ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Παράγωγος και Διαφορικό Διανυσματικών Συναρτήσεων

Παραγωγισιμότητα διανυσματικής συνάρτησης:

Ορισμός 1: Έστω $\overrightarrow{f}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών.

a) Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται **παραγωγίσιμη σε ενα σημείο** $\overrightarrow{a} \in U$ όταν οι συνιστώσες (πραγματικές) συναρτήσεις $f_j : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για $j = 1, 2, .., m$, είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{a}$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{j_{x_i}}(\overrightarrow{a}) \equiv \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$. Τότε, **παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης** $\overrightarrow{f}$ **στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Δηλαδή η $\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})$ (παράγωγος στο σημείο $\overrightarrow{a}$) είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία αριθμούς και συγκεκριμένα το στοιχείο της j-οστής γραμμής και i-οστής στήλης του είναι η τιμή της μερικής παραγώγου $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$ (όπου $j = 1, 2, ..., m$ και $i = 1, 2, ..., n$).

b) Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται **παραγωγίσιμη** (στο U) όταν οι συνιστώσες (πραγματικές) συναρτήσεις $f_j : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για $j = 1, 2, .., m$, είναι παραγωγίσιμες, δηλαδή όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{j_{x_i}}(\overrightarrow{x}) \equiv \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in U$ και για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$. Τότε, **παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης** $\overrightarrow{f}$ είναι ο συναρτησιακός $m \times n$ πίνακας

$$\overrightarrow{f}' \equiv J\overrightarrow{f} := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Δηλαδή η $\overrightarrow{f}'$ παράγωγος είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία πραγματικές συναρτήσεις και συγκεκριμένα το στοιχείο της j-οστής γραμμής και i-οστής στήλης του είναι η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ (όπου $j = 1, 2, ..., m$ και $i = 1, 2, ..., n$).

Σχόλιο: Ο (αριθμητικός) $m \times n$ πίνακας $J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$ που δίνεται από την (1) ονομάζεται και πίνακας *Jacobi* της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Αντίστοιχα, ο συναρτησιακός $m \times n$ πίνακας $J\overrightarrow{f}$ που δίνεται από τη (2) ονομάζεται **πίνακας Jacobi** της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$.

Συμβολισμός: $\overrightarrow{f}' \equiv J\overrightarrow{f} \equiv \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \overrightarrow{x}}$

C^1 διανυσματική συνάρτηση:

Ορισμός 2: Έστω $\overrightarrow{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών.
a) Η $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται C^1 **(ή συνεχώς παραγωγίσιμη) συνάρτηση στο** $\overrightarrow{a} \in U$, όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ (για $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$) σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq U$ και οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
b) Η $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται C^1 **(ή συνεχώς παραγωγίσιμη) συνάρτηση** (στο U), όταν οι συνιστώσες συναρτήσεις $f_j : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (για $j = 1, 2, ..., m$) είναι C^1, δηλαδή όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in U$ και για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$ και οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς (στο U).

Διαφορισιμότητα διανυσματικής συνάρτησης:

Ορισμός 3: Έστω $\overrightarrow{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ και τιμές στον $\mathbb{R}^m$.
Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται **διαφορίσιμη σε ενα σημείο** $\overrightarrow{a} \in U$ όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \tag{3}$$

ή ισοδύναμα όταν υπάρχει ένας $m \times n$ πίνακας A έτσι ώστε

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ , \tag{4}$$

όπου $A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $m \times n$ πίνακα A με τον $n \times 1$ πίνακα (στήλη) $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$. (Επομένως, το αποτέλεσμα του γινομένου αυτού είναι ένας πίνακας στήλη $m \times 1$ δηλαδή ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$).

Παρατήρηση 1: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και γραμμικός μετασχηματισμός $\overrightarrow{T} = (T_1, T_2, ..., T_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} &\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{T}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \\ \Leftrightarrow \ &\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{|f_j(\overrightarrow{x}) - f_j(\overrightarrow{a}) - T_j(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})|}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{5}$$

όπου f_j είναι οι συνιστώστες πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών της διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ και T_j είναι οι συνιστώσες πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών του γραμμικού μετασχηματισμού $\overrightarrow{T}$.

Θεώρημα 1: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με συνιστώσες $f_j : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για $j = 1, 2, ..., m$. Η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$ αν και μόνο αν οι συνιστώσες (πραγματικές) συναρτήσεις f_j για $j = 1, 2, ..., m$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 2: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$ και για το γραμμικό μετασχηματισμό $\overrightarrow{T}$ (του Ορισμού 3) και τον $m \times n$ πίνακα A (του Ορισμού 3) ισχύει ότι είναι **μοναδικοί** και ότι ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\overrightarrow{T} = (Df_1(\overrightarrow{a}), Df_2(\overrightarrow{a}), ..., Df_m(\overrightarrow{a})) \tag{6}$$

$$A = \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) \equiv \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \overrightarrow{x}}(\overrightarrow{a}) \tag{7}$$

Ορισμός 4: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ...f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε **διαφορικό της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$** ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) := (Df_1(\overrightarrow{a}), Df_2(\overrightarrow{a}), ..., Df_m(\overrightarrow{a})) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{8}$$

Από το Θεώρημα 2, τον Ορισμό 3 και τον Ορισμό 4 καταλήγουμε στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1: Έστω $\overrightarrow{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών. Από τον Ορισμό 3, αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση (3) ή ισοδύναμα αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας A ωστε να ισχύει η σχέση (4), τότε η συνάρτηση $\overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$ και ισχύουν τα παρακάτω:

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{T} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a}) \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) = A \tag{9}$$

Θεώρημα 3: Έστω $\overrightarrow{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών και έστω $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1. Η $\overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
2. Η $\overrightarrow{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$ και ισχύει η σχέση

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})||}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \tag{10}$$

όπου $\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $m \times n$ πίνακα $\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})$ με τον $n \times 1$ πίνακα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ (καθώς κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί σαν πίνακας στήλη $n \times 1$),
η οποία ισοδύναμα γράφεται και ως

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = \overrightarrow{0} \tag{11}$$

Αν ισχύει ένας από τους ισοδύναμους ισχυρισμούς 1. ή 2., τότε για το διαφορικό $\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ισχύει ο τύπος:

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{f}'(\overrightarrow{a})\overrightarrow{x} \equiv J\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})\overrightarrow{x}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

Θεώρημα 4: Μία διανυσματική συνάρτηση $\overrightarrow{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η οποία είναι C^1 στο σημείο $\overrightarrow{a}$, τότε είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Θεώρημα 5: Έστω $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ δύο διανυσματικές συναρτήσεις n μεταβλητών και $\phi : \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, οι οποίες είναι διαφορίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε, οι συναρτήσεις $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$, $\lambda \overrightarrow{f}$ (για $\lambda \in \mathbb{R}$) και $\phi \overrightarrow{f}$ είναι διαφορίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{a}$ και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} &1)\ \overrightarrow{D}(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g})(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{D}\overrightarrow{g}(\overrightarrow{a}) \\ &2)\ \overrightarrow{D}(\lambda \overrightarrow{f})(\overrightarrow{a}) = \lambda \overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) \\ &3)\ \overrightarrow{D}(\phi \overrightarrow{f})(\overrightarrow{a}) = \phi(\overrightarrow{a})\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) + D\phi(\overrightarrow{a})\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) \end{aligned} \tag{13}$$

Άσκηση 1: Να υπολογιστεί το διαφορικό της διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) = (e^y z^2 + x,\ z^2 - 3y^3,\ 2xz + x^2 y)$ στο σημείο $(-1, 1, 2)$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη (στο $\mathbb{R}^3$) διότι είναι C^1 (στο $\mathbb{R}^3$), καθώς οι μερικές παράγωγοί $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και για κάθε $j = 1, 2, 3$ και $i = 1, 2, 3$, υπάρχουν και είναι συνεχείς (βλέπε Θεώρημα 4 και Ορισμό 2 b)).

Η παράγωγος (ή αλλιώς ο πίνακας $Jacobi$) της $\overrightarrow{f}$ δίνεται από τον Ορισμό 1 b) ως:

$$\overrightarrow{f}'(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(\overrightarrow{x}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(\overrightarrow{x}) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial z}(\overrightarrow{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^2 e^y & 2ze^y \\ 0 & -9y^2 & 2z \\ 2z + 2xy & x^2 & 2x \end{bmatrix}$$

Επομένως, το διαφορικό της συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ στο σημείο (-1,1,2) από τη σχέση (12) είναι:

$$\overrightarrow{D}\overrightarrow{f}(-1, 1, 2) = \overrightarrow{f}'(-1, 1, 2)\overrightarrow{x} \equiv J\overrightarrow{f}(-1, 1, 2)\overrightarrow{x}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4e & 4e \\ 0 & -9 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x + 4e(y + z),\ -9y + 4z,\ 2x + y - 2z)$$