ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Θα μελετήσουμε συναρτήσεις της μορφής $f: A \to \mathbb{R}^n$, με $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) $n=m=1$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$:

είναι οι (γνωστές από την Ανάλυση I) πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

(2) $m=1$, $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}^n$:

διανυσματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. Γι' αυτές τις συναρτήσεις:

$\forall t \in A \quad f(t) = \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Αν $pr_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην i-συντεταγμ.

$\Rightarrow \; y_i = pr_i(y_1, \dots, y_n) = pr_i \circ f(t) \overset{\text{συμβ.}}{=} f_i(t)$.

Τις $f_i: A \to \mathbb{R}: t \mapsto pr_i(f(t))$ τις ονομάζουμε συντεταγμένες της f και γράφουμε $f = (f_1, \dots, f_n)$,

δηλ.:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

Δηλ. μια διαν. συνάρτηση μιας πραγμ. μεταβλητής αναλύεται σε n πραγμ. συναρτήσεις μιας πραγμ. μεταβλ.

(3) $n=1$, $m\geqslant 2$, $A\subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A\to\mathbb{R}$:

λέγονται πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (ή βαθμωτά πεδία).

(4) $n, m\geqslant 2$, $A\subseteq\mathbb{R}^m$, $f: A\to\mathbb{R}^n$: διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Και γι' αυτές ισχύει η ανάλυση $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$, όπου τώρα κάθε $f_i : A\to\mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών.

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Έστω $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$ μεταβλητή, $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$ σταθερό.
$\llcorner (x_1, \dots, x_m)$ $\llcorner (b_1, \dots, b_m)$

Γράφουμε $\vec{x}\to\vec{b} \iff x_i\to b_i$, $\forall i=1,\dots,m$.

ΟΡΣ. 1 $A\subseteq\mathbb{R}^m$, $f: A\to\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^m$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.

- Αν $\vec{x}_0\in A'$, λέμε ότι το όριο της f στο $\vec{x}_0$ είναι $\vec{b}$ και γράφουμε $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{b}$, αν

$$\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta=\delta(\vec{x}_0,\varepsilon)>0 : \;\; \|f(\vec{x})-\vec{b}\|<\varepsilon,$$
$$\forall\, \vec{x}\in A \text{ με } 0<\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta.$$

- Αν $\vec{x}_0\in A$ μεμονωμένο, θέτουμε $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) := f(\vec{x}_0)$.

ΟΡΣ. 2 $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$. Η f λέγεται <u>συνεχής στο $\vec{x}_0$</u> $\iff$ $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

ΠΡΟΤ. $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f,g: A \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$,
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{a}$, $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = \vec{b}$. Τότε

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\lambda f+g)(\vec{x}) = \lambda\vec{a}+\vec{b}$.

(2) $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (fg)(\vec{x}) = ab$ (για $f,g: A \to \mathbb{R}$).

(3) $\underset{g: A \to \mathbb{R}}{g(\vec{x}) \neq 0}$ $\forall \vec{x} \in A$ και $b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{\vec{a}}{b}$.

ΠΡΟΤ. $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f,g: A \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in A$, f,g συνεχείς στο $\vec{x}_0$. Τότε:

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda f+g)(\vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ συνεχής στο $\vec{x}_0$.

(2) $f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$ συνεχής στο $\vec{x}_0$ (για $f,g: A \to \mathbb{R}$)

(3) $\underset{g: A \to \mathbb{R}}{g(\vec{x}) \neq 0}$ $\forall \vec{x} \in A$ και $g(\vec{x}_0) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$ συνεχής στο $\vec{x}_0$.

ΠΡΟΤ. $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\underset{=(f_1,\dots,f_n)}{f: A \to \mathbb{R}^n}$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\underset{=(b_1,\dots,b_n)}{\vec{b} \in \mathbb{R}^n}$.
Τότε:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = b_i, \ \forall i=1,\dots,n.$$

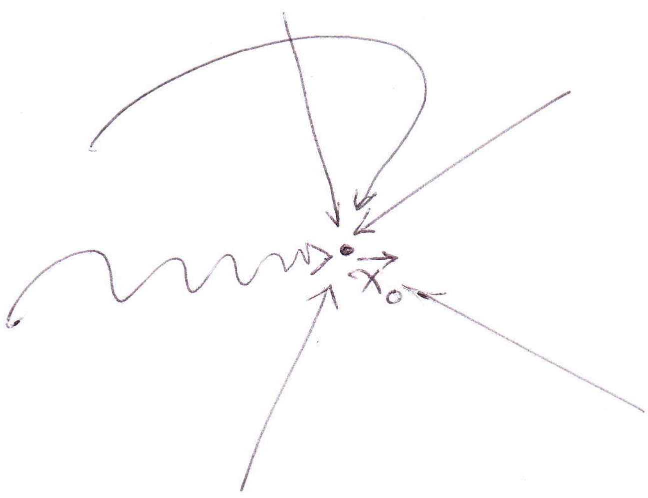
ΠΡΟΤ. $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}^n$ συνεχής στο $\vec{x}_0 \in A \iff$
f_i συνεχής στο $\vec{x}_0$, $\forall i = 1, \dots, n$

ΠΡΟΤ. $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^m}{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχής στο $\vec{x}_0 \in A$, $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$,
$g: B \to \mathbb{R}^k$ συνεχής στο $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow g \circ f$ συνεχής στο $\vec{x}_0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $A = I \subseteq \mathbb{R}$ μπορούμε να πλησιάσουμε σε ένα x_0 με δύο τρόπους: από αριστερά ή από δεξιά

Γι' αυτό, για συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής ορίζονται τα <u>πλευρικά</u> όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ και το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει, αν υπάρχουν τα δυο πλευρικά και είναι ίσα.

Αν όμως $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ μπορούμε να "πλησιάσουμε" στο $\vec{x}_0$ με άπειρους τρόπους:



Αν συμβεί δύο από αυτούς να δίνουν διαφορετικό όριο, τότε το $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ δεν υπάρχει.

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ}}$

① $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^3+xy^2}{x^4+y^2+5}$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \frac{1^2+2^3+1\cdot 2^2}{1^4+2^2+5} = \frac{13}{10}$$

② $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{A} \to \mathbb{R}^3$ $(A=??)$: $f(x,y)=\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}, e^{xy}, \ln(xy)\right)$

$f(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$, όπου

$f_1(x,y)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, $f_2(x,y)=e^{xy}$, $f_3(x,y)=\ln(xy)$.

Άρα $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \iff \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y) \quad \forall i=1,2,3$.

Έχουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(xy) = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y)$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

ΛΗΜΜΑ $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε:

$\exists\, M > 0 : \|f(\vec{x})\| \le M, \forall\, \vec{x} \in A$ (f φραγμένη), και

$\exists \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} g(\vec{x}) = 0$. Τότε $\exists \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = 0$.

Απόδ. $0 \le |f(\vec{x}) g(\vec{x})| \le M \cdot |g(\vec{x})|$ και

$\exists \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} M \cdot |g(\vec{x})| = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} |f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})| = 0 \Rightarrow$

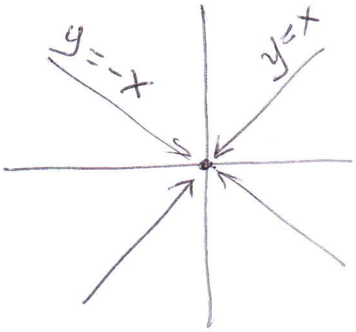
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) g(\vec{x}) = 0$. ∎

Εφαρμογή: $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} x \,\eta\mu \frac{1}{y} = 0$

ΑΣΚΗΣΗ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Για ποιό a είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

Λύση



Πλησιάζοντας στο $(0,0)$ από την ευθεία $y=x$, παίρνουμε

$\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$

ενώ πλησιάζοντας πάνω στην $y=-x$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x,-x) = -1$. Δηλ. $\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$

άρα, f δεν γίνεται συνεχής.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση

$g(x) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, όπου x μεταβλητή και y παράμετρος.

(1) $y=0 \Rightarrow g(x) = \frac{0}{x^2} = 0 = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

(2) $y\neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{0}{0+y^2} = 0$

Άρα $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Ανάλογα, αν $h(y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, y μεταβλητή, x παράμετρος

$\Rightarrow \exists \lim_{y\to 0} h(y) = 0$.

Άρα η ύπαρξη ορίου ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά, δεν συνεπάγεται την ύπαρξη ορίου για την συνάρτηση πολλών μεταβλητών.

Το ίδιο συμβαίνει με την συνέχεια και, όπως θα δούμε πιο κάτω, με την διαφόριση.

Για την συνέχεια, συγκρίνετε τις

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

με την f της σελ. 29.