ΠΙΝΑΚΑΣ JACOBI

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $I_1, \dots, I_m$ ανοιχτά διαστήματα με

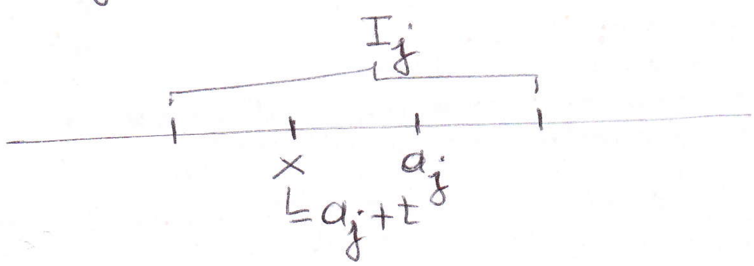
$I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m \subseteq A$ και $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m) \in I_1 \times \dots \times I_m$.

Έστω και $f: A \to \mathbb{R}^n$ διαφ. στο $\vec{a}$.

Σταθεροποιώ όλα τα $a_1, \dots, a_n$ εκτός ενός a_j, και

συμβολίζω

$$f^j: I_j \longrightarrow \mathbb{R}^n : x = a_j + t \longmapsto f^j(x)$$



όπου

$$f^j(x = a_j + t) = f(\underbrace{a_1, \dots, a_{j-1}}_{\text{σταθ.}}, \underbrace{a_j + t}_{\text{μεταβλ.}}, \underbrace{a_{j+1}, \dots, a_m}_{\text{σταθ.}}).$$

$$= f(\vec{a} + t\vec{e}_j).$$

Αφού f διαφορ., $\exists\, (Df)_{\vec{a}}$. Θδο f^j διαφορ.

Παρατηρώ ότι:

$$f^j(a_j) = f(\vec{a})$$

$$f^j(a_j + t) = f(\vec{a} + t\vec{e}_j)$$

f^j διαφ στο $a_j \iff \exists$ γραμμική $(Df^j)_{a_j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f^j(a_j+t) - f^j(a_j) - (Df^j)_{a_j}(t)}{t} = 0 \iff$$

$$\iff \exists \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{e}_j) - f(\vec{a}) - (Df)_{\vec{a}}(t\vec{e}_j) + (Df)_{\vec{a}}(t\vec{e}_j) - (Df^j)_{a_j}(t)}{\| t\vec{e}_j \|} = 0$$

$$\iff \exists \lim_{t\to 0} \left[\frac{f(\vec{a}+t\vec{e}_j) - f(\vec{a}) - (Df)_{\vec{a}}(t\vec{e}_j)}{\| te_j \|} + \frac{t\left((Df)_a(\vec{e}_j) - (Df^j)_{a_j}(1)\right)}{t} \right] = 0$$

ομως απο την διαφ/τητα της f στο $\vec{a}$,

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{e}_j) - f(\vec{a}) - (Df)_{\vec{a}}(t\vec{e}_j)}{\| t\vec{e}_j \|} = 0$$

αρα για να είναι 0 το όριο του παραπάνω αθροίσματος, πρέπει να πάρουμε $(Df^j)_{a_j}(t) := (Df)_{\vec{a}}(t\vec{e}_j)$. Τότε

$$(Df)_{\vec{a}}(\vec{e}_j) = (Df^j)_{a_j}(1) = (df^j)_{a_j}(1) = (f^j)'(a_j).$$

Ονομάζουμε την $(f^j)'(a_j)$ <u>μερική παράγωγο της f ως προς</u> x_j <u>στο $\vec{a}$</u> και την συμβολ. με $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\vec{a}}$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Ονομάζουμε <u>πίνακα Jacobi της f</u> <u>στο $\vec{a}$</u> τον

$$J_{\vec{a}} f := \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{a}} \right)$$

όπου $f = (f_1, \dots, f_n)$.

ΠΡΟΤ. Ο πίνακας Jacobi της f στο $\vec{\alpha}$ είναι ο πίνακας της γραμμ. απεικ. $(Df)_{\vec{\alpha}}$ ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$.

Απόδ. Ο πίνακας της $(Df)_{\vec{\alpha}}$ είναι ο

$$\left(pr_i\left((Df)_{\vec{\alpha}}(\vec{e}_j)\right)\right)_{i,j} \quad \text{(βλ. σελ. 31)}.$$

Όμως

$$(Df)_{\vec{\alpha}} = \left((Df_1)_{\vec{\alpha}}, (Df_2)_{\vec{\alpha}}, \dots, (Df_n)_{\vec{\alpha}}\right)$$

(βλ. σελ. 35). Άρα

$$pr_i\left((Df)_{\vec{\alpha}}(e_j)\right) = (Df_i)_{\vec{\alpha}}(\vec{e}_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\vec{\alpha}}. \quad \blacksquare$$

Από την προηγ. πρόταση προκύπτει ότι

$$\boxed{(Df)_{\vec{\alpha}}(\vec{h}) = J_{\vec{\alpha}}f \cdot \vec{h}^{\,t}}$$

κάθε στήλη του πίνακα Jacobi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\vec{\alpha}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\vec{\alpha}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\Big|_{\vec{\alpha}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{\vec{\alpha}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{\vec{\alpha}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}\Big|_{\vec{\alpha}} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{\vec{\alpha}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\Big|_{\vec{\alpha}} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}\Big|_{\vec{\alpha}} \end{pmatrix}$$

συμπίπτει με την $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\vec{a}}$. Άρα ο $J_{\vec{a}} f$ μπορεί να γραφεί και με την μορφή διανύσματος

$$J_{\vec{a}} f = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{a}}, \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\vec{a}}, \dots, \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\vec{a}} \right)$$

(που τα στοιχεία του είναι διανύσματα!). Σε αυτή τη μορφή λέγεται <u>ανάδελτα</u> ή <u>κλίση της</u> f <u>στο $\vec{a}$</u> και συμβολίζεται με

$$\nabla_{\vec{a}} f = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{a}}, \dots, \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{a} \right)$$

Τότε

$$(Df)_{\vec{a}}\left(\vec{h} = (h_1, \dots, h_m)\right) = (Df)_{\vec{a}}\left(\sum_j h_j \vec{e}_j\right) =$$

$$= \sum_j h_j \cdot (Df)_{\vec{a}}(\vec{e}_j) = \sum h_j \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\vec{a}}$$

$$= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{a}}, \dots, \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\vec{a}} \right) \cdot (h_1, \dots, h_m) =$$

$$= (\nabla_{\vec{a}} f) \cdot \vec{h}$$

"έσωτ." γινόμενο.

Άρα για να ελέγξουμε την διαφ/τητα της f στο $\vec{a}$ υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους (αν υπάρχουν) και εξετάζουμε αν

$$\exists \lim_{\vec{h} \to 0} \frac{f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - \nabla_{\vec{x}} f \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0 .$$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

διαφ. στο $(0,0)$;

θεωρούμε $y=0=$ σταθ

$$f_0(x)=f(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+0} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}=x.$$

Άρα $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f_0'(0)=1$

$\llcorner y$

θεωρούμε τώρα $x=0=$ σταθ. Τότε $f_0(y)=0 \quad \forall y \Rightarrow$

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f'_{0=x}(0)=0$. Δηλ.

$$\nabla_{(0,0)}f=(1,0).$$

f διαφ στο $(0,0)$ $\Longleftrightarrow$

$$\exists \lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-\nabla_{(0,0)}f\cdot(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\exists \lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{\dfrac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}-0-(1\cdot h_1+0\cdot h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\exists \lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{h_1^3-h_1^3-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}=0.$$

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία $h_1=h_2$ το όριο είναι $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ άρα το ζητούμενο όριο (αν υπάρχει!) δεν είναι $0 \Rightarrow f$ δεν είναι διαφ/μη στο $(0,0)$.

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$ Από την Γραμμ. Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ο πίνακας της σύνθεσης γραμμικών απεικονίσεων είναι το γινόμενο των πινάκων. Άρα ο κανόνας της αλυσίδας (σελ. 35) γίνεται

$$J_{\vec{x}}(g\circ f) = \left(J_{f(\vec{x})}\, g\right)\cdot\left(J_{\vec{x}} f\right).$$

$\boxed{\text{Εφαρμογή 1}}$ Εξετάζουμε την ειδική περίπτωση

$f : \underset{\subseteq \mathbb{R}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμες στο $t_0 \in I$ και στο $f(t_0)\in\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα. Η $g\circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι πραγμ. συνάρτηση μιας πραγμ. μεταβλητής και

$$(g\circ f)'(t_0) = \left(D(g\circ f)\right)_{t_0}(1) = (Dg)_{f(t_0)}\circ (Df)_{t_0}(1) =$$

$$= (Dg)_{f(t_0)}\left(f'(t_0)\right) =$$

$$= (Dg)_{f(t_0)}\left(f_1'(t_0), f_2'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)\right) =$$

$$= \left(\nabla_{f(t_0)}\, g\right)\cdot\left(f_1'(t_0), f_2'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)\right) =$$

$$= \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{f(t_0)}\cdot f_1'(t_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{f(t_0)}\cdot f_2'(t_0) + \cdots +$$

$$+ \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_{f(t_0)}\cdot f_n'(t_0).$$

$\boxed{\text{Εφαρμογή 2}}$ κανόνας της αλυσίδας για μερικές παραγώγους:

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}^k$, διαφορίσιμες. Συμβολίζουμε με $\vec{x}=(x_1,\dots,x_m)$ και $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$ τις μεταβλητές των f, g, αντίστοιχα.

Έστω $J_{\vec{a}} f = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\vec{a}}\right)$, $J_{f(\vec{a})} g = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}\Big|_{f(\vec{a})}\right)$

και $J_{\vec{a}}(g\circ f) = \left(\dfrac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}\Big|_{\vec{a}}\right)$ οι πίνακες Jacobi

των f, g, $g\circ f$, στα $\vec{a}$, $f(\vec{a})$ και $\vec{a}$, αντίστοιχα.

Από την σχέση των 3 πινάκων (σελ. 43) προκύπτει ότι

$$J_{\vec{a}}(g\circ f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}\Big|_{f(\vec{a})} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n}\Big|_{f(\vec{a})} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\quad \vdots \quad i\text{-γραμμή} \quad \vdots \quad} & & \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1}\Big|_{f(\vec{a})} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_n}\Big|_{f(\vec{a})} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\vec{a}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}\Big|_{\vec{a}} \\ \vdots & \boxed{j\text{-στήλη}} & \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{\vec{a}} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}\Big|_{\vec{a}} \end{pmatrix}$$

Δηλ. το i,j-στοιχείο του $J_{\vec{a}}(g\circ f)$ προκύπτει από τον "εσωτ." πολ/σιασμό της i-γραμμής του $J_{f(\vec{a})} g$ με την j-στήλη του $J_{\vec{a}} f$, άρα

$$\frac{\partial (g\circ f)_j}{\partial x_i}\Big|_{a} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}\Big|_{f(\vec{a})} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\Big|_{\vec{a}} + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_n}\Big|_{f(\vec{a})} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_j}\Big|_{\vec{a}}.$$

Άσκηση $\alpha(t) = (\text{συν} t, \text{ημ} t)$, $t \in \mathbb{R}$,

$\omega(x,y) = x \cdot y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$d_{t_0}(\omega \circ \alpha) = ;$

Απαντ. $\alpha'(t_0) = (-\text{ημ} t_0, \text{συν} t_0)$.

$$\nabla_{(x,y)} \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\Big|_{(x,y)}, \frac{\partial \omega}{\partial y}\Big|_{(x,y)} \right) = (y, x).$$

$$d_{t_0}(\omega \circ \alpha)(1) = \nabla_{\alpha(t_0)} \omega \cdot (\alpha'(t_0)) = \nabla_{(\text{συν} t_0, \text{ημ} t_0)} \omega \cdot (\alpha'(t_0)) =$$

$$= (\text{ημ} t_0, \text{συν} t_0) \cdot (-\text{ημ} t_0, \text{συν} t_0) = -\text{ημ}^2 t_0 + \text{συν}^2 t_0$$

$$\Rightarrow d_{t_0}(\omega \circ \alpha)(t) = t \cdot (-\text{ημ}^2 t_0 + \text{συν}^2 t_0).$$

Άσκηση $\varphi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) =$

$= (s/t,\ s^2 + \ln t,\ 2t)$, $(s,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$

$\omega(x,y,z) = x + 2y + z^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(1) Να βρεθούν $\frac{\partial}{\partial s}(\omega \circ \varphi)$, $\frac{\partial}{\partial t}(\omega \circ \varphi)$ με χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

(2) Να γίνει επαλήθευση.

Απαντ.

$$J_{(s,t)} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\Big|_{(s,t)}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{(s,t)} \right) = \begin{pmatrix} 1/t & -s/t^2 \\ 2s & 1/t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_{(x,y,z)} w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{(x,y,z)}, \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{(x,y,z)}, \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{(x,y,z)} \right) =$$

$$= (1, 2, 2z).$$

Άρα

$$\frac{\partial (w\circ\varphi)}{\partial s}\Big|_{(s,t)} = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{\varphi(s,t)} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\Big|_{(s,t)} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{\varphi(s,t)} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\Big|_{(s,t)} +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{\varphi(s,t)} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}\Big|_{(s,t)} =$$

$$= 1 \cdot 1/t + 2 \cdot 2s + \underbrace{2z}_{\hookrightarrow z(s,t)} \cdot 0 = 1/t + 4s.$$

$$\frac{\partial (w\circ\varphi)}{\partial t}\Big|_{(s,t)} = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{\varphi(s,t)} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}\Big|_{(s,t)} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{\varphi(s,t)} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{(s,t)} +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{\varphi(s,t)} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{(s,t)} =$$

$$= 1 \cdot (-s/t^2) + 2 \cdot 1/t + 2z(s,t) \cdot 2 =$$

$$= -s/t^2 + 2/t + 8t$$

(2) Επαλήθευση: $(w\circ\varphi)(s,t) = w(s/t, s^2 + \ln t, 2t) =$

$$= s/t + 2s^2 + 2\ln t + 4t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial (w\circ\varphi)}{\partial s}\Big|_{(s,t)} = 1/t + 4s,$$

$$\frac{\partial (w\circ\varphi)}{\partial t}\Big|_{(s,t)} = -s/t^2 + 2/t + 8t.$$