$$\text{Έστω} f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \wedge\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Υπάρχει το διαφορικό της f στο (0,0);

Λύση:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

Άρα $\exists \nabla$f(0,0)=(1,0)

Τότε, η f είναι διαφ. Στο (0,0) ανν $\lim\limits_{h\to 0} f\left(\vec{h}\right) - f(0,0) - \frac{(1,0), \vec{h} >}{\vee \vec{h} \vee} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h_1-h_2)-h_1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{{h_1}^3}{{h_1}^2+{h_2}^2}-h_1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}} = 0$, Αλλά

$\frac{\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} -h_1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}} = 0$ γιατί $|h_1 \vee \leq |(h_1,h_2)| \vee\ ^2$ και συνεπώς

$|\frac{-h_1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}} \vee \leq \frac{|(h_1,h_2)|\vee\ ^2}{|(h_1,h_2)|\vee} = \left||(h_1,h_2)\right|| \to 0$

Άρα αρκεί $\frac{\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} {h_1}^3}{{h_1}^2+{h_2}^2 * \sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}} = 0$

όμως αυτό ΔΕΝ ισχύει ($h_1 = h_2 = h$

Άρα η f ΔΕΝ είναι διαφορ. Στο (0,0)

ΝΤΕΛΕΖΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ