9η Σειρά Ασκήσεων

(Τα σχήματα αντιστοιχούν στα ακριβώς από πάνω ερωτήματα)

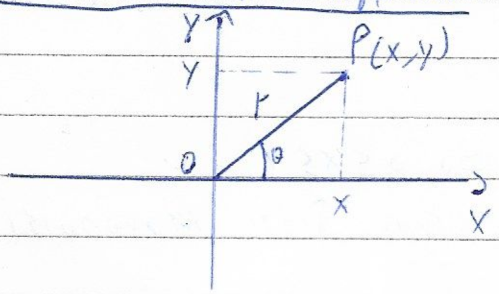
Υπενθύμιση (αλλαγή μεταβλητών)

α) Διπλό ολοκλήρωμα: Αν $I = \iint_D h(x,y)\,dx\,dy$, τότε θέτοντας $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, μετασχηματίζουμε το D στο σύνολο $D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (f(u,v), g(u,v)) = (x,y) \in D\}$ και θέτουμε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$$

Τότε $I = \iint_{D^*} h(f(u,v), g(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$

Πολικές συντεταγμένες



Από τριγωνομετρία έχουμε ότι $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Επίσης $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

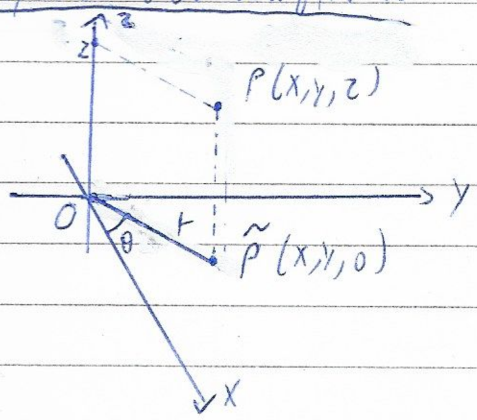
β) Τριπλό ολοκλήρωμα: Αν $I = \iiint_D h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

και θέσουμε $x = f_1(u,v,w)$, $y = f_2(u,v,w)$, $z = f_3(u,v,w)$ μετασχηματίζουμε το D στο σύνολο: $D^* = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid (f_1(u,v,w), f_2(u,v,w), f_3(u,v,w)) = (x,y,z) \in D\}$

Θέτουμε επίσης
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Τότε $I = \iiint_{D^*} h(f_1(u,v,w), f_2(u,v,w), f_3(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

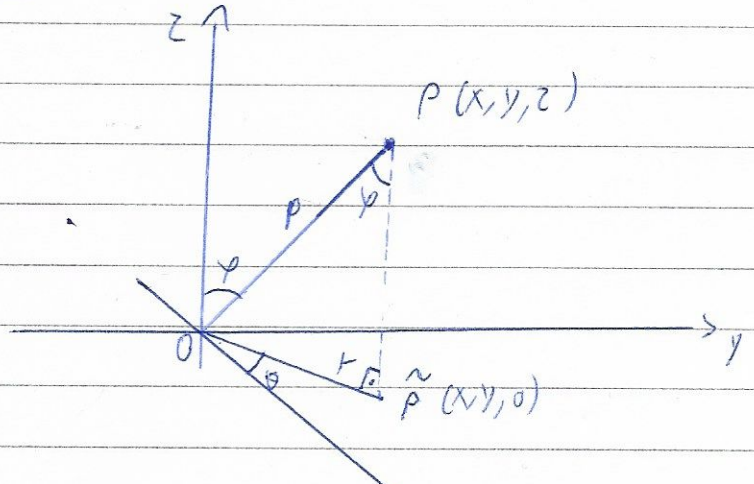


Οπότε λόγω πολικών συντεταγμένων (τριγωνομετρίας δηλαδή) έχουμε ότι

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in \mathbb{R}$$

Επίσης $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$

Σφαιρικές συντεταγμένες



Έχουμε ότι $z = P\tilde{P}$ και το τρίγωνο $O\tilde{P}P$ είναι ορθογώνιο στην $O\hat{\tilde{P}}P$. Οπότε έχουμε από τριγωνομετρία ότι $z = \rho\cos\varphi$ και $r = \rho\sin\varphi$

Οπότε αν συνδυάσουμε με τις $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ παίρνουμε:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \geq 0,\ \varphi \in [0, \pi],\ \theta \in [0, 2\pi)$$

Επίσης $dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$

Άσκηση 1

Δίνονται τα διαδοχικά ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{1-x} \int_{y=x+z}^{1} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx \quad , \quad I_2 = \int_{z=1}^{2} \int_{x=0}^{z-1} \int_{y=0}^{x} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

α) Σχεδιάστε τα αντίστοιχα στερεά χωρία ολοκλήρωσης B_1 και B_2. Στη συνέχεια γράψτε τα I_1, I_2 με σειρά ολοκλήρωσης $dz\,dy\,dx$

β) Υπολογίστε τον όγκο των στερεών B_1 και B_2

Λύση

i) Για το I_1: Έχουμε
$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1-x \\ x+z \le y \le 1 \end{cases}$$

Θέλουμε σειρά ολοκλήρωσης $dz\,dy\,dx$. Το dx είναι ήδη εξωτερικό οπότε το αφήνουμε όπως είναι. Μας ενδιαφέρει να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης των άλλων δύο ολοκληρωμάτων. (Θέλουμε δηλαδή το εξωτερικό ολοκλήρωμα από τα δύο, δηλαδή η ολοκλήρωση ως προς y, τα άκρα του να μην εξαρτώνται από το z. Πιθανόν να υπάρχει εξάρτηση από το x.)

Οι εξισώσεις $0 \le z \le 1-x$, $x+z \le y \le 1$ μας δίνουν ότι $x = x+0 \le x+z \le y \le 1$ και $0 \le z \le y-x$.

Οπότε
$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \\ 0 \le z \le y-x \end{cases}$$

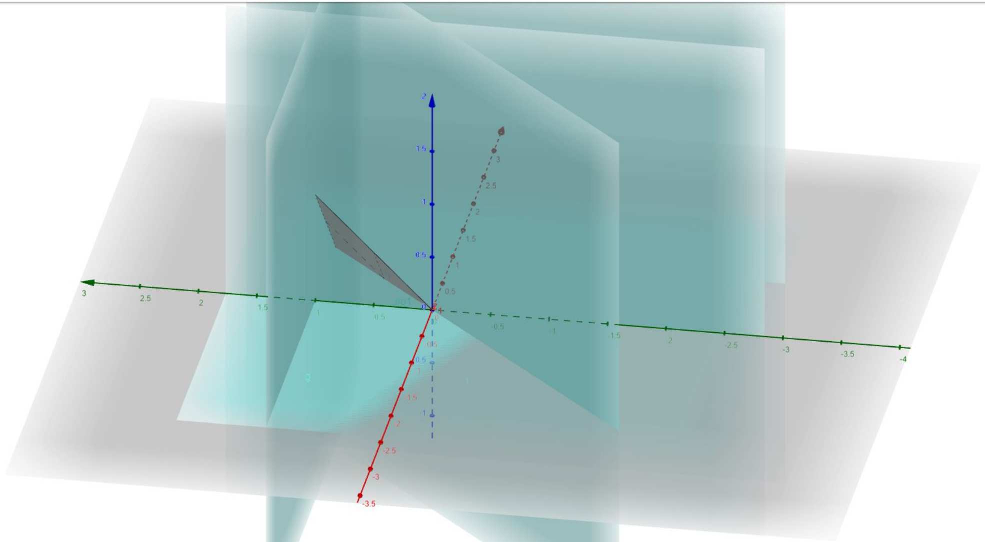
Άρα $$I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{1} \int_{z=0}^{y-x} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

• Για τον όγκο: $$Vol(B_1) = \iiint_{B_1} dy\,dz\,dx = \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{1-x} \int_{y=x+z}^{1} dy\,dz\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{1-x} 1-x-z\,dz\,dx = \int_{x=0}^{1} \left[(1-x)z - \frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \int_{x=0}^{1} \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \int_{x=0}^{1} \frac{(x-1)^2}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-1)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4

ii) <u>Για το I_2</u>: $I_2 = \int_{z=1}^{2} \int_{x=0}^{z-1} \int_{y=0}^{x} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$

Έχουμε $\begin{cases} 1 \le z \le 2 \\ 0 \le x \le z-1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

[Θέλουμε σειρά ολοκλήρωσης $dz\,dy\,dx$. Δηλαδή το εξωτερικό ολοκλήρωμα ως προς x, τα άκρα του να μην εξαρτώνται από y ή z, το ενδιάμεσο ως προς y, τα άκρα του να μην εξαρτώνται από το z, αλλά πιθανόν να υπάρχει εξάρτηση από το x και το εσωτερικό ως προς z, τα άκρα του πιθανόν να έχουν εξάρτηση και από x και από y]

Έχουμε $0 \le x \le z-1 \le 2-1 = 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1$
Η $0 \le y \le x$ μένει όπως είναι διότι ικανοποιεί όσα είπαμε παραπάνω
Τώρα $0 \le x \le z-1 \Rightarrow z \ge x+1$. Επίσης $z \le 2 \Rightarrow x+1 \le z \le 2$

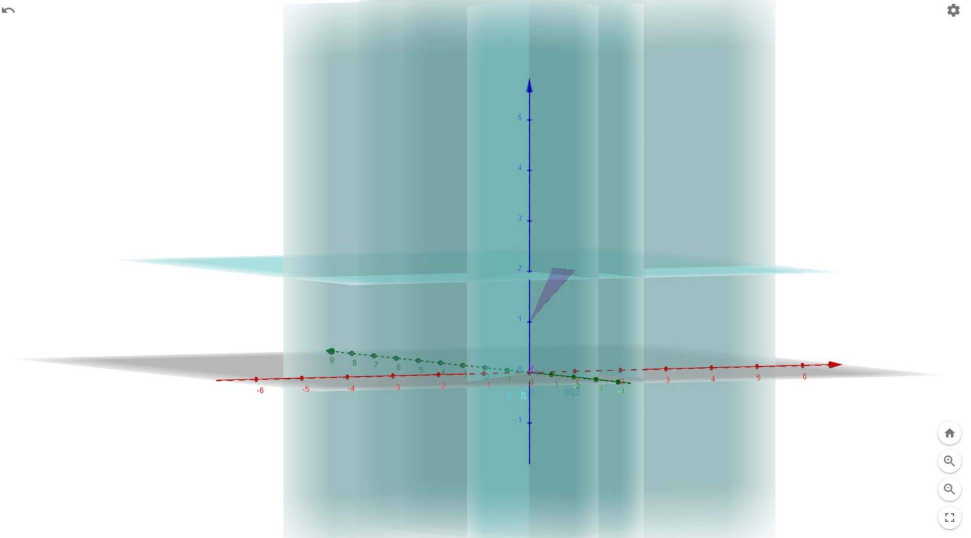
Οπότε $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \\ x+1 \le z \le 2 \end{cases}$

Συνεπώς $I_2 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=x+1}^{2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

• Για τον όγκο: $Vol(B_2) = \iiint_{B_2} dy\,dx\,dz = \int_{z=1}^{2} \int_{x=0}^{z-1} \int_{y=0}^{x} dy\,dx\,dz$

$= \int_{z=1}^{2} \int_{x=0}^{z-1} x\,dx\,dz = \int_{z=1}^{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{z-1} dz = \int_{z=1}^{2} \frac{(z-1)^2}{2} dz =$

$= \left[\frac{(z-1)^3}{6}\right]_1^2 = \frac{1}{6}$



eq2

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα

Λύση

α) $I=\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$, όπου B το στερεό που φράσσεται από το παραβολοειδές $y=x^2+z^2$ και το επίπεδο $y=1$

Έχουμε ότι $I=\int_{y=0}^{1}\iint_{x^2+z^2\le y^2} x\,dx\,dz\,dy$

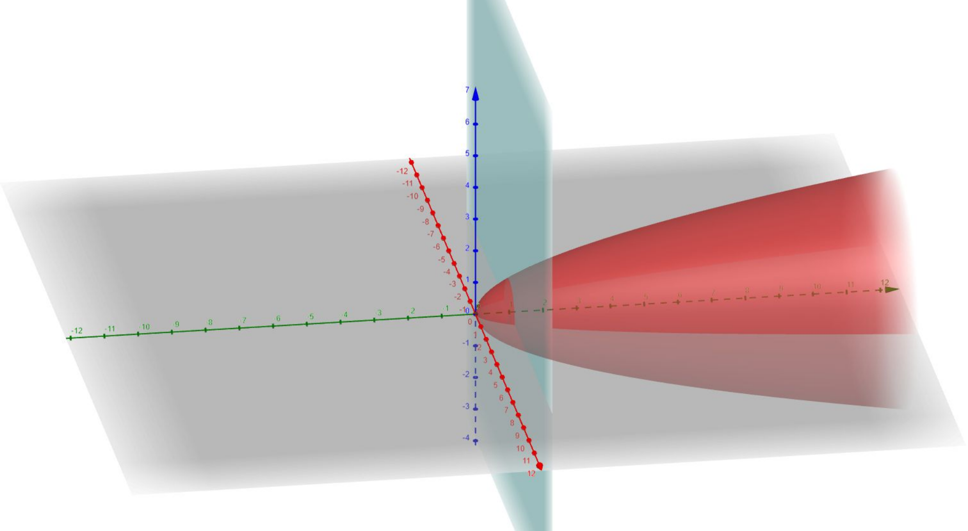
Χρησιμοποιούμε "κυλινδρικές συντεταγμένες" (εδώ έχουμε σαν άξονα τον $y'y$, όχι τον $z'z$ όπως συνήθως)

Θέτουμε $x=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$, $y=y$, $0\le r\le y$, $\theta\in[0,2\pi]$

Οπότε $I=\int_{y=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{y} r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta\,dy=$

$=\int_{y=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos\theta\int_{r=0}^{y} r^2\,dr\,d\theta\,dy=\int_{y=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{y^3}{3}\cos\theta\,d\theta\,dy=$

$=\int_{y=0}^{1}\frac{y^3}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}dy=\int_{y=0}^{1}\frac{y^3}{3}(0-0)\,dy=\int_{y=0}^{1}0\,dy=0$


7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

β) $J = \iiint_B yz\,dxdydz$, όπου B το στερεό στο 1^o ογδοημόριο που φράσσεται από τα επίπεδα συντεταγμένων και το ημισφαίριο $z = \sqrt{9-y^2+z^2}$

Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, όπου $0 \le \rho \le 3$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Έχουμε $dxdydz = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi$

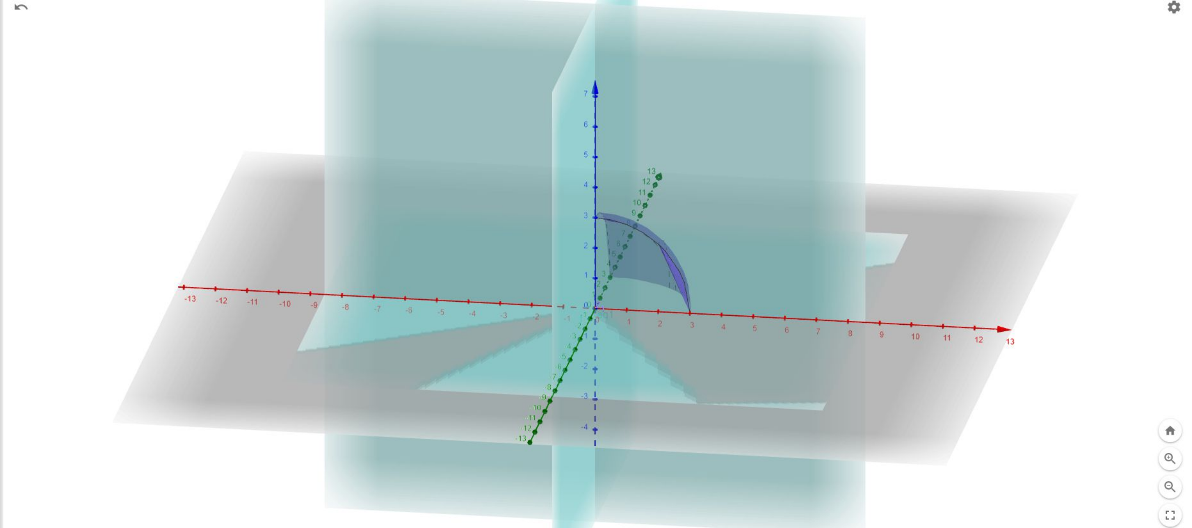
Οπότε $J = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{3} \rho\sin\varphi \sin\theta \cdot \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi$

$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{3} \rho^4 \sin\theta \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$

$= \int_{\rho=0}^{3} \rho^4 d\rho \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi \overset{\substack{\sin\varphi = u \\ \cos\varphi d\varphi = du}}{=}$

$= \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^3 \cdot \left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{u=0}^{1} u^2\, du = \frac{3^5}{5} \cdot 1 \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 =$

$= \frac{3^5}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{81}{5}$



Άσκηση 3

Δίνεται το $I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \, dz\, dy\, dx$.

Περιγράψτε ή σχεδιάστε το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε το I μέσω αλλαγής μεταβλητών

Λύση

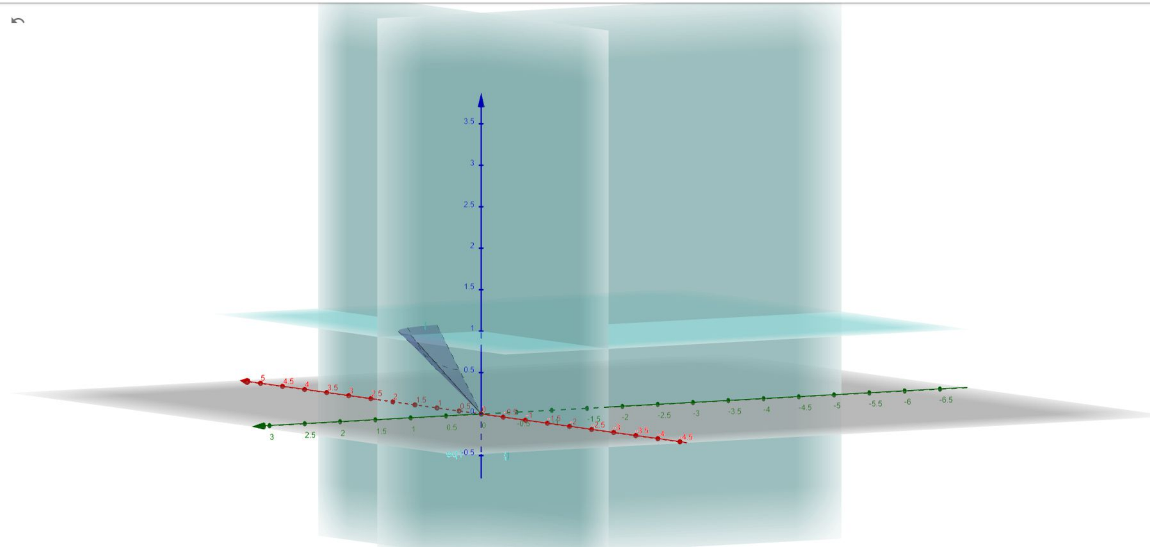
Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$

όπου $0 \le r \le 1$ και $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ και $r \le z \le 1$

Οπότε $I = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{1} (r^2)^{\frac{3}{2}} \, r \, dz\, dr\, d\theta =$

$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} r^4 \int_{z=r}^{1} dz\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} r^4(1-r)\, dr\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{1} r^4 - r^5 \, dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{60}$$



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5

Άσκηση 4

Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=2y$, τον κώνο $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και το επίπεδο $z=0$

Λύση

$$V=\iint_{x^2+y^2\le 2y}\int_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 2y}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

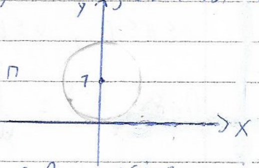
δίσκος

Έχουμε ότι $x^2+y^2\le 2y \iff x^2+(y-1)^2\le 1$, δηλαδή κύκλος κέντρου $(0,1)$ και ακτίνας $R=1$

Θέτουμε $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, όπου $0\le\theta\le\pi$

και $x^2+(y-1)^2\le 1 \iff r^2-2r\sin\theta\le 0$

$\iff r\in[0,2\sin\theta]$



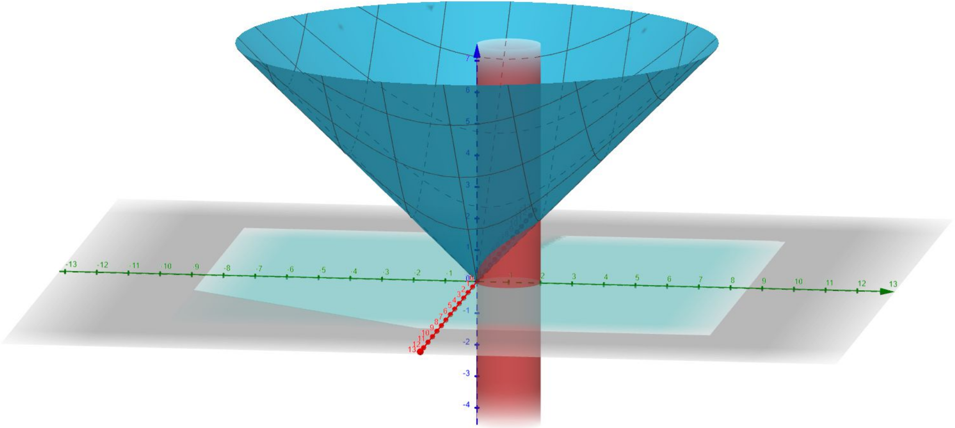
Οπότε $V=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2\sin\theta}\sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2\sin\theta} r^2\,dr\,d\theta=$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sin\theta}d\theta=\frac{8}{3}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\int_{\theta=0}^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$\cos\theta=u$, $-\sin\theta\,d\theta=du$

$$=\frac{8}{3}\int_{1}^{-1}(1-u^2)(-du)=\frac{8}{3}\int_{-1}^{1}1-u^2\,du=\frac{8}{3}\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=2\cdot\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{9}$$



Άσκηση 5

α) Υπολογίστε το $I = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 2 \\ -2\le z\le 3}} x^2+y^2+z^2 \, dx\,dy\,dz$

β) Δείξτε ότι η επιφάνεια $z=x^2+y^2$ χωρίζει τον κύλινδρο $x^2+y^2\le a^2$, $0\le z\le a^2$ σε δύο στερεά με ίσους όγκους

Λύση

α) $$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \int_{z=-2}^{3} x^2+y^2+z^2 \, dz\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \left[(x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3}\right]_{-2}^{3} dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} 5(x^2+y^2) + \frac{35}{3} \, dx\,dy$$

Χρησιμοποιώ πολικές συντεταγμένες $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $0\le r\le\sqrt{2}$, $0\le\theta\le 2\pi$

Οπότε $$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}} \left(5r^2+\frac{35}{3}\right) r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} 5r^3 + \frac{35}{3} r \, dr =$$

$$= \left[\frac{5r^4}{4} + \frac{35}{6}r^2\right]_0^{\sqrt{2}} = 5 + \frac{35}{3} = \frac{50}{3}$$

β) Υπολογίζουμε πρώτα τον εξωτερικό όγκο

$$V_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \int_{z=0}^{x^2+y^2} dz\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^2+y^2 \, dx\,dy \overset{\text{πολικές συντετ.}}{=}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r^2\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_{r=0}^{a} r^3\,dr = \frac{\pi}{2}\left[r^4\right]_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

(Παρατηρούμε ότι για $x^2+y^2\le a^2$, η επιφάνεια $z=x^2+y^2$ δεν ξεπερνάει το επίπεδο $z=a^2$)

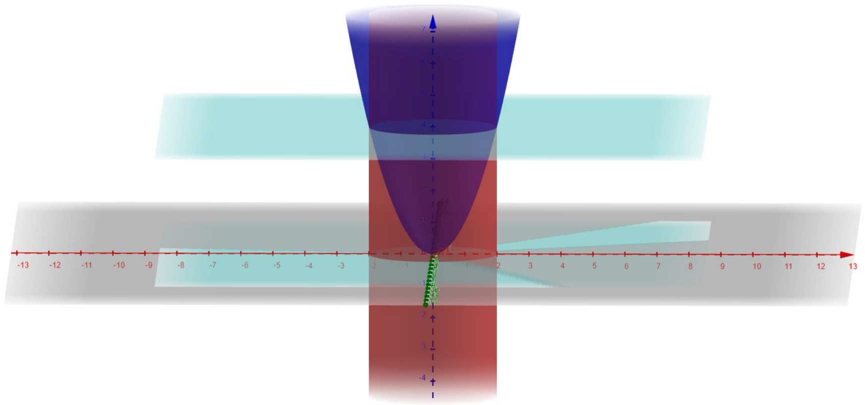
Υπολογίζουμε τώρα τον εσωτερικό όγκο

$$V_2 = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \int_{z=x^2+y^2}^{a^2} dz\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} a^2-(x^2+y^2) \, dx\,dy =$$

$$\overset{\text{πολικές}}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} (a^2-r^2)r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_{r=0}^{a} a^2 r - r^3 \, dr =$$

$$= 2\pi\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = 2\pi\left(\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}\right) = \frac{\pi a^4}{2}$$

Αφού $V_1=V_2$, δείξαμε αυτό που θέλαμε



-13
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Άσκηση 6

Αν $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha^2 \le x^2+y^2+z^2 \le \beta^2\}$, δηλαδή το στερεό που περιβάλλεται από τις σφαίρες ακτινών α και β με α<β και κέντρου Ο, υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

Λύση

α) $I_1 = \iiint_S \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες: $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, $\alpha \le \rho \le \beta$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta < 2\pi$

Τότε $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$, $dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$

Οπότε $I_1 = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=\alpha}^{\beta} \frac{\rho^2\sin\varphi}{\rho^3}\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$

$= \int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=\alpha}^{\beta}\frac{1}{\rho}\, d\rho = [-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot 2\pi\, [\ln\rho]_{\alpha}^{\beta} =$

$= 2\cdot 2\pi(\ln\beta - \ln\alpha) = 4\pi \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

β) $I_2 = \iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\; e^{-(x^2+y^2+z^2)^2}\, dx\,dy\,dz$

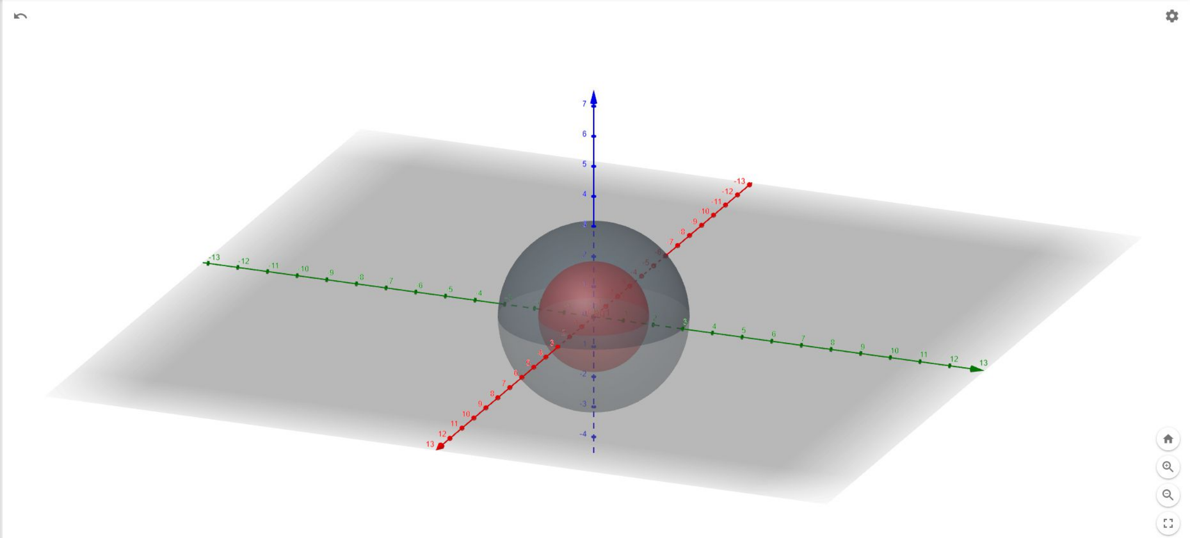
Χρησιμοποιώ όπως πριν σφαιρικές συντεταγμένες, $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, $\alpha \le \rho \le \beta$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta < 2\pi$

Οπότε $I_2 = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=\alpha}^{\beta} \rho\, e^{-\rho^4}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$

$= \int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=\alpha}^{\beta} \rho^3 e^{-\rho^4}\, d\rho =$

$= [-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot 2\pi \left[\frac{-e^{-\rho^4}}{4}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{4\pi}{4}(e^{-\alpha^4} - e^{-\beta^4}) =$

$= \pi(e^{-\alpha^4} - e^{-\beta^4})$



Άσκηση 7

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες υπολογίστε τον όγκο του στερεού που αποκόπτει από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2\le R^2$, ο κώνος $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$

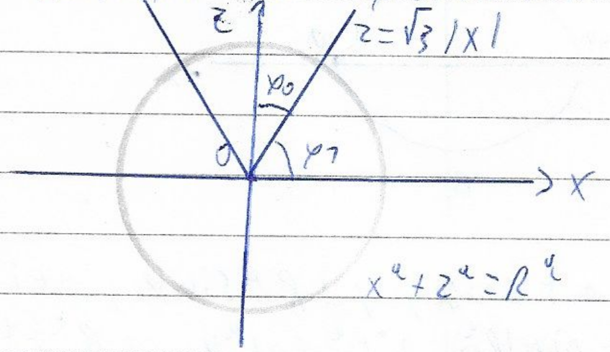
Λύση

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, έχουμε ότι

$$V=\int_{\varphi=0}^{\varphi_0}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Πρέπει να προσδιορίσουμε το φ_0.

Για να γίνει πιο κατανοητό, ας περιοριστούμε στο επίπεδο xz, δηλαδή στο $y=0$. Τότε έχουμε την παρακάτω εικόνα αν "κόψουμε" τον τρισδιάστατο χώρο με το $y=0$



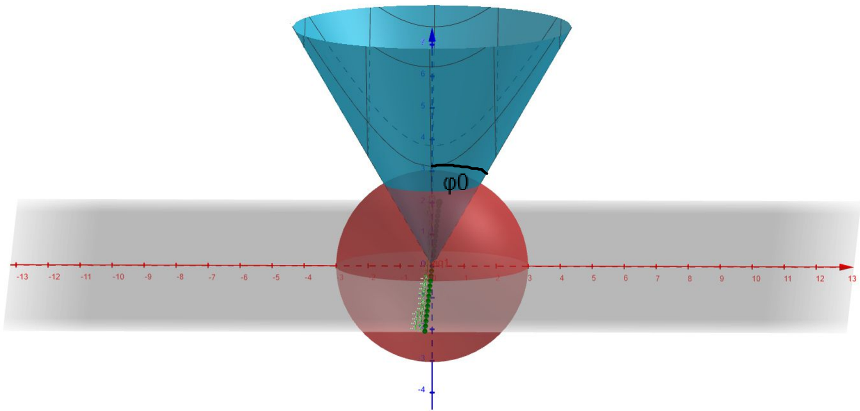
Έχουμε ότι $\tan\varphi_1=\sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi_1=\frac{\pi}{3}$

Οπότε $\varphi_0=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

Άρα $V=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$

$=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\, d\varphi\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\, d\rho =$

$=\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\cdot 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{2\pi R^3}{3}$



φ0
-13
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
-4

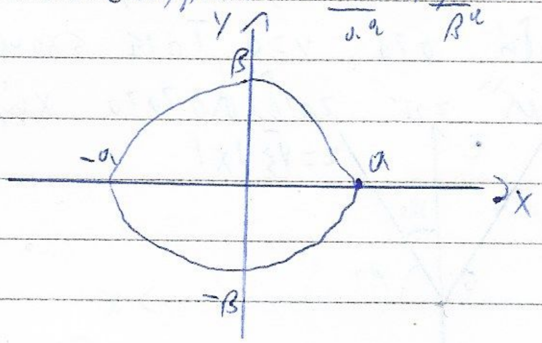
Άσκηση 8

α) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου E που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Στη συνέχεια υπολογίστε το $\iint_E x^2\,dx\,dy$

β) Υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\le 1$ χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό και στη συνέχεια σφαιρικές συντεταγμένες

Λύση

α) Έχουμε ότι $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\le 1\}$



Θέτουμε $x=\alpha r\cos\theta$, $y=\beta r\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi)$, $r\ge 0$

Τότε $E^*=\{(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi) \mid \frac{\alpha^2 r^2\cos^2\theta}{\alpha^2}+\frac{\beta^2 r^2\sin^2\theta}{\beta^2}\le 1\}=$

$=\{(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi) \mid r^2\le 1\}=[0,1]\times[0,2\pi)$

Θα υπολογίσουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα του παραπάνω μετασχηματισμού:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha\cos\theta & -\alpha r\sin\theta\\ \beta\sin\theta & \beta r\cos\theta\end{vmatrix}=\alpha\beta r$$

- Οπότε $\text{Εμβ}(E)=\iint_E dx\,dy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|dr\,d\theta=$

$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\alpha\beta r\,dr\,d\theta=2\pi\alpha\beta\int_{r=0}^{1}r\,dr=\pi\alpha\beta[r^2]_0^1=\alpha\beta\pi$

- Όμοια $\iint_E x^2\,dx\,dy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\alpha^2 r^2\cos^2\theta\cdot\alpha\beta r\,dr\,d\theta$

$=\alpha^3\beta\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_{r=0}^{1}r^3\,dr=\alpha^3\beta\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$

$=\frac{\alpha^3\beta}{8}\left[\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{\alpha^3\beta\pi}{4}$

β) Έστω $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, όπου $a, \beta, c > 0$

Τότε $V = \iiint_K dx\,dy\,dz$

Θέτουμε $x = au$, $y = \beta v$, $z = cw$

Τότε $K^* = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$, δηλαδή σφαίρα κέντρου O και ακτίνας 1

Έχουμε $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$

$= a\beta c$

Οπότε $V = \iiint_{K^*} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw = \iiint_{K^*} a\beta c \, du\,dv\,dw =$

$= a\beta c \iiint_{K^*} du\,dv\,dw$

Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή $u = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $v = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Τότε $V = a\beta c \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$

$= a\beta c \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=0}^{1} \rho^2 d\rho = [-\cos\varphi]_0^{\pi} \cdot 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \cdot a\beta c$

$= \frac{4\pi a\beta c}{3}$