8η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

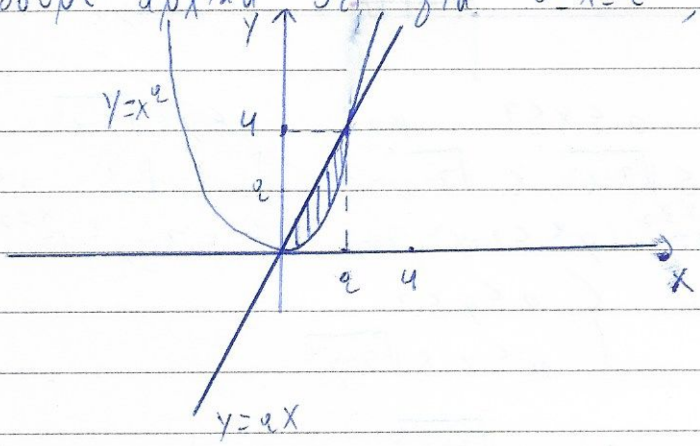
Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{2x} xy^2 \, dy \, dx$

Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και γράψτε το ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη.

Στη συνέχεια υπολογίστε το I και με τους δύο τρόπους.

Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι για $0 \le x \le 2$, έχουμε ότι $x^2 \le 2x$



Έχουμε ότι $0 \le x \le 2$ και $x^2 \le y \le 2x$

Οπότε $0 \le x^2 \le y \le 2x \le 4 \overset{x\ge 0,\ y \ge 0}{\Rightarrow} \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ \frac{y}{2} \le x, \ x \le \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$

Συνεπώς $I = \int_{y=0}^{4} \int_{x=\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \, dy = \int_{y=0}^{4} y^2 \int_{x=\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x \, dx \, dy =$

$= \int_0^4 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} = \int_0^4 y^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{8}\right) dy =$

$= \int_0^4 \frac{y^3}{2} - \frac{y^4}{8} = \frac{1}{8}\left[y^4\right]_0^4 - \frac{1}{40}\left[y^5\right]_0^4 = \frac{32}{5}$

Υπολογίζουμε τώρα και την αρχική μορφή:

$I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{2x} xy^2 \, dy \, dx = \int_{x=0}^{2} x \int_{y=x^2}^{2x} y^2 \, dy \, dx =$

$= \int_{x=0}^{2} x \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} dx = \int_{x=0}^{2} \frac{8x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \, dx =$

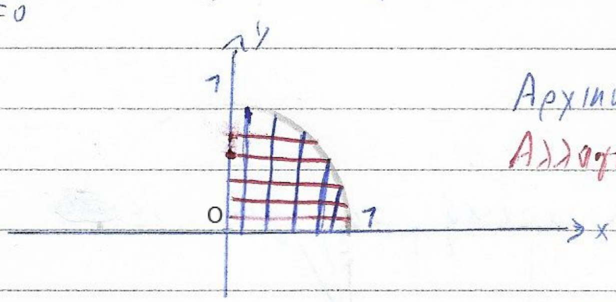
$= \frac{8}{15}\left[x^5\right]_0^2 - \frac{1}{24}\left[x^8\right]_0^2 = \frac{32}{5}$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

Λύση

α) $I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \, dy\, dx$



Αρχική μορφή

Αλλαγή σειράς

Έχουμε ότι $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

Οπότε $0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-0} = 1$, δηλαδή $0 \le y \le 1$ και

$y \le \sqrt{1-x^2} \overset{y \ge 0}{\iff} y^2 \le 1-x^2 \iff x^2 \le 1-y^2 \overset{x \ge 0}{\iff} x \le \sqrt{1-y^2}$

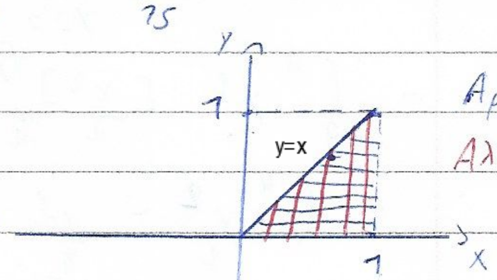
Άρα τελικά $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$

Οπότε $I_1 = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \, dx\, dy = \int_{y=0}^{1} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, dy$

$= \int_{y=0}^{1} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} [x]_0^{\sqrt{1-y^2}} \, dy = \int_{y=0}^{1} (1-y^2)^2 \, dy = \int_0^1 y^4 - 2y^2 + 1 \, dy$

$= \left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}$

β) $I_2 = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} x^3 y e^{xy^2} \, dx\, dy$



Αρχική μορφή

Αλλ. σειράς

Έχουμε ότι $0 \le y \le 1$ και $y \le x \le 1$

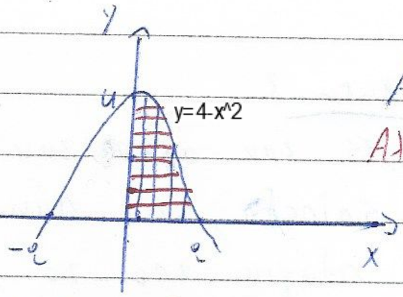
Άρα $0 \le y \le x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \text{και} \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

Οπότε $I_2 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} x^3 y e^{xy^2} \, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} x^3 \int_{y=0}^{x} y e^{xy^2} \, dy\, dx =$

$= \int_{x=0}^{1} x^3 \left[\frac{e^{xy^2}}{2x}\right]_{y=0}^{x} dx = \int_{x=0}^{1} \frac{x^3}{2x} (e^{x^3} - 1) \, dx =$

$= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x^2 e^{x^3} - x^2 \, dx = \frac{1}{6} \left[e^{x^3} - x^3\right]_0^1 = \frac{e-2}{6}$

γ) $I_3' = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} \, dy dx$



Αρχική μορφή

Αλλ. σειράς

Έχουμε ότι $0 \le x \le 2$ και $0 \le y \le 4-x^2$

Οπότε $0 \le y \le 4-x^2 \le 4-0 \Rightarrow 0 \le y \le 4$

Επίσης $y \le 4-x^2 \Leftrightarrow x^2 \le 4-y \overset{x \ge 0}{\Leftrightarrow} x \le \sqrt{4-y} \Rightarrow 0 \le x \le \sqrt{4-y}$

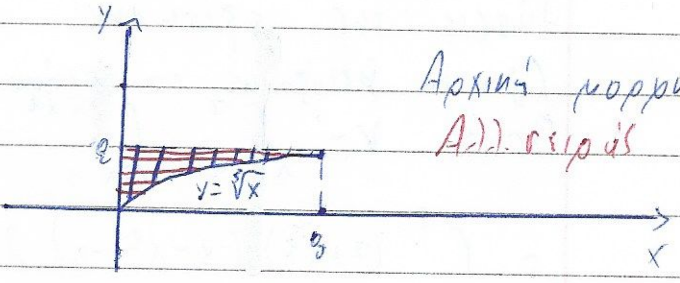
Άρα $\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \sqrt{4-y} \end{cases}$

Οπότε $I_3' = \int_{y=0}^{4} \int_{x=0}^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} \, dx dy = \int_{y=0}^{4} \frac{e^{2y}}{4-y} \int_{x=0}^{\sqrt{4-y}} x \, dx dy$

$= \int_{y=0}^{4} \frac{e^{2y}}{4-y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{\sqrt{4-y}} dy = \int_{y=0}^{4} \frac{e^{2y}}{4-y} \frac{4-y}{2} = \int_{y=0}^{4} \frac{e^{2y}}{2} dy =$

$= \left[\frac{e^{2y}}{4}\right]_{y=0}^{4} = \frac{e^8 - 1}{4}$

δ) $I_4 = \int_{x=0}^{8} \int_{y=\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy dx}{y^4+1}$



Αρχική μορφή

Αλλ. σειράς

Έχουμε ότι $0 \le x \le 8$ και $\sqrt[3]{x} \le y \le 2$

Οπότε $0 \le \sqrt[3]{x} \le y \le 2 \Rightarrow 0 \le y \le 2$

Επίσης $\sqrt[3]{x} \le y \Leftrightarrow x \le y^3 \Rightarrow 0 \le x \le y^3$

Άρα $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le y^3 \end{cases}$

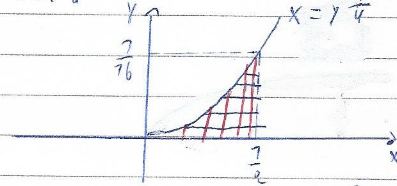
Οπότε $I_4 = \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{y^3} \frac{dx dy}{y^4+1} = \int_{y=0}^{2} \frac{1}{y^4+1} \int_{x=0}^{y^3} dx \, dy =$

$= \int_{y=0}^{2} \frac{1}{y^4+1} [x]_0^{y^3} dy = \int_{y=0}^{2} \frac{y^3}{y^4+1} dy = \frac{1}{4} \int_{y=0}^{2} \frac{4y^3}{y^4+1} dy =$

$= \frac{1}{4} \int_{y=0}^{2} \frac{(y^4+1)'}{y^4+1} dy = \frac{1}{4} \int_{y=0}^{2} (\ln(y^4+1))' dy = \frac{1}{4} [\ln(y^4+1)]_0^2 =$

$= \frac{1}{4} \ln 17$

γ) $I_3 = \int_{y=0}^{\frac{1}{16}} \int_{x=y^{\frac{1}{4}}}^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5)\, dx\, dy$



Έχουμε ότι $0 \le y \le \frac{1}{16}$ και $y^{\frac{1}{4}} \le x \le \frac{1}{2}$

Οπότε $0 \le y^{\frac{1}{4}} \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le x \le \frac{1}{2}$ και $y^{\frac{1}{4}} \le x \Rightarrow y \le x^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \le y \le x^4$

Άρα $I_3 = \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=0}^{x^4} \cos(16\pi x^5)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5) \int_{y=0}^{x^4} dy\, dx$

$= \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} x^4 \cos(16\pi x^5) = \frac{1}{80\pi} \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} 80\pi x^4 \cos(16\pi x^5)\, dx =$

$= \frac{1}{80\pi} \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} (\sin(16\pi x^5))'\, dx = \frac{1}{80\pi} [\sin(16\pi x^5)]_0^{\frac{1}{2}} =$

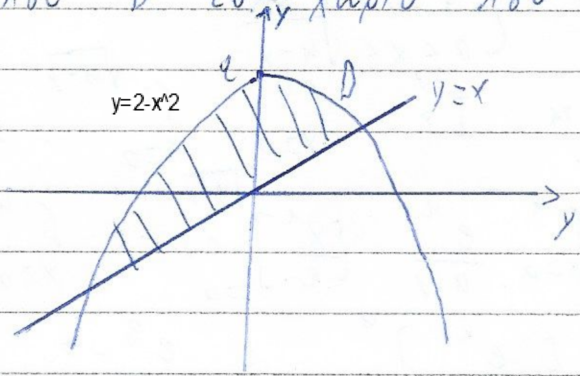
$= \frac{1}{80\pi} (\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{80\pi}$

Άσκηση 3

Βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται πάνω από το xy επίπεδο, από κάτω από την επιφάνεια $z=1+x^2$ και από τα πλάγια από το επίπεδο $y=x$ και την επιφάνεια $y=2-x^2$

Λύση

Έχουμε δηλαδή να υπολογίσουμε τον όγκο: $V = \iint_D (1+x^2 - 0)\,dx\,dy$
$= \iint_D 1+x^2\,dx\,dy$, όπου D το χωρίο που φαίνεται στο σχήμα παρακάτω



Τα σημεία τομής των καμπυλών $y=x$, $y=2-x^2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x=2-x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=1$

(Για να φτιάξουμε το σχήμα βρίσκουμε τα πρόσημα του $2-x^2-x$)

Οπότε $V = \int_{x=-2}^{1}\int_{y=x}^{2-x^2} 1+x^2\,dy\,dx = \int_{x=-2}^{1} 1+x^2 \int_{y=x}^{2-x^2} dy\,dx$

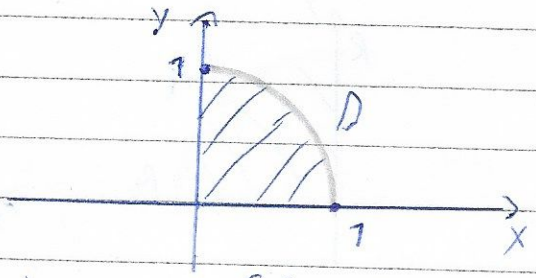
$= \int_{x=-2}^{1} (1+x^2)(2-x^2-x)\,dx = \int_{x=-2}^{1} -x^4-x^3+x^2-x+2\,dx =$

$= \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{153}{20}$

Άσκηση 4

Βρείτε τη ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x,y)=1$ η οποία φράσσεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2+y^2=1$ στο πρώτο τεταρτημόριο (Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής πλάκας D ως προς την αρχή, δίνεται από τον τύπο $I = \iint_D (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dx\,dy$)

Λύση



$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dx\,dy = \iint_D x^2+y^2\,dx\,dy$$

Θέτουμε $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Τότε $0\leq r\leq 1$ και $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ αφού έχουμε τεταρτοκύκλιο στο 1^o τεταρτημόριο
Τότε $x^2+y^2=r^2$ και $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

Συνεπώς $I = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1} r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1} r^3\,dr\,d\theta =$

$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,d\theta = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Τριγωνομετρικοί τύποι

i) $\cos(a+\beta) = \cos a \cos\beta - \sin a \sin\beta$

ii) $\cos(a-\beta) = \cos a \cos\beta + \sin a \sin\beta$

iii) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

iv) $\sin(a+\beta) = \sin a \cos\beta + \cos a \sin\beta$

v) $\sin(a-\beta) = \sin a \cos\beta - \cos a \sin\beta$

vi) $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

vii) $\sin a \cos\beta = \dfrac{\sin(a+\beta) + \sin(a-\beta)}{2}$

viii) $\cos a \cos\beta = \dfrac{\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)}{2}$

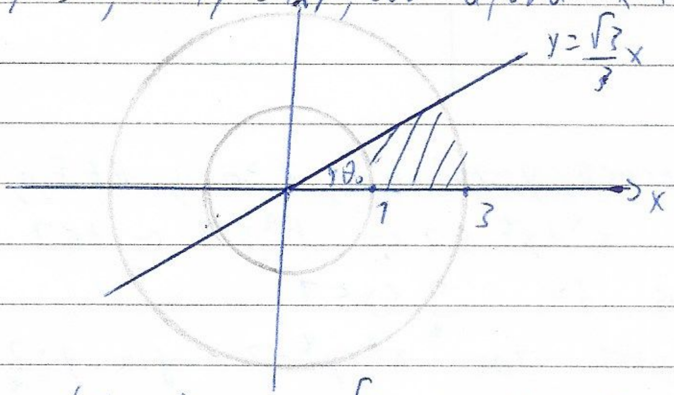
ix) $\sin a \sin\beta = \dfrac{\cos(a-\beta) - \cos(a+\beta)}{2}$

Άσκηση 5

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα, μετατρέποντάς τα σε πολικές συντεταγμένες

Λύση

α) $I_1 = \iint_D \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, όπου D το χωρίο που φράσσεται από τις $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, τον άξονα $x'x$ και την $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$



Έχουμε ότι $\tan\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{6}$

Τώρα θέτουμε $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\geq 0$ και $0\leq\theta<2\pi$

Έχουμε ότι $1\leq x^2+y^2\leq 9 \Leftrightarrow 1\leq r^2\leq 9 \Leftrightarrow 1\leq r\leq 3$

Τώρα $0\leq y\leq \frac{\sqrt{3}}{3}x \Leftrightarrow 0\leq r\sin\theta\leq r\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\leq \sin\theta\leq\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\theta\geq 0\\ \sin\theta\leq\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\theta\in[0,\pi]\\ \tan\theta\leq\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

Ότι $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$ φαίνεται και από το σχήμα ερμηνεύοντας σωστά τον συντελεστή διεύθυνσης της $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

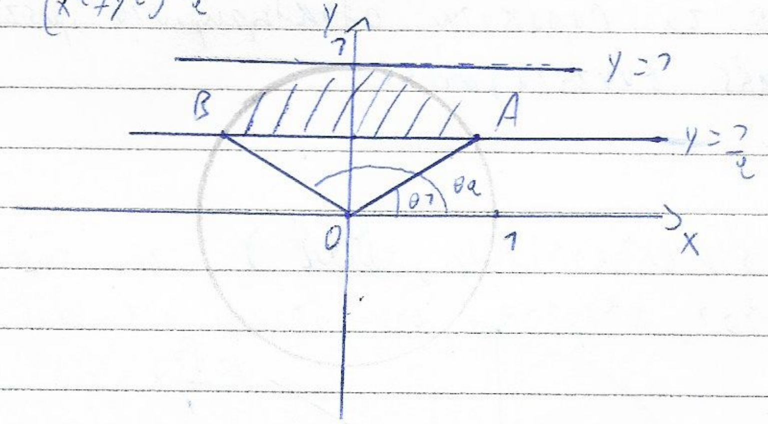
Τέλος $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

Οπότε $I_1 = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=1}^{3}\sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=1}^{3}2r\sin(r^2)\,dr\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\left[-\cos(r^2)\right]_{r=1}^{3}d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\cos(1)-\cos(9)\,d\theta =$

$= \frac{[\cos(1)-\cos(9)]\pi}{12}$

β) $I_2 = \iint_K \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$, όπου $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1, \; 1 \le 2y \le 2\}$



Θέτουμε $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \ge 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Έχουμε ότι $x^2+y^2 \le 1 \Leftrightarrow r^2 \le 1 \Rightarrow r \le 1$

Επίσης έχουμε ότι $\frac{1}{2} \le y \le 1$

Η $y=\frac{1}{2}$ τέμνει τον $x^2+y^2=1$ για $y=\frac{1}{2}$: $x^2+\frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Το θ κινείται μεταξύ των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες OA και OB με τον Ox, δηλαδή $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$

Όμως OA: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, OB: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (συντελεστής διεύθυνσης $\lambda_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

Όμως $\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{5\pi}{6}$. Οπότε $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

Τέλος, $y \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow r\sin\theta \ge \frac{1}{2} \underset{\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]}{\Leftrightarrow} r \ge \frac{1}{2\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{2\sin\theta} \le r \le 1$

Οπότε $I_2 = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{r=\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} \frac{r^3\sin^3\theta}{(r^2)^{\frac{3}{2}}}\, r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta \int_{r=\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} r\,dr\,d\theta$

$= \frac{1}{2} \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta \left(1 - \frac{1}{4\sin^2\theta}\right) d\theta =$

$= \frac{1}{2} \left(\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta - \frac{1}{4} \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta\, d\theta \right) = \frac{1}{2}(J_1 - J_2)$

Τώρα $J_2 = \frac{1}{4}\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}[\cos\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

και $J_1 = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta\, d\theta$ *

Όμως $\sin^3\theta = \sin\theta \sin^2\theta = \sin\theta \, \frac{1-\cos(2\theta)}{2} =$

$= \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sin\theta\cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{4}(\sin(3\theta) - \sin\theta)$

$= \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta)$

Οπότε $J_2 = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta) = \frac{1}{4}\left[-3\cos\theta + \frac{\cos(3\theta)}{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$

$= \frac{1}{4}\left(0 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 0 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Οπότε $I_2 = \frac{1}{2}(J_1 - J_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

* Εναλλακτικός υπολογισμός: $J_1 = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3\theta\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$

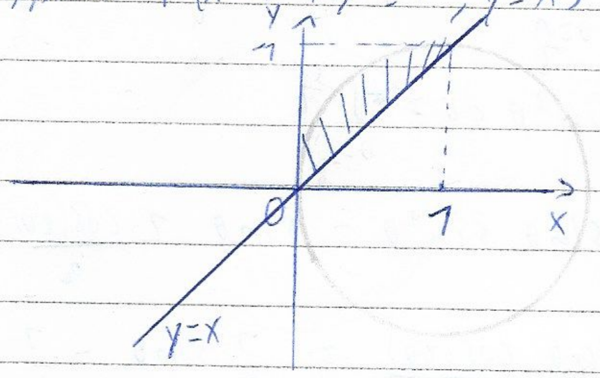
Θέτουμε $\cos\theta = y \Rightarrow y_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

και $-\sin\theta\, d\theta = dy$

Οπότε $J_2 = -\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} 1-y^2\, dy = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 1-y^2\, dy =$

$= \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

γ) $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\le 1,\ y\ge x\}$, $I_3 = \iint_T x\,dx\,dy$



Θέτουμε $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi)$, $r>0$

Έχουμε ότι $(x-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow -1\le x-1\le 1 \Leftrightarrow 0\le x\le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\ge 0 \Leftrightarrow r\cos\theta\ge 0 \Leftrightarrow \cos\theta\ge 0 \Leftrightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi)$

Επίσης $y\ge x \Leftrightarrow r\sin\theta \ge r\cos\theta \Leftrightarrow \sin\theta\ge\cos\theta$

και αφού $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi)$, τότε τελικά η προηγούμενη ανισότητα ισχύει για $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

Τώρα $(x-1)^2+y^2\le 1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x\le 0 \Leftrightarrow r^2-2r\cos\theta\le 0$

$(r-2\cos\theta)r\le 0 \underset{\cos\theta\ge 0}{\overset{\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]}{\Leftrightarrow}} r\in[0,2\cos\theta]$

Οπότε $I_3 = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta =$

$= \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\int_{r=0}^{2\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,[r^3]_0^{2\cos\theta}d\theta$

$= \frac{8}{3}\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$

Τώρα $\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1+2\cos2\theta+\cos^2(2\theta)}{4} = \frac{1}{4}+\frac{\cos(2\theta)}{2}+\frac{1}{8}+\frac{\cos(4\theta)}{8}$

Οπότε $I_3 = \frac{8}{3}\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{8}+\frac{\cos(2\theta)}{2}+\frac{\cos(4\theta)}{8}\,d\theta =$

$= \frac{8}{3}\left[\frac{3}{8}\theta+\frac{\sin(2\theta)}{4}+\frac{\sin(4\theta)}{32}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{8}{3}\frac{1}{4} =$

$= \frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$

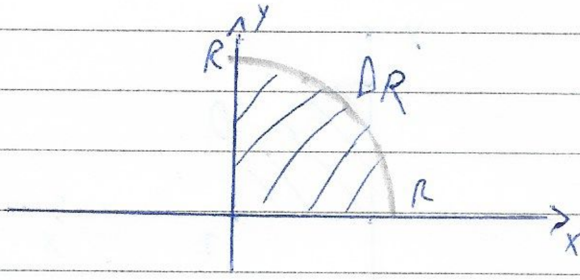
Άσκηση 6

α) Υπολογίστε το $J_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, όπου D_R το χωρίο που ορίζεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2+y^2=R^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο

β) Υπολογίστε το $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$ με τη βοήθεια του α)

Λύση

α)



Θέτω $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ όπου $0\le r\le R$ και $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

Οπότε $J_R = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta =$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R} 2r e^{-r^2}\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} [-e^{-r^2}]_{r=0}^{R}\, d\theta =$$

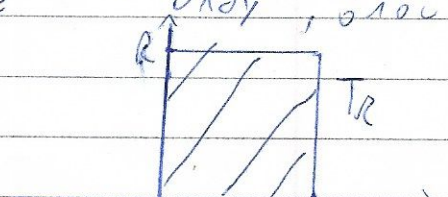
$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 1-e^{-R^2}\, d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$$

β) Έστω $I_R = \int_0^R e^{-x^2}dx \Rightarrow I_R^2 = (\int_0^R e^{-x^2}dx)^2 =$

$$= \int_0^R e^{-x^2}dx\cdot\int_0^R e^{-x^2}dx = \int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy =$$

$$= \int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{T_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$, όπου

το T_R φαίνεται στο σχήμα



Τώρα παρατηρούμε ότι τα $\lim_{R\to+\infty} I_R^2$, $\lim_{R\to+\infty} J_R$ εκφράζουν το $\iint_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-(x^2+y^2)}$ και άρα είναι ίσα

Οπότε $\lim_{R\to+\infty} I_R^2 = \lim_{R\to+\infty} J_R = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4}$

Άρα $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to+\infty} I_R = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$