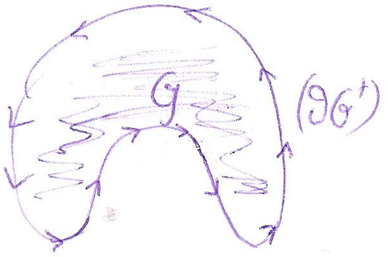
ΜΑΘΗΜΑ 30 (16-05)

Θ. Green (εφαπτομενική μορφή)

Υπενθύμιση $\vec{F} = (P,Q)$ $A\ (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, A = ανοικτό, $\vec{F}$ είναι C^1

G - σύνολο Green : $\partial G = \Gamma$, $\vec{r} = r(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, κλειστή, απλή, C^1, λεία (κατά τμήματα)



$$\oint_{(\partial G^+)} (\vec{F} \cdot \vec{T})\, ds = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t)\, dt =$$

$$\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t))\,dx + Q'(x(t),y(t))\,dy \overset{\partial G = \Gamma}{=}$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$\left(\vec{T} = \frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|},\ ds = \|\vec{r}\,'\|\, dt \right)$

Μοναδιαίο εφαπτόμενο

Υπολογισμός εμβαδού χρησιμοποιώντας Θ. Green.

$\vec{F}_1(x,y) = (0,x)$, $A(G) = \iint_G 1\, dx\,dy = \oint_\Gamma \vec{F}_1(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \oint_\Gamma 0\,dx + x\,dy$

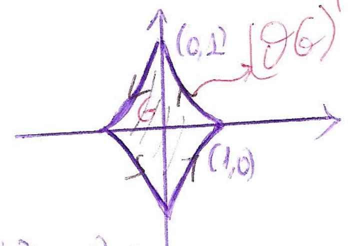
$\vec{F}_2(x,y) = (-y,0)$, $A(G) = \oint_\Gamma \vec{F}_1(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t)\, dt = \oint_\Gamma -y\,dx + 0\,dy$

$A(G) = \frac{1}{2} \oint_\alpha^\beta -y\,dx + x \cdot dy$, $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$ $(= F_1(x,y) + F_2(x,y))$

Άσκηση

Εμβαδόν $G = \{(x,y) : x^{2/3} + y^{2/3} \le 1\}$

(∂G^{+}) $\vec{r}(t) = (συν^3 t, ημ^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$



$\vec{r}\,'(t) = (-3συν^2 t\,ημ t, 3ημ^2 t\,συν t)$

$$A(G) = \int_0^{2\pi} (-2ημ^3 t, συν^3 t) \cdot (-3συν^2 t\,ημ t, 3ημ^2 t\,συν t)\,dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (ημ^4 t\,συν^2 t + ημ^2 t\,συν^4 t)\,dt = 3\int_0^{2\pi} ημ^2 t\,συν^2 t\,dt = 3\pi/8$$

Ταυτότητες Green για 2-μεταβλητές

$f, g : A\ (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $\underline{\underline{C^2}}$

G: σύνολο Green, ∂G αποτελείται από μία απλή, κλειστή, $\underset{(κ.τ.)}{C^1}$, $\underset{(κ.τ.)}{\text{λεία}}$ καμπύλη και $\underline{\bar{G} \subseteq A}$.

i) $$\iint_G (f \nabla^2 g)\,dx\,dy + \iint_G (\nabla f \cdot \nabla g)\,dx\,dy = \oint_{(\partial G^+)} -f\frac{\partial g}{\partial y}dx + f\frac{\partial g}{\partial x}dy =$$

$$\left(= \oint_{\partial G^+} (f \nabla g)\cdot \vec{n}\, ds \right)$$

1η ταυτοτ. Green

ii) $\iint_G (f\nabla^2 f)\,dxdy + \iint_G \|\nabla f\|^2\,dxdy = \oint_{(\partial G^+)} -f\frac{\partial f}{\partial y}dx + f\frac{\partial f}{\partial y}dy$

2η ταυτοτ. Green

iii) Έστω f αρμονική συνάρτηση ($\nabla^2 f=0$) και $f(x,y)=0$ για κάθε $(x,y)\in\partial G$. Τότε $f(x,y)=0$ για κάθε $(x,y)\in G$.

(Ισοδ: η λύση της $\nabla^2 g=0$ καθορίζεται μόνο από τις συνοριακές συνθήκες στο G

δηλ. αν g,h , $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$ και $g(x,y)=h(x,y)$ αν $(x,y)\in\partial G$ τότε $g(x,y)=h(x,y)$ για $\forall (x,y)\in G$)

Λύση

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \quad (\text{λαπλασιανή της } \phi)$$

i) $\vec F(x,y) = \left(-f\frac{\partial g}{\partial y},\ f\frac{\partial g}{\partial x}\right) = (P,Q)$

$$\oint_{(\partial G)^+} -f\frac{\partial g}{\partial y}dx + f\frac{\partial g}{\partial x}dy = \oint_{(\partial G)^+}\left(-f\frac{\partial g}{\partial y},\ f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\cdot\vec T\,ds \overset{\text{Green}}{=}$$

$$= \iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_G\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$= \iint_G(\nabla f\cdot\nabla g)\,dxdy + \iint_G (f\nabla^2 g)\,dxdy$$

ii) στην i) $f \equiv g$

iii) Έχουμε $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ στο G

$f(x,y)=0$ για $(x,y)\in \partial G$

Άρα από την ii) $\iint_G \|\nabla f\|^2 dxdy = 0 \to$

$\|\nabla f\|^2 = 0 \Rightarrow \nabla f(x,y) = \vec{0}\ ,\ (x,y)\in G \xrightarrow{\text{Θ.Μ.Τ}}$

$f(x,y) = c\ ,\ (x,y)\in G$. Όμως $f(x,y)=0\ ,\ (x,y)\in\partial G$

Άρα $f(x,y)=0,\ (x,y)\in G$ (f = συνεχής)

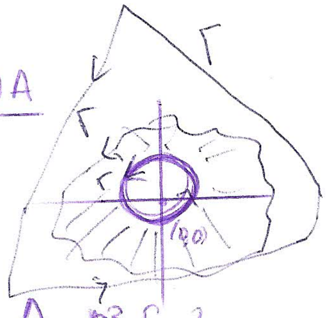
Εφαρμογή Θ. Green για αστρόβιλα δ.π. $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

ο στροβιλισμός $\nabla \times f(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\vec{k} = \vec{0}$

για $\forall (x,y)\in A$

$\vec{F}$ είναι C^1, π.ο. A = ανοιχτό - ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ

Έστω ότι η F δεν ορίζεται στο $(\alpha,\beta)\in\partial A$



$A = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

Τότε $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \begin{cases} 0 & \text{αν } (\alpha,\beta)\notin \text{εσ}\Gamma \\ c & \text{αν } (\alpha,\beta)\in \text{εσ}\Gamma \end{cases}$

για κάθε Γ απλή + κλειστή + λεία + C^1 (κ.τ) (κ.τ)

Το c ΔΕΝ εξαρτάται από την καμπύλη Γ

Θα το δούμε μέσω παραδείγματος. Η απόδειξη γίνεται και για τυχαίο αστρόβιλο δ.π, τελείως ανάλογα.

Άσκηση

(π.ο του $\vec{F}$ όχι απλά συνεκτικό σύνολο)

Έστω $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

i) Αποδείξτε ότι το $\vec{F}$ έχει στροβιλισμό $\vec{0}$ (αστρόβιλο) για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

ii) Υπολογίστε την ροή $I_1=\oint_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ δια μέσου κλειστής, απλής, $C^1_{(κτ)}$, λείας$_{(κτ)}$ καμπύλης όπου το $(0,0)\notin εσ\Gamma_1$ Γ_1

iii) Υπολογίστε την ροή $I_2=\oint_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ δια μέσου κλειστής, απλής, $C^1_{(κτ)}$, λείας$_{(κτ)}$ καμπύλης όπου το $(0,0)\in εσ\Gamma_2$ Γ_2

<u>Λύση</u> i) $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\Bigg\}$ $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\vec{k}=\vec{0}.$

ii) Το $G=εσ\Gamma_1\cup\Gamma_1$ είναι απλό σύνολο Green και η $\vec{F}$ είναι $C^1_{στο\,G}$

άρα, (Θ. Green) $I_1=\oint_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_G 0\,dxdy=\underline{\underline{0}}$

(Το σύνορο του G είναι η Γ_1). Για τυχαία Γ_1 με $(0,0)\notin εσ\Gamma_1$ $\oint_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot\vec{T}ds=0$

iii) Το $(0,0)\in εσ\Gamma_2$, η $\vec{F}$ <u>δεν</u> ορίζεται στο $(0,0)$. Το $A=(εσ\Gamma_2)\cup\Gamma_2\setminus\{(0,0)\}$ <u>δεν</u> είναι σύνολο Green (το σύνορο του A, $\partial A=\Gamma_2\cup\{(0,0)\}$ δεν είναι απλή, κλειστή, C^1, λεία καμπύλη).

<u>Δεν</u> μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green!!

Παίρνουμε ένα κύκλο Γ_2^* κέντρου $(0,0)$ ακτίνας α $(\alpha>0)$ ώστε $εσ\Gamma_2^*\subseteq εσ\Gamma_2$

Τότε το $B=(εσ\Gamma_2\setminus εσ\Gamma_2^*)\cup\Gamma_2^*\cup\Gamma_2$ είναι σύνολο Green $(\partial B=\Gamma_2^*\cup\Gamma_2)$.

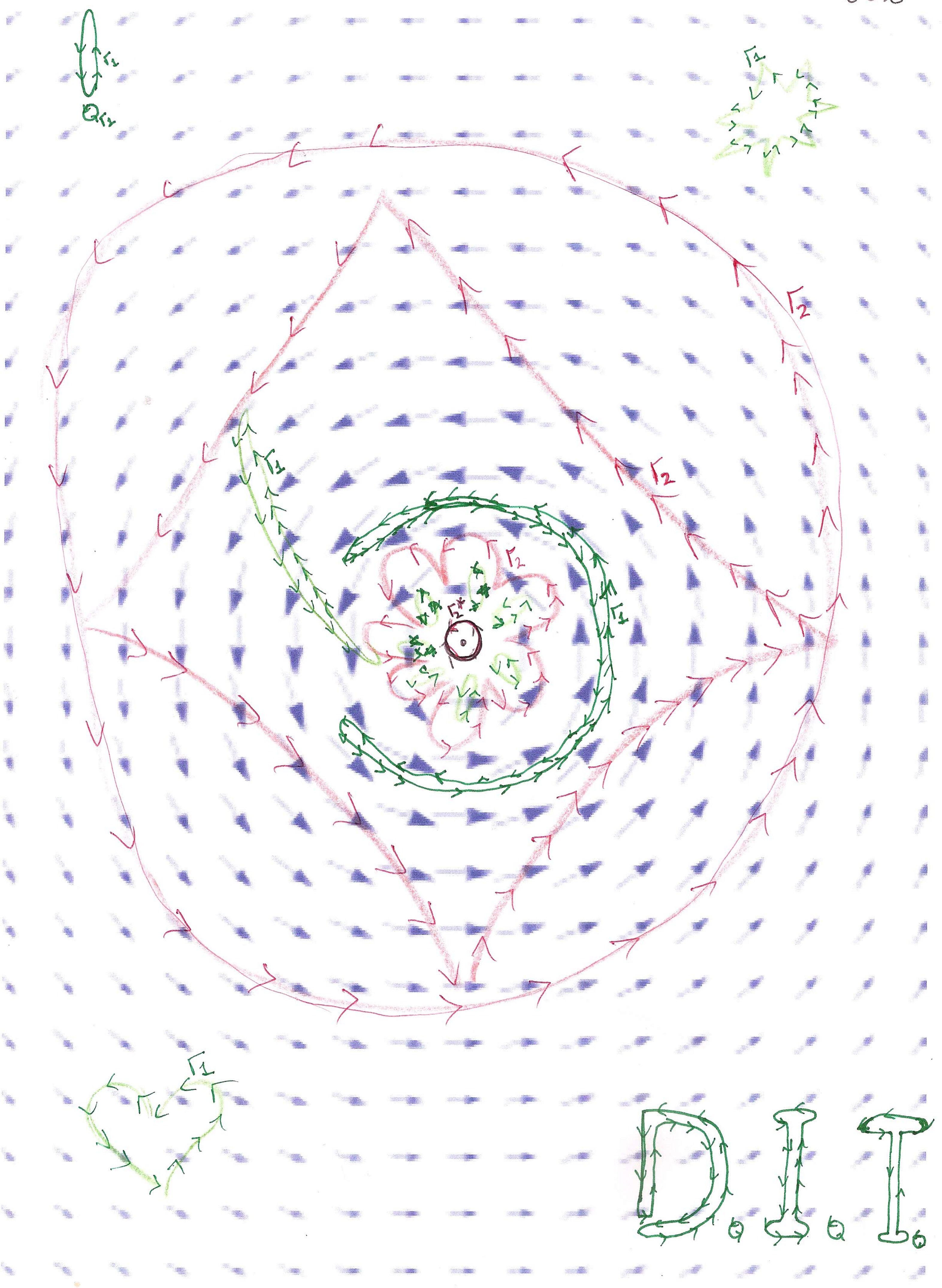
Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green:

$\oint_{(\partial B)^+}\vec{F}\cdot\vec{T}ds=\oint_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot\vec{T}ds-\oint_{\Gamma_2^*}\vec{F}\cdot\vec{T}ds=\iint_B\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$. Άρα

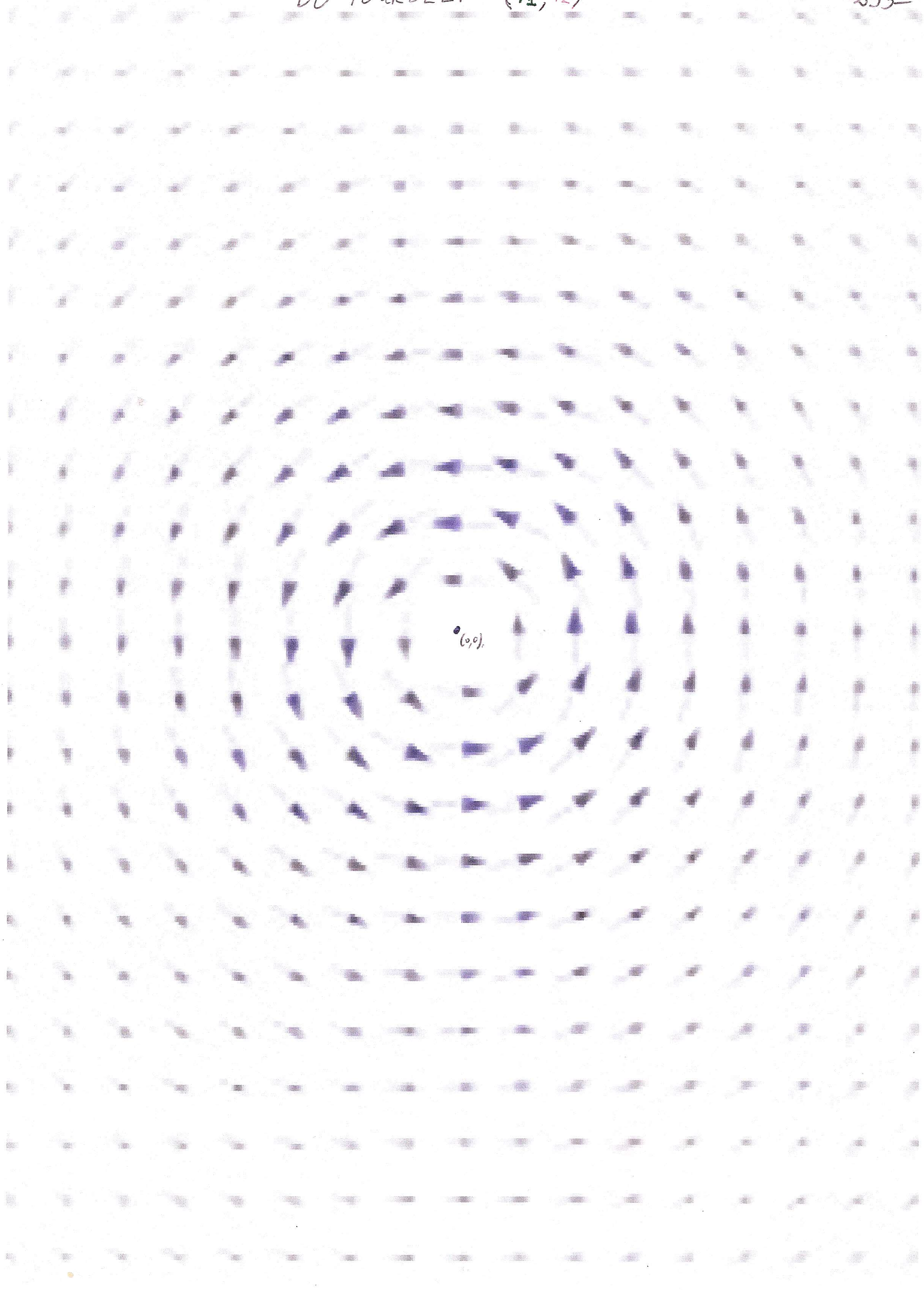
$$\oint_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot\vec{T}ds=\oint_{\Gamma_2^*}\vec{F}\cdot\vec{T}ds=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\alpha\eta\mu t}{\alpha^2},\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu t}{\alpha^2}\right)\cdot(-\alpha\eta\mu t,\alpha\sigma\upsilon\nu t)dt=\int_0^{2\pi}1\,dt=\underline{\underline{2\pi}}$$

$(\Gamma_2^*: \vec{r}(t)=(\alpha\sigma\upsilon\nu t,\alpha\eta\mu t),\ t\in[0,2\pi],\ \vec{r}'(t)=(-\alpha\eta\mu t,\alpha\sigma\upsilon\nu t))$

<u>Άρα</u> Για τυχαία Γ_2 με $(0,0)\in εσ\Gamma_2$ έχουμε $\oint_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot\vec{T}ds=2\pi$


Γ1
Γ2
D.I.T.

DO YOURSELF (Γ_1, Γ_2)



Γενικά: Έστω Γ καμπύλη του A, απλή + κλειστή C^1, λεία

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \begin{cases} 0, & (\alpha,\beta)\notin \varepsilon\sigma\Gamma, \\ c, & (\alpha,\beta)\in \varepsilon\sigma\Gamma, \quad c = \text{ανεξάρτητο της } \Gamma \end{cases}$$

$\vec{F}: A \to \mathbb{R}^2$ C^1

$(\alpha,\beta)\in\partial A$, $(\alpha,\beta)\notin A$ (=ανοικτό)

(II) Θ. Green (Κάθετη μορφή)

Υποθέσεις: $\vec{F}: A\ (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P,Q)$ C^1

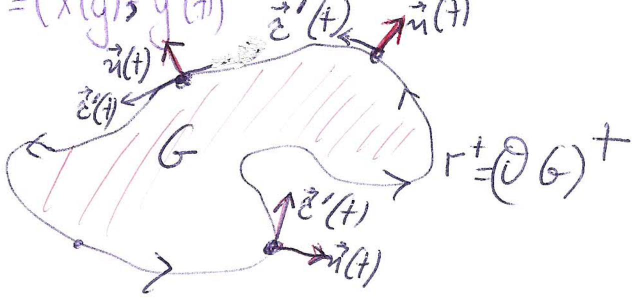
G = σύνολο Green, $G \subseteq A$

Τότε $$\oint_{\Gamma^+} (\vec{F}\cdot\vec{n})\, ds = \iint_G (\operatorname{div}\vec{F})\, dx\,dy, \quad \Gamma^+ = (\partial G)^+$$

όπου $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}\,'(t) = (x'(y), y'(t))$

$\vec{n}(t) = \dfrac{(y'(t), -x'(y))}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$ $(\perp \vec{\tau}\,'(t))$



=

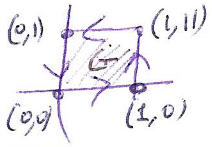
I = εξερχόμενη ροή δια μέσου της Γ

(αν το $\vec{n} \perp \Gamma$, $\vec{n}$ κοιτάει προς το εξωτ. της Γ)

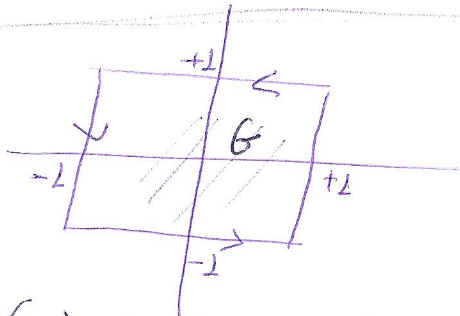
Ασκήσεις (Κάθετη μορφή Θ. Green)

3) Ροή του $\vec{F}(x,y)=xy\vec{i}+y^2\vec{j}$ δια μέσου του συνόρου του $G=[0,1]\times[0,1]$

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1 (y+2y)\,dx\right)dy=3/2$$



2)

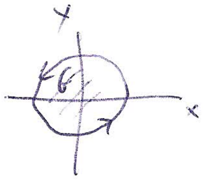


Ροή του $\vec{F}(x,y)=(x,y^2)$ δια μέσου του συνόρου του $G=[-1,+1]\times[-1,1]$

$$I=\iint_G (1+2y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{+1}\left(\int_{-1}^{+1}(1+2y)\,dx\right)dy=\dots=4$$

1) Επαληθεύστε την κάθετη μορφή του Θ. Green για

$\vec{F}(x,y)=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}$, $G=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$



$(\partial G)^+$: $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

$\vec{r}\,'(t)=(-\sin t,\cos t)$, $\vec{n}(t)=(\cos t,\sin t)$ $(\perp \vec{r}\,'(t),\ \|\vec{n}(t)\|=1)$

$$I_1=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{n}(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}(\cos t-\sin t,\cos t)\cdot(\cos t,\sin t)\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\pi$$

$$\boxed{I_1=\pi}$$

$$I_2=\iint_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy=\iint_G(1+0)\,dx\,dy=\iint_G 1\,dx\,dy=\text{εμβαδόν του } G=\pi$$

$$\boxed{I_2=\pi}$$

$I_1=I_2$! Επαληθεύσαμε το Θ. Green/Κάθετη μορφή.