ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Μερική Παράγωγος

Μερικές Παράγωγοι

Ορισμός 1: a) Έστω $f(x,y) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση δύο μεταβλητών και (a,b) ένα σημείο του U. Θεωρούμε ότι μεταβάλλεται μόνο το x ενώ το y παραμένει σταθερό σε μία τιμή $y = b$. Τότε θεωρούμε $g(x) = f(x,b)$ μία συνάρτηση μίας μεταβλητής (του x). Η παράγωγος $g'(a)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το x στο σημείο** (a,b) και συμβολίζεται με $f_x(a,b)$. Επομένως, ορίζουμε:

$$f_x(a,b) := g'(a) \ , \ \text{όπου } g(x) = f(x,b) \ , \tag{1}$$

με τύπο

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \ ,$$

το οποίο μας δίνει (από τον ορισμό (1)) τον παρακάτω τύπο:

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \ . \tag{2}$$

b) Αντίστοιχα, θεωρώντας ότι μεταβάλλεται μόνο το y και ότι το x παραμένει σταθερό σε μία τιμή $x = a$, τότε ορίζουμε μία συνάρτηση $h(y)$ του y και θεωρούμε $h(y) = f(a,y)$. Επομένως, η παράγωγος $h'(b)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το y στο σημείο** (a,b) και συμβολίζεται με $f_y(a,b)$. Έτσι, ορίζουμε:

$$f_y(a,b) := h'(b) \ , \ \text{όπου } h(y) = f(a,y) \ , \tag{3}$$

με τύπο

$$h'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} \ ,$$

το οποίο μας δίνει (από τον ορισμό (3)) τον παρακάτω τύπο:

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \ . \tag{4}$$

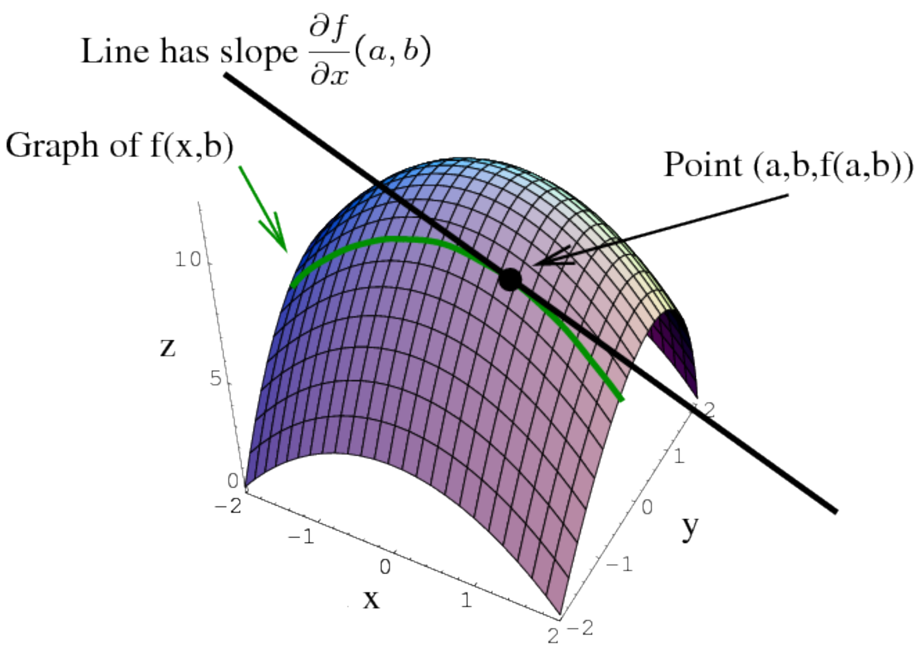
Αν το σημείο (a,b) μεταβάλλεται τότε οι $f_x, \ f_y$ είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

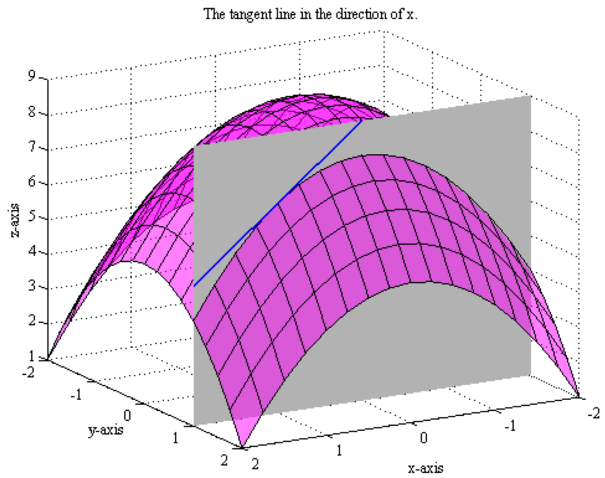
Ορισμός 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών.
Τότε οι **μερικές παράγωγοι της f ως προς x και ως προς y** αντίστοιχα είναι οι πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών f_x και f_y αντίστοιχα, με τύπους:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \ ,$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \ .$$

Συμβολισμός: $f_x \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $f_y \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Γεωμετρική ερμηνεία: Το γράφημα μίας συνάρτησης $z = f(x, y)$ παριστάνει μία επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$. Έστω ένα σημείο $P_0(a, b, c)$ με $c = f(a, b)$ το οποίο ανήκει στην επιφάνεια S. Το επίπεδο $y = b$ τέμνει την S σε μία καμπύλη C_1 με εξίσωση $z = f(x, b) = g(x)$ και το επίπεδο $x = a$ τέμνει την S σε μία καμπύλη C_2 με εξίσωση $z = f(a, y) = h(y)$. Αυτές οι δύο καμπύλες διέρχονται από το σημείο P_0. Οι μερικές παράγωγοι δίνονται από τον Ορισμό 1 ως εξής: $f_x(a, b) = g'(a)$ και $f_y(a, b) = h'(b)$. Επομένως, η μερική παράγωγος $f_x(a, b)$ στο σημείο (a, b) παριστάνει την κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης C_1 στο σημείο P_0 και η μερική παράγωγος $f_y(a, b)$ στο σημείο (a, b) παριστάνει την κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης C_2 στο σημείο P_0. Γενικότερα, η μερική παράγωγος $f_x(x, y)$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f σε μία κατεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα x και η μερική παράγωγος $f_y(x, y)$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f σε μία κατεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα y.





Στα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι η μερική παράγωγος $f_x(a, b) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ είναι η κλίση (*slope*) της εφαπτόμενης της καμπύλης $f(x, b)$ στο σημείο (a, b).

Παρατήρηση: Για να βρούμε τη μερική παράγωγο της $f(x,y)$ ως προς x σε ένα συγκεκριμένο σημείο (a,b) του πεδίου ορισμού της είτε ακολουθούμε τον Ορισμό 2 και στο αποτέλεσμα θέτουμε $(x,y)=(a,b)$ (δηλαδή αντικαθιστούμε τα x,y με τις τιμές a,b) είτε παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $f(x,y)$ θεωρώντας το y σταθερό και στο αποτέλεσμα αντικαθιστούμε τα x,y με τις τιμές a,b.
Αντίστοιχα δουλεύουμε για να βρούμε τη μερική παράγωγο της $f(x,y)$ ως προς y σε ένα σημείο (a,b) θεωρώντας το x σταθερό σε αυτήν την περίπτωση.

Ορισμός 3: Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, όπου $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Τότε η **μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή** x_i $(1 \leq i \leq n)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f_{x_i} με τύπο:

$$f_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h}$$

(υπό την προυπόθεση ότι υπάρχει το παραπάνω όριο στο $\mathbb{R}$).

Το παραπάνω όριο μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή και ώς :

$$f_{x_i}(\overrightarrow{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{x})}{h} ,$$

όπου $\overrightarrow{e_i}$ είναι το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με μηδέν εκτός από την i-οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα.

Συμβολισμός: $f_{x_i} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Θεώρημα 1: Έστω $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών, για τις οποίες υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}$ και $\dfrac{\partial g(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}$ ως προς τη μεταβλητή x_i για $1 \leq i \leq n$ στο σημείο $\overrightarrow{x}$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial (f+g)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} , \quad \frac{\partial (\lambda f)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} \ (\text{για } \lambda \in \mathbb{R}) , \quad \frac{\partial (fg)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} , \quad \frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}$$

όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\overrightarrow{y}) \neq 0$ για κάθε $\overrightarrow{y} \in B_\delta(\overrightarrow{x}) \subset U$ για κάποιο $\delta > 0$.
Οι παραπάνω μερικές παράγωγοι δίνονται από τους τύπους:

$$1) \ \frac{\partial (f+g)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial g(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} ,$$

$$2) \ \frac{\partial (\lambda f)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} ,$$

$$3) \ \frac{\partial (fg)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} g(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x}) \frac{\partial g(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} ,$$

$$4) \ \frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} g(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) \frac{\partial g(\overrightarrow{x})}{\partial x_i}}{(g(\overrightarrow{x}))^2} .$$

Παράγωγος συνάρτησης

Ορισμός 4: Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.

a) Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ του U όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}(\overrightarrow{a}),\ f_{x_2}(\overrightarrow{a}),\ \ldots, f_{x_n}(\overrightarrow{a})$. Τότε ως ολική παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ορίζουμε τον $1 \times n$ πίνακα:

$$f'(\overrightarrow{a}) = [f_{x_1}(\overrightarrow{a}) \ \ f_{x_2}(\overrightarrow{a}) \ \ldots \ f_{x_n}(\overrightarrow{a})] = [f_{x_1} \ \ f_{x_2} \ \ldots \ f_{x_n}]_{(\overrightarrow{a})} .$$

b) Στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\overrightarrow{x} \in U$, δηλαδή όταν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in U$ και $1 \leq i \leq n$, τότε η f ονομάζεται **παραγωγίσιμη συνάρτηση (στο U)** και ως **παράγωγος της συνάρτησης f (στο U)** ορίζεται ο συναρτησιακός $1 \times n$ πίνακας

$$f' = [\, f_{x_1} \;\; f_{x_2} \;\; \dots \;\; f_{x_n} \,] \; .$$

Συμβολισμός: $f'(a) = \dfrac{df(\overrightarrow{a})}{d\overrightarrow{x}}$ και $f' = \dfrac{df}{d\overrightarrow{x}} = Jf$.

Πρόταση 1: Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάθε σημείο $\overrightarrow{x}$ του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει:

$$T'(\overrightarrow{x}) = [T(\overrightarrow{e_1}) \;\; T(\overrightarrow{e_2}) \;\; \dots \;\; T(\overrightarrow{e^n})] \; .$$

Απόδειξη: Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε εφόσον ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός έχουμε ότι

$$T(\overrightarrow{x}) = x_1 T(\overrightarrow{e_1}) + x_2 T(\overrightarrow{e_2}) + ... + x_n T(\overrightarrow{e_n}) \; .$$

Επομένως από τη σχέση 1) του Θεωρήματος 1 έχουμε ότι

$$T_{x_i} = T(\overrightarrow{e_i}) \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n \; ,$$

επομένως προκύπτει το ζητούμενο από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης (Ορισμός 4 b)).

Θεώρημα 2: Έστω $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{x} \in U$. Τότε οι συναρτήσεις

$$(f+g)'(\overrightarrow{x}) \; , \; (\lambda f)'(\overrightarrow{x}) \text{ (για } \lambda \in \mathbb{R}) \; , \; (fg)'(\overrightarrow{x}) \; , \; \left(\frac{f}{g}\right)'(\overrightarrow{x})$$

(όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\overrightarrow{y}) \neq 0$ για κάθε $\overrightarrow{y} \in B_\delta(\overrightarrow{x}) \subset U$ για κάποιο $\delta > 0$) είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $\overrightarrow{x} \in U$ και ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
&1) \; (f+g)'(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{x}) + g'(\overrightarrow{x}) \; , \\
&2) \; (\lambda f)'(\overrightarrow{x}) = \lambda f'(\overrightarrow{x}) \; , \\
&3) \; (fg)'(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x}) g'(\overrightarrow{x}) \; , \\
&4) \; \left(\frac{f}{g}\right)'(\overrightarrow{x}) = \frac{f'(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) g'(\overrightarrow{x})}{(g(\overrightarrow{x}))^2} \; .
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, για $n \geq 2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ενα σημείο $\overrightarrow{a} \in U$, δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $\overrightarrow{a} \in U$.

Κλίση συνάρτησης

Ορισμός 5: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$** ορίζουμε το διάνυσμα

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = (f_{x_1}(\overrightarrow{a}), \, f_{x_2}(\overrightarrow{a}), \, \dots \, , \, f_{x_n}(\overrightarrow{a})) = \left(\frac{\partial f(\overrightarrow{a})}{\partial x_1}, \, \frac{\partial f(\overrightarrow{a})}{\partial x_2}, \, \dots \, , \, \frac{\partial f(\overrightarrow{a})}{\partial x_n} \right)$$

Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (στο U) τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης f** (στο U) ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\nabla f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με τύπο

$$\nabla f(\overrightarrow{x}) = (f_{x_1}(\overrightarrow{x}), \, f_{x_2}(\overrightarrow{x}), \, \dots \, , \, f_{x_n}(\overrightarrow{x})) = \left(\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_1}, \, \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_2}, \, \dots \, , \, \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_n} \right)$$

Συμβολισμός: $\nabla f = gradf$.

Παρατήρηση 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση n μεταβλητών στο σημείο $\overrightarrow{x} \in U$. Τότε μεταξύ της παραγώγου $f'(\overrightarrow{x})$ και της κλίσης $\nabla f(\overrightarrow{x})$ ισχύει η σχέση

$$f'(\overrightarrow{x}) = \nabla f(\overrightarrow{x})^{\top}$$

όπου ο εκθέτης $\top$ συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα.
(**Σχόλιο:** Κάθε διάνυσμα με n συντεταγμένες μπορεί να γραφεί σαν πίνακας στήλη $n \times 1$, επομένως η κλίση $\nabla f(\overrightarrow{x})$ είναι $n \times 1$ και άρα ο ανάστροφός του (δηλαδή $\nabla f(\overrightarrow{x})^{\top}$) είναι $1 \times n$).

C^1 συνάρτηση

Ορισμός 6: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.
$a)$ Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) σε ένα σημείο** $\overrightarrow{a} \in U$, όταν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq U$ του $\overrightarrow{a}$ και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
$b)$ Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση)** (στο U), όταν είναι παραγωγίσιμη στο U και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών που έχει μερικές παραγώγους f_x και f_y. Οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y είναι επίσης πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τις μερικές παραγώγους των f_x και f_y, δηλαδή τις $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$ (σε όποια σημεία υπάρχουν) και οι οποίες ονομάζονται **δεύτερες μερικές παράγωγοι (ή μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης) της συνάρτησης** f .

Συμβολισμός:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ορισμός 7: $a)$ Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών και $\overrightarrow{a} \in U$. Έστω ότι για κάποιο $\delta > 0$ με $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq U$ υπάρχει η πρώτη μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάποιο i με $1 \leq i \leq n$ και για κάθε $\overrightarrow{x} \in B_\delta(\overrightarrow{a})$. Τότε η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\overrightarrow{a})$ είναι η **δεύτερη μερική παράγωγος της** f **ως προς τις μεταβλητές** x_i **και** x_j **στο** $\overrightarrow{a}$ και ορίζεται ως

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) := \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_j}) - f_{x_i}(\overrightarrow{a})}{h}$$

(αν υπάρχει αυτό το όριο).

$b)$ Αν υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{x})$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in U$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\overrightarrow{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i}(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{e_j}) - f_{x_i}(\overrightarrow{x})}{h}$$

ονομαζεται **δεύτερη μερική παράγωγος (ή μερική παράγωγος δεύτερης τάξης) της f ως προς τις μεταβλητές x_i και x_j** .

Συμβολισμός: Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συμβολίζονται ως $f_{x_i x_j}(\overrightarrow{x}) \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{x})$ (για $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq n$) (5) .
Οι $f_{x_i x_j}$ με $i \neq j$ ονομάζονται μικτές δεύτερες μερικές παράγωγοι. Στον συμβολισμό $f_{x_i x_j}$ η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από αριστερά προς δεξιά (δηλαδή πρώτα ως x_i και μετά ως x_j), ενώ στον συμβολισμό $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (ο οποίος είναι ισοδύναμος, βλέπε σχέση (5)) η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από δεξιά προς αριστερά (δηλαδή πάλι πρώτα ως x_i και μετά ως x_j).
Στην περίπτωση που έχουμε $i = j$ συμβολικά μπορούμε να γράψουμε $f_{x_i^2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i^2}$ αντί για $f_{x_i x_i}(\overrightarrow{x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

Σχόλιο: Οι μερικές παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης ορίζονται κατά παρόμοιο τρόπο.
π.χ. $f_{xyy} = \dfrac{\partial}{\partial y}(f_{xy}) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

C^2 συνάρτηση

Ορισμός 8: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{a} \in U$.
$a)$ Η συνάρτηση f ονομάζεται C^2 **συνάρτηση (ή δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) στο σημείο** $\overrightarrow{a}$, όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_{x_i} (για όλα τα $1 \leq i \leq n$) σε μία περιοχή $B_\delta(\overrightarrow{a}) \subseteq U$ του σημείου $\overrightarrow{a}$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i} : B_\delta(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις στο σημείο $\overrightarrow{a}$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ σε μία περιοχή $B_\epsilon(\overrightarrow{a}) \subseteq B(\delta)(\overrightarrow{a})$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i x_j} : B_\epsilon(\overrightarrow{a}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
$b)$ Η συνάρτηση f ονομάζεται C^2 **συνάρτηση (ή δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση)** (στο U), όταν η f είναι C^2 σε όλα τα σημεία $\overrightarrow{x} \in U$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ στο U για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο U.

Σχόλιο: Επαγωγικά ορίζονται οι $C^3, C^4, ..., C^\infty$ συναρτήσεις.

Θεώρημα Clairaut: Για μία συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία είναι C^2 σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in U$ ισχύει ότι:

$$f_{x_i x_j}(\overrightarrow{a}) = f_{x_j x_i}(\overrightarrow{a}) ,$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 1: Εξετάστε αν υπάρχούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1,0)$ και $f_y(1,0)$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} \ , \ y \neq 0 \\ 0 \ , \ y = 0 \end{cases} .$$

Λύση: Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 ,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1,0+h)-f(1,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\sin\frac{1}{h}\right)\ ,$$

όπου όμως το $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\sin\frac{1}{h}\right)$ δεν υπάρχει (π.χ. θεωρούμε τις ακολουθίες $h_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0$ και $h_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$ και εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς)

Επομένως από τα παραπάνω και τους ορισμούς (2),(4) των μερικών παραγώγων βλέπουμε ότι υπάρχει η μερική παράγωγος $f_x(1,0)$ της f ως προς το x στο σημείο $(1,0)$ αλλά δεν υπάρχει η μερική παράγωγος της f ως προς το y στο σημείο $(1,0)$.

Άσκηση 2: Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1,2)$ και $f_y(1,2)$ της συνάρτησης $f(x,y)=x^4y+2e^{-xy}-2y^2+5$.

Λύση:

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=4x^3y-2ye^{-xy}\Rightarrow f_x(1,2)=8-4e^{-2}\\ f_y(x,y)&=x^4-2xe^{-xy}-4y\Rightarrow f_y(1,2)=1-2e^{-2}-8\end{aligned}$$

Άσκηση 3: Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x,y)=sin\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)$

Λύση:

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)=cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3+2x}{1-y}\\ f_y(x,y)&=cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)=cos\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)\frac{3x+x^2}{(1-y)^2}\end{aligned}$$

[καθώς $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x+x^2}{1-y}\right)=(3x+x^2)\left(-\frac{1}{(1-y)^2}\right)(-1)$].

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x,y,z)=x^2e^y+ycosz-zy^2$$

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους.

$$\begin{aligned}f_x(x,y,z)&=2xe^y\\ f_y(x,y,z)&=x^2e^y+cosz-2zy\\ f_z(x,y,z)&=-ysinz-y^2\end{aligned}$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης f από τον Ορισμό 4 b) είναι ο 1×3 συναρτησιακός πίνακας

$$f'(x,y,z)=[2xe^y\quad x^2e^y+cosz-2zy\quad -(ysinz+y^2)].$$

Άσκηση 5: Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}\ ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Λύση:

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\ ,\\ f_y(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\ ,\end{aligned}$$

επομένως υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y της f στο $(0,0)$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και η παράγωγος της είναι η $f'(0,0) = [0\ 0]$.
Η f όμως δεν είναι συνεχής καθώς δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αφού

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$