

Ανάλυση II

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

3η Σειρά Ασκήσεων

Μερικές παράγωγοι - Διαφορικό - Κατευθυνόμενες παράγωγοι

1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων, εφ' όσον υπάρχουν.

$$(\alpha) f(x, y) = e^{xy}, \quad (\beta) f(x, y) = x \cos x \cos y, \quad (\gamma) f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2),$$

$$(\delta) f(x, y, z) = xyz e^{x^2+y^2}, \quad (\epsilon) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, \quad (\sigma\tau) f(x, y) = (x + y, x - y, xy),$$

$$(\zeta) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (\eta) f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad (\theta) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Εξετάστε ποιες από τις συναρτήσεις της Άσκησης 1 είναι διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

3. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται σε καθεμιά από τις παρακάτω επιφάνειες στο δεδομένο σημείο. Αιτιολογήστε την ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου σε κάθε περίπτωση:

$$(\alpha) z = x^2 + y^3 \text{ στο σημείο } (3, 1, 10).$$

$$(\beta) z = e^{x-y} \text{ στο σημείο } (1, 1, 1).$$

4. Γιατί μπορούμε να πούμε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y) = x^2 + y^2$ και $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ εφάπτονται στο σημείο $(0, 0, 0)$;

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \text{ και } f(0, 0) = 0.$$

Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$, αλλά

(β) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \text{ και } f(0, 0) = 0.$$

Να δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

7. Αν η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ποιο είναι το διαφορικό $Df(\mathbf{a})$ της f στο \mathbf{a} ;

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$. Βρείτε την κλίση της στο σημείο $(0, 2\pi, 1)$ και το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματός της στο σημείο $(0, 2\pi, 1, 1)$.

9. Βρείτε τις κατευθυνόμενες παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία και στις κατευθύνσεις που δίνονται:

$$(\alpha) f(x, y) = e^x \cos(\pi y), \quad (x_0, y_0) = (0, -1), \quad \mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$

(β) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, -2)$, $\mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$.

(γ) $f(x, y, z) = e^x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

10. Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις, βρείτε την κατεύθυνση στην οποία αυξάνει πιο γρήγορα στο σημείο $(1, 1)$. Στη συνέχεια, σχεδιάστε ένα διάγραμμα καμπυλών στάθμης της συνάρτησης και τοποθετήστε το διάνυσμα που δίνει αυτή την κατεύθυνση, με αρχή το σημείο $(1, 1)$. Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης που περιλαμβάνει το $(1, 1)$.

(α) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(β) $g(x, y) = x^2 - y^2$.

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h(x, y) = 3e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ δίνει το ύψος ενός βουνού, πάνω από κάθε σημείο (x, y) του οριζόντιου επιπέδου. Ξεκινώντας από το σημείο $(1, 0)$ σε ποια κατεύθυνση πρέπει να αρχίσει να προχωράει κάποιος για να σκαρφαλώσει γρηγορότερα;