Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

1η Σειρά Ασκήσεων

1. Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$ με τα επίπεδα συντεταγμένων.

2. Δείξτε ότι η ευθεία $\mathbf{l}(t) = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$ είναι παράλληλη με το επίπεδο $2x - 3y + z - 2 = 0$.

3. Δείξτε ότι η ευθεία $\mathbf{l}(t) = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $5x - 3y - z - 6 = 0$.

4. Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα ορθογώνια και τα δύο προς το διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

5. Βρείτε την ευθεία που περνάει από το σημείο $A(3, 1, -2)$ και τέμνει υπό ορθή γωνία την ευθεία $x = t - 1,\ y = t - 2,\ z = t - 1$.

6. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις για διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Ερμηνεύστε αυτές τις σχέσεις γεωμετρικά, θεωρώντας το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.
(α) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ (Κανόνας του παραλληλογράμμου)
(β) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$
Εξετάστε σε ποια περίπτωση αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

7. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες και ερμηνεύστε τις γεωμετρικά, θεωρώντας το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

$$\text{(α)} \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \iff (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$$

$$\text{(β)} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

8. Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς k, αποδείξτε ότι αν $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \cdots \|\mathbf{x}_k\|$$

και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_i \geq 0$ και $\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{y}$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

9. Υπολογίστε:
(α) Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $O(0, 0, 0),\ B(1, 1, 1),\ \Gamma(0, 2, -3)$.
(β) Τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},\ 5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ και $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

10. Βρείτε μια εξίσωση για καθένα από τα παρακάτω επίπεδα:
(α) Το επίπεδο που είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (3, -1, 1) + (5, 0, 2)t$ και περνάει από το σημείο $(5, -1, 0)$.
(β) Το επίπεδο που περνάει από τα σημεία $(2, -1, 3),\ (0, 0, 5)$ και $(5, 7, -1)$.
(γ) Το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\mathbf{l}(t) = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x + y - 3z + 4 = 0$.

11. Βρείτε την απόσταση του σημείου $(6, 1, 0)$ από το επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

12. Έστω $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, ορθογώνια ανά δύο. Αν $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \rho\mathbf{w}$, δείξτε ότι $\lambda = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$, $\mu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$ και $\rho = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$. Ερμηνεύστε γεωμετρικά αυτό το αποτέλεσμα.

13. (α) Εξετάστε αν ισχύει γενικά $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ για τρία διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ στον $\mathbb{R}^3$.

(β) Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$, δείξτε ότι το $\mathbf{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

14*. (α) Αποδείξτε ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$.

(β) Αποδείξτε ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ αν και μόνο αν $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.