ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Θεώρημα Green και Θεώρημα Απόκλισης

Θεώρημα Green

Έστω D ένα απλό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ με

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) : a \le x \le b,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\} \\ &= \{(x,y) : c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\} \end{aligned}$$

όπου $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $g_1, g_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ είναι C^1 (συνεχώς διαφορίσιμες) συναρτήσεις. Έστω επίσης ∂D το σύνορο του χωρίου D και $\overrightarrow{F} = (P,Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Τότε ισχύει ο τύπος του *Green*:

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \equiv \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Θεώρημα Απόκλισης

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο στο οποίο εφαρμόζεται το Θεώρημα του *Green*, έστω ∂D το σύνορο του D και $\overrightarrow{n}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο ∂D. Αν $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \to \overrightarrow{r} = (x(t), y(t))$ είναι μία θετικά προσανατολισμένη παραμέτρηση, το $\overrightarrow{n}$ δίνεται από:

$$\overrightarrow{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \equiv \frac{(y'(t), -x'(t))}{||\overrightarrow{r'}||}$$

'Εστω $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στο D. Τότε ισχύει ο τύπος :

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \int\int_D div \overrightarrow{F}\, dxdy$$

Απόδειξη:

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \int_a^b \left(\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{n}(t) \right) ||\overrightarrow{r}'(t)||dt = \int_a^b (P(\overrightarrow{r}(t)), Q(\overrightarrow{r}(t))) \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{||\overrightarrow{r}'||} ||\overrightarrow{r}'||dt$$

$$= \int_a^b P(\overrightarrow{r}(t))y'(t) - Q(\overrightarrow{r}(t))x'(t)dt = \int_a^b (-Q(\overrightarrow{r}(t)), P(\overrightarrow{r}(t))) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt = \int_{\partial D} (-Q, P) ds$$

$$= [\text{χρήση Θεωρήματος}\, Green] = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy \equiv \int_D div \overrightarrow{F} dxdy$$

Αντίστοιχα, στις τρείς διαστάσεις για το Θεώρημα Αποκλισής έχουμε οτι ισχύει ο τύπος :

$$\int\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \int\int\int_D div \overrightarrow{F}\, dxdydz$$

όπου $D \subseteq \mathbb{R}^3$ και $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στο D.

ΑΣΚΗΣΗ 1 : Να υπολογιστεί με τη βοήθεια του τύπου του $Green$ το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma (x-xy)dx + (y^3+1)dy$, όπου Γ είναι το σύνορο του ορθωγωνίου $R = [1,2] \times [0,1]$.

ΛΥΣΗ: Εφαρμόζοντας τον τύπο του $Green$ παίρνουμε:

$$\int_\Gamma (x-xy)dx + (y^3+1)dy = \int\int_R \left(\frac{\partial(y^3+1)}{\partial x} - \frac{\partial(x-xy)}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= \int\int_R xdxdy = \int_0^1 \int_1^2 xdxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 dy = \int_0^1 \frac{3}{2}dy = \frac{3}{2}\,[y]_0^1 = \frac{3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 : Να υπολογιστεί με τη βοήθεια του τύπου του $Green$ το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma (x^3+y^3)dx + (2y^3-x^3)dy$, όπου $\Gamma = \partial D = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$.

ΛΥΣΗ: Εφαρμόζουμε τον τύπο του $Green$ για το χωρίο $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ και κάνουμε χρήση πολικού μετασχηματισμού ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, με $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$, όπου $dxdy = rdrd\theta$) :

$$\int_\Gamma (x^3+y^3)dx + (2y^3-x^3)dy = \int\int_D \left[\frac{\partial(2y^3-x^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial y}\right] dxdy = -3\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$$
$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 drd\theta = -3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} 1d\theta = -\frac{3}{4}(2\pi - 0) = -\frac{3\pi}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 : Να υπολογιστεί με τη βοήθεια του Θεωρήματος Απόκλισης το ολοκλήρωμα $\int_S (x,y,z)\cdot\overrightarrow{n}ds$, όπου $S : x^2+y^2+z^2 = R^2$.

ΛΥΣΗ: Έχουμε οτι $D = \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ και $S = \partial D$ το σύνορο του D. Τότε από το Θεώρημα Απόκλισης παίρνουμε οτι :

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}ds = \int\int\int_D div\overrightarrow{F}dxdydz$$

όπου $\overrightarrow{F} = (x,y,z)$. Επομένως, $div\overrightarrow{F} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$

Άρα το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι

$$\int\int\int_D div\overrightarrow{F}dxdydz = \int\int\int_D 3dxdydz = 3\int\int\int_D dxdydz = 3\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3,$$

καθώς το ολοκλήρωμα $\int\int\int_D dxdydz$ είναι ο όγκος της σφαίρας ακτίνας R που είναι ίσος με $\frac{4}{3}\pi R^3$.

ΑΣΚΗΣΗ 4 : Να επαληθευτεί το Θεώρημα Απόκλισης για τη συνάρτηση $\overrightarrow{F} = (x-y, x)$, $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

ΛΥΣΗ: Έχουμε $\partial D = \{\overrightarrow{r}(t) = (cost, sint),\ t \in [0,2\pi]\}$, άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-sint, cost)$ με $||\overrightarrow{r}'(t)|| = 1$ και $\overrightarrow{n}(t) = \dfrac{(y'(t), -x'(t))}{||\overrightarrow{r}'(t)||} = (cost, sint)$.

Επίσης, $\overrightarrow{F} = (P,Q) = (x-y, x)$. Επομένως

$$\int\int_D div\overrightarrow{F}dxdy = \int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = \int\int_D 1dxdy = \pi \qquad (1)$$

καθώς το ολοκλήρωμα $\int\int_D 1dxdy$ είναι το εμβαδόν του χωρίου D το οποίο είναι ένας κύκλος ακτίνας $R = 1$ και γνωρίζουμε οτι το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας R είναι ίσο με πR^2 .

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} ds &= \int_0^{2\pi} \left(\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{n}(t)\right) ||\overrightarrow{r}'(t)|| dt \\
&= \int_0^{2\pi} (cost - sint, cost) \cdot (cost, sint) dt \\
&= \int_0^{2\pi} cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + cos(2t)}{2} dt \\
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos(2t) dt &= \frac{1}{2}[t]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi \qquad (2)
\end{aligned}$$

Επομένως απο (1),(2) βλέπουμε οτι ισχύει το Θεώρημα Απόκλισης.