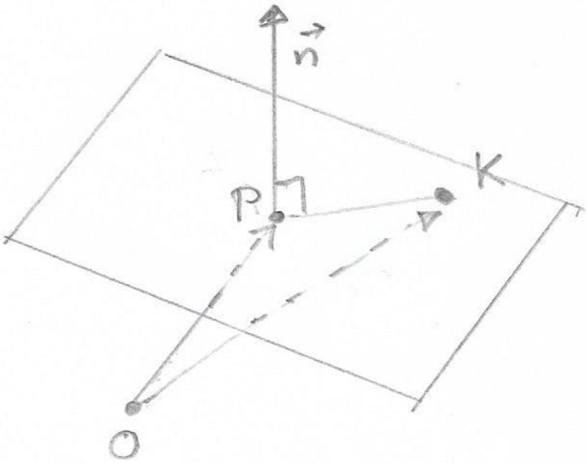
Συμπεραίνουμε ότι

$$V = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$

Παρατηρήστε ότι αυτός ο τύπος συμπληρώνει φυσιολογικά τον τύπο για το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$:

Το εμβαδόν του παρ/μμου των $\vec{a}, \vec{b}$ δίνεται από την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του 2×2 πίνακα που ορίζεται από τις συντεταγμένες των $\vec{a}, \vec{b}$, ενώ ο όγκος του παραλληλεπιπέδου των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, δίνεται από την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του 3×3 πίνακα που ορίζεται από τις συντεταγμένες των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Εφαρμογή 3 Εξίσωση επιπέδου



Θα βρούμε την εξίσωση ενός επιπέδου (Ε) όταν ξέρουμε ένα σημείο του $P(x_0, y_0, z_0)$ και ένα διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$ κάθετο σε αυτό.

Έστω $K(x, y, z)$ σημείο του χώρου.

Έχουμε:

$K \in (E) \iff \vec{PK}$ διάνυσμα του (E)

$$\iff \vec{PK} \perp \vec{n} \iff \vec{PK} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\iff (x - x_0) \cdot A + (y - y_0) \cdot B + (z - z_0) \cdot \Gamma = 0$$

$$\iff Ax + By + \Gamma z = Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0$$

Θέτοντας $\Delta = -(Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0)$ - σταθερά, βλέπουμε ότι η εξίσωση ενός επιπέδου στο χώρο είναι της μορφής

$$(*) \quad Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0,$$

όπου το $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

Αντίστροφα, μπορούμε να δούμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής (*), όπου τα A, B, Γ δεν είναι όλα 0, παριστάνει ένα επίπεδο στο χώρο. (Άσκηση)

Παράδειγμα

Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα σημεία $K(1,1,1)$, $\Lambda(2,0,0)$, $M(1,1,0)$.

Λύση

Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{K\Lambda} = (1,-1,-1)$ και $\vec{b} = \vec{KM} = (0,0,-1)$ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο, άρα ένα διάνυσμα $\vec{n}$ κάθετο σε αυτό το επίπεδο είναι το

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j}$$

Άρα το επίπεδο δίνεται από μια εξίσωση της μορφής

$$x + y + \Delta = 0,$$

όπου Δ σταθερά.

Για να προσδιορίσουμε το Δ, βάλουμε στη θέση των x, y, z τις συντεταγμένες ενός γνωστού σημείου του επιπέδου, π.χ. του K. Αυτές θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση:

Για $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, παίρνουμε

$$1 + 1 + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -2.$$

Τελικά, το επίπεδο έχει εξίσωση

$$x + y - 2 = 0.$$