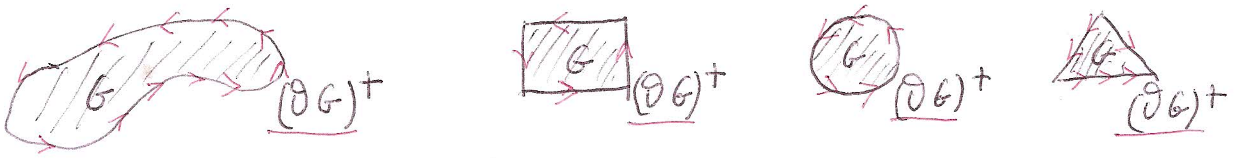
Μάθημα 23 (13-05)

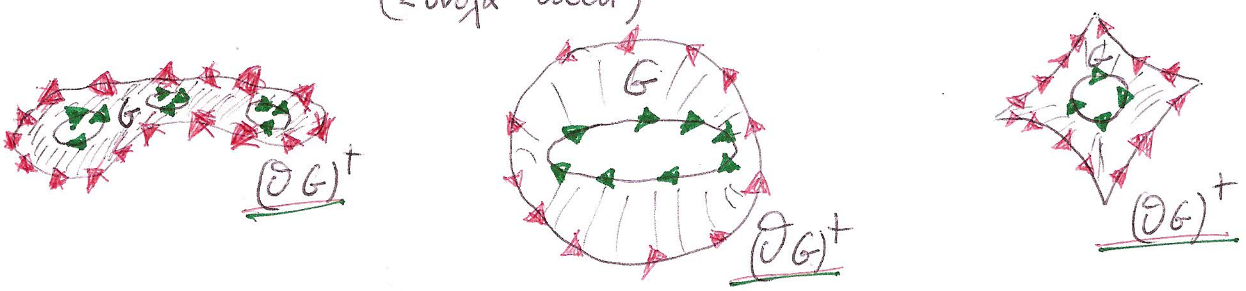
Θεωρήματα Green στον $\mathbb{R}^2$.

Τα Θ. Green αναφέρονται αποκλειστικά σε σύνολα στον $\mathbb{R}^2$ που το σύνορό τους είναι καμπύλη/καμπύλες: απλή, κλειστή, $C^1_{(\kappa.\tau.)}$, λεία $_{(\kappa.\tau.)}$

Και σε δ.π. $\vec{F}=(P,Q): A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ ώστε $G \subseteq A$, $\vec{F}$: C^1 συνάρτηση



(Σύνολα Green)



(Στοιχειώδη σύνολα Green)

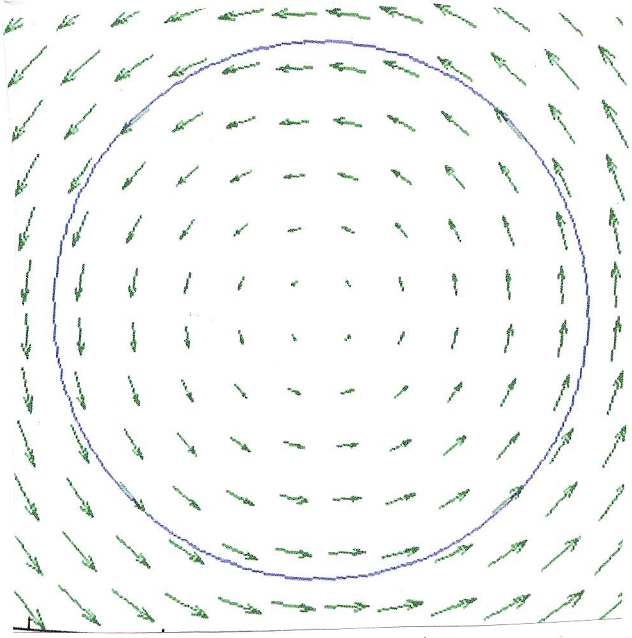
Προσανατολίζουμε το σύνορο ∂G θετικά: $(\partial G)^+$
(κινούμενοι πάνω στο $(\partial G)^+$, το G είναι στα αριστερά μας)

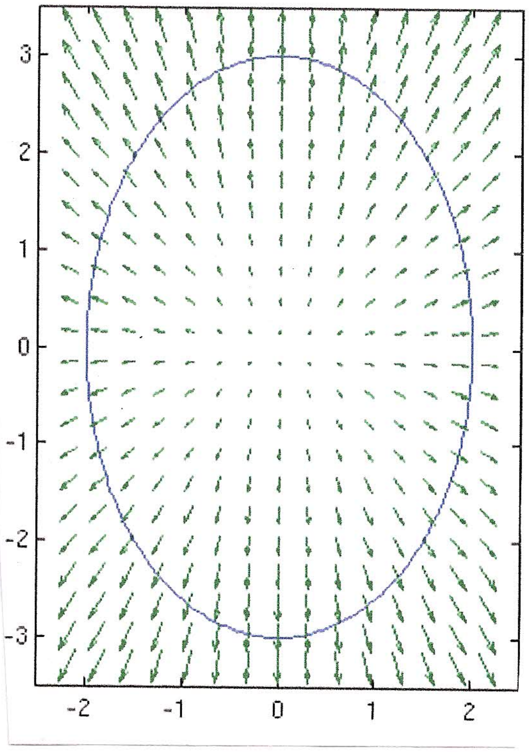
Το πρόβλημα

Εάν τοποθετήσουμε το G σε ρευστό του xy ($\vec{F}$), μπορούμε να υπολογίσουμε την Ροή* κατά μήκος του $(\partial G)^+$ ή την εξερχόμενη Ροή δια μέσου του $(\partial G)^+$ και να αναζητούμε σχέσεις που να τις συνδέουν με τον στροβιλισμό του $\vec{F}$ ή την απόκλιση του $\vec{F}$.

---

* Ροή ή Κυκλοφορία
Flux/Flow ή Circulation.





$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$

(I) Ροή κατά μήκος Γ : $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$ του $\vec{F}$:

$$I=\oint_\Gamma (\vec{F}\cdot\vec{T})\,ds, \quad \text{όπου } \vec{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}, \quad ds=\|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

(Μοναδιαίο εφαπτόμενο)

(II) Ροή δια μέσου της Γ : $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$ του $\vec{F}$:

$$J=\oint_\Gamma (\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds, \quad \text{όπου } \vec{n}(t)=\frac{(y'(t),-x'(t))}{\|\vec{r}\,'(t)\|}, \quad ds=\|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

(Μοναδιαίο κάθετο)

(I′) Στροβιλισμός της $\vec{F}$ στο (x,y) : $\operatorname{rot}\vec{F}=\operatorname{curl}\vec{F}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$ στο (x,y).

Η Ροή του $\operatorname{rot}\vec{F}$ δια μέσου της επιφανείας G είναι

$$I_\sigma=\iint_G (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{k}\,dS, \quad \text{όπου } dS=\|\vec{k}\|dxdy=dxdy$$

($\vec{k}=(0,0,1)$ είναι $\perp$ στην G που βρίσκεται στο xy-επίπεδο)

(II″) Απόκλιση της $\vec{F}$ στο (x,y) : $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ στο (x,y) και εκφράζει την πυκνότητα ροής του $\vec{F}$ στο (x,y).

Η Ροή του $\vec{F}$ στο σύνολο G είναι

$$I_d=\iint_G (\operatorname{div}\vec{F})\,dxdy.$$

Θ. Green (1828) (1793-1841)

Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^2$ στοιχειώδες σύνολο Green και $(\partial G)^+$ το σύνορό του θετικά προσανατολισμένο τότε

(I) $\oint_{(\partial G)^+} (\vec{F}\cdot\vec{T})\,ds = \iint_G (\mathrm{rot}\vec{F})\cdot\vec{k}\,dS$ (εφαπτομενική μορφή Green)

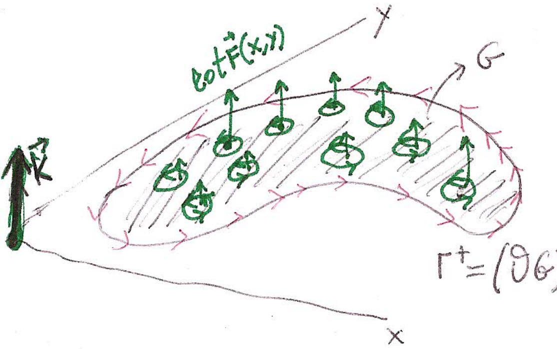
(II) $\oint_{(\partial G)^+} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds = \iint_G (\mathrm{div}\vec{F})\,dx\,dy$ (κάθετη μορφή Green)

Απλούστερα για $\partial G = \Gamma$, $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$ (Παρ. θετικά προσ. ως προς G)

(I) $\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

(II) $\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{n}(t)\,dt = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy$.

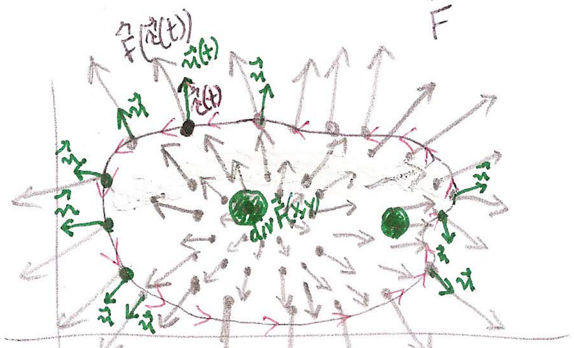
Σημείωση Το (I) του Green (G = επιφάνεια του xy-επιπέδου) γενικεύεται σε "καλές" επιφάνειες S του χώρου xyz, με το Θ. Stokes.
Το (II) του Green (G = σύνολο του xy-επιπέδου) γενικεύεται σε "καλά" σύνολα B του χώρου xyz, με το Θ. Gauss.



(I) Η ροή του $\vec{F}$ κατά μήκος της Γ^+

||

ροή του στροβιλισμού δια μέσου της G (επιφάνεια)



(II) Η ροή του $\vec{F}$ δια μέσου της Γ^+

||

"συνολική" ροή της $\vec{F}$ στο G