

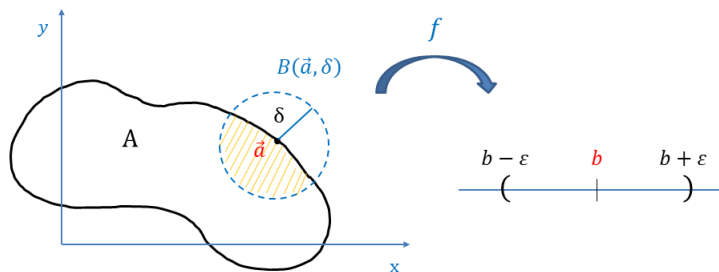
Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Το \vec{a} καλείται σημείο συσσώρευσης του A και γράφουμε:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : |f(\vec{x}) - b| < \varepsilon, \text{ για κάθε } \vec{x} \in A \\ \text{με } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία της Έννοιας του Ορίου Πραγματικής Συνάρτησης



Μοναδικότητα του Ορίου

Το όριο όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Αλγεβρικές Ιδιότητες Ορίων

Έστω $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και το $\vec{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A . Επίσης, έστω ότι υπάρχουν και τα όρια:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x}) \text{ και } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x})$$

. Τότε υπάρχουν και τα παρακάτω όρια:

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x})$$

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x})$$

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} (f(\vec{x})g(\vec{x})) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x}) \right) \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x}) \right)$$

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x})}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x}) \neq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε Πολικές Συντεταγμένες, δηλαδή $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Με αντικατάσταση πάνω στο όριο προκύπτει το εξής:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

Διότι $r \rightarrow 0$ (μηδενική) και $\cos^2 \theta \sin \theta$ φραγμένη, άρα όλη η ποσότητα τείνει στο μηδέν (μηδενική επί φραγμένη είναι μηδενική). Τέλος, αφού το όριο είναι μοναδικό ισχύει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0, \quad x \neq 0$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\left| x + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \rightarrow 0$$

καθώς τα x και y τείνουν στο μηδέν. Δηλαδή

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right) \leq 0$$

Επομένως,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

Αρχή της Μεταφοράς ή Ακολουθιακό Κριτήριο

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και το \vec{a} σημείο συσσώρευσης του A . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Υπάρχει το $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = b$
- Για κάθε ακολουθία (\vec{x}_ν) του A με $\vec{x}_\nu \neq \vec{a} \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\vec{x}_\nu \rightarrow \vec{a}$ έχουμε $f(\vec{x}_\nu) \rightarrow b$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x \sin \frac{1}{y}$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μεταφοράς. Θέτω

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες (\vec{v}_ν) και (\vec{w}_ν) ως εξής:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_\nu) &= \left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) \rightarrow (1, 0) \\ (\vec{w}_\nu) &= \left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \rightarrow (1, 0) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τις αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_\nu) &= f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) = \sin(2\nu\pi) = 0 \rightarrow 0 \\ f(\vec{w}_\nu) &= f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Επομένως από την Αρχή της Μεταφοράς, δεν υπάρχει το όριο.

Κριτήριο μή - Ύπαρξης του Ορίου

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ σ.σ του A . Τότε αν δύο διαφορετικές καμπύλες (δρόμοι) οδηγούν σε διαφορετικά όρια, λόγω της μοναδικότητας του ορίου συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + (x-y)^8}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y - άξονας (δηλαδή $x = 0$).

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + (0 - y)^8} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^8} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

(Σχόλιο: Η πράξη μέσα στο όριο προηγείται. Μετά βάζουμε το όριο).

- $x = y$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y - άξονας ($x = 0$)

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

- x - άξονας ($y = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y - άξονας ($x = 0$)

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

- $x = y$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^3}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y - άξονας ($x = 0$)

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

- $x = y^2$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^6 + y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^3(y^3 + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^3 + 1} = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

Όρια Διανυσματικών Συναρτήσεων

Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και το $\vec{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ τότε:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon, \text{ για κάθε } \vec{x} \in A$
με $0 < \|\vec{x} - \vec{\alpha}\| < \delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, με $\vec{f} = (f_1, \dots, f_j, \dots, f_m)$, το $\vec{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_m), \quad 1 \leq j \leq m$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f_j(\vec{x}) = b_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, x + y \sin \frac{1}{x} \right) \rightarrow (0, 0)$$

Λύση

Έστω $\vec{f} = (f_1, f_2)$ με $f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ και $f_2(x, y) = x + y \sin \frac{1}{x}$.

Για να υπάρχει το όριο της διανυσματικής συνάρτησης \vec{f} πρέπει να υπάρχει το όριο της κάθε συνιστώσας της, δηλαδή να υπάρχουν τα όρια των πραγματικών συναρτήσεων f_1 και f_2 .

$$\text{Επιπλέον, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \vec{f}(x, y) = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) \right).$$

Από Άσκηση 1 και Άσκηση 2 έχουμε ότι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = 0 \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0.$$

Επομένως, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \vec{f}(x,y) = (0,0).$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\vec{G}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}, \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right)$$

Λύση

Έστω $\vec{G} = (G_1, G_2)$. Το όριο της διανυσματικής συνάρτησης \vec{G} δεν υπάρχει διότι από Άσκηση 6 δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης G_1 .