Ανάλυση II
Ενδεικτικές Απαντήσεις 2ου Διαγωνίσματος

Θέμα 1ο.

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις και ταξινομήστε τα ως τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σαγματικά σημεία.

(α) $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$

(β) $g(x,y) = xy - x + y$

Λύση

(α) Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η f είναι της κλάσης C^∞, ως πολυωνυμική.

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της f λύνουμε την εξίσωση $\nabla f(x) = \vec{0}$. Είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-2) = 0 \\ 2(y-3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ \text{και} \\ y = 3 \end{cases}.$$

Συμπεραίνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(2,3)$.

Είναι τώρα φανερό ότι

$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 0 = f(2,3)$.

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(2,3)$.

(Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με τη διακρίνουσα Δ της f στο $(2,3)$.

Είναι: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Άρα

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,3) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,3)\right)^2 = 4 > 0$$

Αφού $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3) > 0$ και $\Delta > 0$, έπεται ότι το $(2,3)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.)

(β) Έστω $g(x,y) = xy - x + y$.

Παρατηρούμε ότι η g είναι της κλάσης C^∞ ως πολυωνυμική.

Είναι $\frac{\partial g}{\partial x} = y - 1$ και $\frac{\partial g}{\partial y} = x + 1$.

Έχουμε:

$$\nabla g(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της g είναι το $(-1,1)$.

Εξετάζουμε τη διακρίνουσα Δ της g στο σημείο αυτό. Είναι

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1.$$

Άρα

$$\Delta = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(-1,1) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(-1,1) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-1,1) = -1 < 0.$$

Αφού $\Delta < 0$, συμπεραίνουμε ότι το $(-1,1)$ είναι σαγματικό σημείο της g.

Θέμα 2ο

(α) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης κέντρου (0,0) για τη συνάρτηση

$$f(x,y) = y\sin x$$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι της κλάσης C^∞ ως γινόμενο δύο C^∞ συναρτήσεων.

Το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης κέντρου (0,0) της f είναι το

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right]$$

Εχουμε: $\quad f(0,0) = 0$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left. y\cos x\right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\sin x\right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = \left.-y\sin x\right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\cos x\right|_{(0,0)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 0$$

Αρα $\quad P_2(x,y) = x\cdot y \quad$ και

$f(x,y) = x\cdot y + R_2(x,y)$, όπου

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0 .$$

Θέμα 2ο

(β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$$

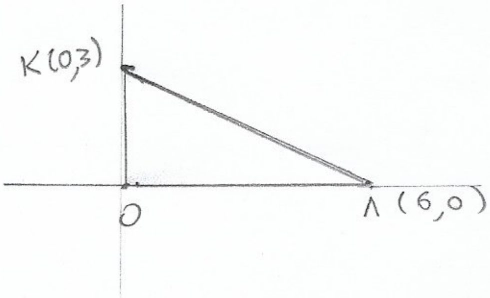
υπό τον περιορισμό $x+2y=6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Λύση

Το σύνολο

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y=6 \, , \, x \geq 0 \, , \, y \geq 0 \}$$

είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $K(0,3)$ και $\Lambda(6,0)$, το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή συμπαγές.
Έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A.



Αν η f έχει ακρότατο σε κάποιο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$, τότε, σύμφωνα με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, θα ισχύει

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0) \quad \text{για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R},$$

όπου $g(x,y) = x + 2y$.

Είναι $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2$,

άρα παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} -2x = \lambda \\ -2y = 2\lambda \\ x+2y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x+2y=6 \\ \lambda = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} 5x = 6 \\ y = 2x \\ \lambda = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{12}{5} \\ \lambda = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Έπεται ότι: Τα ακρότατα της συνάρτησης f στο σύνολο A βρίσκονται σε κάποια από τα σημεία $M\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$, $K(0,3)$ και $\Lambda(6,0)$.

Συγκρίνοντας τις τιμές της f σε αυτά τα σημεία, βλέπουμε ότι

$$f\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right) = 8{,}8$$

$$f(0,3) = 7$$

$$f(6,0) = -20$$

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $M\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ και έχει μέγιστη τιμή

$$f_{max} = f\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right) = 8{,}8 .$$

Θέμα 3ο

(α) Έστω $x(t) = \sin t$, $y(t) = 2\cos t$, $t \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Βρείτε την παράγωγο $\frac{dz}{dt}$ της σύνθετης συνάρτησης $z = f(x(t), y(t))$ στο σημείο $t = \pi$, συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f.

Λύση

Από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Είναι $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\pi} = \cos\pi = -1$

$$\frac{dy}{dt} = -2\sin t \Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = -2\sin\pi = 0$$

και $(x(\pi), y(\pi)) = (\sin\pi, 2\cos\pi) = (0,-2)$.

Άρα

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\pi} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,-2)} \cdot \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\pi} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,-2)} \cdot \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(0,-2)$$

Θέμα 3ο

(Β) Βρείτε τον όγκο του στερεού K που προκύπτει αν από τη σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2 αφαιρέσουμε το τμήμα που περικλείεται από τον κύλινδρο ακτίνας 1 με άξονα τον $z'z$.

Λύση

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4$ δίνεται από την εξίσωση: $r^2+z^2=4$, και ο κύλινδρος ακτίνας 1 $(x^2+y^2=1)$ δίνεται από την εξίσωση $r=1$.

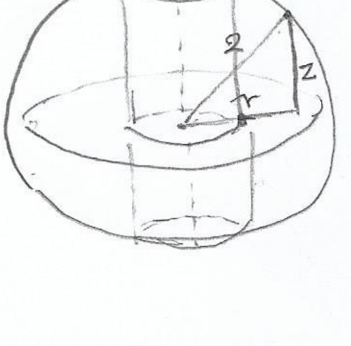
Ο όγκος του στερεού K δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$V(K) = \iiint_K dx\,dy\,dz$$

, το οποίο με αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες γίνεται

$$V(K) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} 2r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta$$



$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}\right)\Big[(4-r^2)^{3/2}\Big]_{r=1}^{2}\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{2}{3}\cdot 3^{3/2}\,d\theta$$

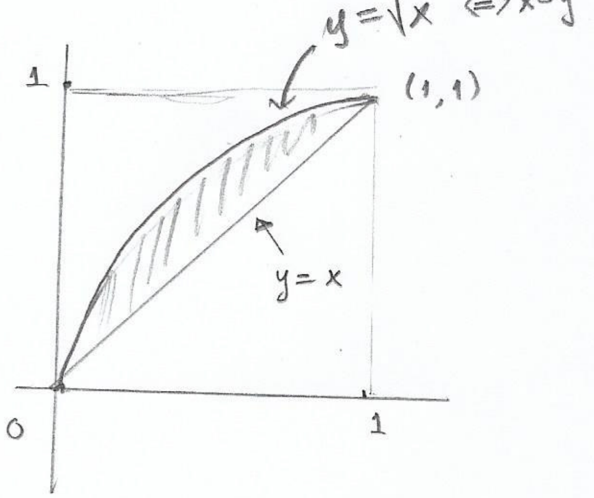
$$= 4\pi\sqrt{3} \quad \text{κ.μ.}$$

Θέμα 4ο

Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \int_x^{\sqrt[3]{x}} e^{x/y}\, dy\, dx .$$

Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης, αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης και στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα I.



Λύση

Το χωρίο ορίζεται από τις σχέσεις:

$0 \le x \le 1 \quad , \quad x \le y \le \sqrt[3]{x}$

Αλλάζοντας τη σειρά, έχουμε:

$0 \le y \le 1 \quad , \quad y^3 \le x \le y$. Άρα

$$I = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y^3}^{y} e^{x/y}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 y \left[e^{x/y} \right]_{x=y^3}^{y} dy$$

$$= \int_0^1 \left[y \cdot e - y e^{y^2} \right] dy$$

$$= e \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[e^{y^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$