

Ανάλυση II
Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21
1ο Διαγώνισμα - 10-11-2020

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες. Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Θέμα 1ο

(α) Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, αποδείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \iff \text{τα } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ είναι ορθογώνια.}$$

Ποιο Θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκφράζει η παραπάνω ισοδυναμία;

(β) Δίνεται η επιφάνεια S που ορίζεται στον \mathbb{R}^3 από την εξίσωση:

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

(i) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου \mathcal{P} της S στο σημείο της $(1, 1, -2)$.

(ii) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι παράλληλο προς το \mathcal{P} και διέρχεται από το σημείο $(3, 4, 0)$.

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(α) Δείξτε ότι, για κάθε σημείο $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, η κατεύθυνση στην οποία η f αυξάνει πιο γρήγορα στο (x_0, y_0) , είναι η κατεύθυνση του διανύσματος $-x_0\mathbf{i} - y_0\mathbf{j}$. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f σε αυτή την κατεύθυνση.

(β) Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης f που αντιστοιχούν στις τιμές $c = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$ και $c = 1$ και τοποθετήστε στο σχήμα σας το διάνυσμα κλίσης της f στο σημείο $(1, -1)$ με αρχή το σημείο $(1, -1)$.

Θέμα 3ο

(α) Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4 + y^4}$$

(Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^x \cos y$. Βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Θέμα 4ο

(α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(\mathbf{x})| \leq M$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = xy \cdot g(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \text{ και } f(0, 0) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι της κλάσης C^1 στο \mathbb{R}^2 .

Καλή Επιτυχία