2. Φυλλάδιο Ασκήσεων

A Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(n\geq 1)$. Εξετάστε αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αν είναι αληθής να αποδειχθεί, αν είναι ψευδής να δοθεί αντιπαράδειγμα)

1) αν η f είναι συνεχής, τότε έχει μερικές παραγώγους.
2) αν η f έχει μερικές παραγώγους, τότε είναι συνεχής
3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ $(n=2)$
4) αν η f είναι συνεχής, τότε είναι διαφορίσιμη συνάρτηση.
5) αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε είναι συνεχής
6) αν η f έχει μερικές παραγώγους, τότε είναι διαφορίσιμη συνάρτηση $(n\geq 2)$
7) αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε έχει μερικές παραγώγους.
8) αν η f έχει παραγώγους ως προς κάθε κατεύθυνση, τότε είναι διαφορίσιμη συνάρτηση $(n\geq 2)$
9) αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε έχει παραγώγους ως προς κάθε κατεύθυνση.
10) αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε είναι διαφορίσιμη συνάρτηση (Χωρίς Αποδ
11) αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε έχει συνεχείς μερικές παραγώγους.

B

1) Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\vec{x}_0\in A$ με $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=0$. Αν υπάρχει $M>0$ ώστε $|g(\vec{x})|\leq M$ $\vec{x}\in A$, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\cdot g(\vec{x})=0$
2) Έστω $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Αποδείξτε ότι i) η f είναι φραγμένη συνάρτηση (π.χ $M=1$) και ii) δεν υπάρχει το όριό της στο $(0,0)$
3) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε οι i) f με $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,\text{ημ}(x+y)$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=\alpha$, ii) g με $g(x,y)=x\,\text{ημ}\dfrac{1}{x^2+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $g(0,0)=\beta$, να είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,0)$.
4) Αποδείξτε ότι οι i) $f(x,y)=\dfrac{x\,\text{ημ}\,y}{x^2+y^2}$, ii) $g(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$ δεν έχουν όριο στο $(0,0)$.

Γ

1) Να υπολογιστούν οι παράγωγοι 2ης τάξης της $f(x,y,z)=x\,\text{συν}(xy)+z\,\text{ημ}(x^2)+\text{τοξεφ}(e^{x^4}+zy)$
2) Να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ της $f(x,y)=xe^{\text{ημ}\,y}+\ln(x^2y^4+1)$
Τι παρατηρείτε;
3) Να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ της $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
Τι παρατηρείτε;
4) Να βρεθεί η σταθερά $k\in\mathbb{R}$ (αν υπάρχει) ώστε η $u(x,y)=\text{ημ}(x^2-3y)$ να ικανοποιεί την εξίσωση $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+kx^3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5) Αποδείξτε ότι η $z=xe^y+ye^x$ είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$$

Δ 1) Έστω i) $f(x,y)=x^2-\frac{1}{2}y^2-\text{τοξεφ}\,x$, ii) $g(x,y,z)=xyz+e^{x^2+z}$, iii) $h(x,y,z,w)=xyz+w^2$

iv) $\vec{\varphi}(x,y)=\left(\text{συν}(xy),\ \ln(x^2+10),\ \frac{1}{y^2+1}\right)$ είναι διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και υπολογίστε την γραμμικοποίησή τους στα $(\frac{\pi}{4},1)$, $(1,1,1)$, $(1,2,3,4)$, $(0,0)$ αντίσ

2) Εξετάστε αν οι
i) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$

ii) $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $g(0,0)=0$

iii) $\varphi(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $\varphi(0,0)=0$

iv) $\psi(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$, $\psi(0,0)=0$

v) $F(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $F(0,0)=0$

vi) $G(x,y)=(x^2+y^2)\,\text{ημ}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $G(0,0)=0$

έχουν μερικές παραγώγους και διαφορικό στο $(0,0)$.

Ε 1) Έστω ότι η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) (x,y,z σε μέτρα) του χώρου δίνεται από τον τύπο $T=75-2x^2+y^2-z^2$ (σε °C). Να ευρεθούν:

i) η παράγωγος της T στο $P(2,-1,1)$ κατά την κατεύθυνση $\vec{v}=(4,-3,12)$

ii) το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση, στην οποία η T έχει την μέγιστη μείωση στο P και τον ρυθμό μεταβολής της ελάττωσης της T.

2) Έστω η $f(x,y,z)=e^x\,\text{συν}(\pi yz)$. Να υπολογιστεί η παράγωγος κατά την κατεύθυνση $\vec{\alpha}$ της f στο $(0,1,\frac{1}{2})$, όπου $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο με την ευθεία της τομής των επιπέδων $x+y-z=5$, $4x-y-z=-2$.

Ζ 1) Έστω ότι η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) (x,y,z σε μέτρα) του χώρου δίνεται από τον τύπο $T=100-x^2+2xyz+yz^2$ (σε °C). Χρησιμοποιώντας Αλυσιδωτή Παραγώγιση υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής της T καθώς μια μέλισσα πετά πάνω στην γραμμή $\vec{\ell}(t)=(1+2t,\ 1+t,\ 2-3t)$ και ιδιαιτέρως για $t=0$.

2) Έστω $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι i) η $f(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$ ικανοποιεί την εξίσωση $xf_y-yf_x=0$ και ii) η $g(x,y)=\varphi(e^{xy})$ ικανοποιεί την εξίσωση $xg_x-yg_y=0$.

3) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και $u(x,y)=x^2f\left(\frac{y}{x}\right)$. Αποδείξτε ότι $xu_x+yu_y=2u$.

4) Έστω w C^1-συνάρτηση των μεταβλητών u,v. Κάνοντας αλλαγή των μεταβλητών $u=\alpha x+y$, $v=x+\beta y$ τότε η w μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση των x,y.

i) Υπολογίστε την $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ συναρτήσει των $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ και $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$

ii) Εάν για την w ισχύει $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}-3\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-4\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$ βρείτε τα α,β

η εξίσωση αυτή να απλοποιηθεί στην $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=0$

5) Έστω $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και $\vec{\alpha},\vec{b}\in A$ ώστε $[\vec{\alpha},\vec{b}]\subseteq A$ (A ανο
Αποδείξτε ότι υπάρχει $\vec{\xi} \in (\vec{\alpha},\vec{b})$, ώστε $f(\vec{b})-f(\vec{\alpha})=df(\vec{\xi})(\vec{b}-\vec{\alpha})$

6) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο με την ιδιότητα: αν $\vec{x},\vec{y}\in A$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\Pi=[\vec{x}=\vec{x}_0,\vec{x}_1]\cup[\vec{x}_1,\vec{x}_2]\cup[\vec{x}_2,\vec{x}_3]\cup\cdots\cup[\vec{x}_{n-1},\vec{x}_n=\vec{y}]$ που τα ενώνει και $\Pi\subseteq A$. Εάν $g,h:A\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις με $\nabla g=\nabla h$ αποδείξτε ότι $g=h+c$ (c=σταθερό)

$\boxed{H}$ 1) Έστω οι επιφάνειες $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z-9=0\}$, $S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x\,\text{συν}\,y-ye^x\}$. Να βρεθούν τα εφ. επίπεδα των S_1, S_2 στα $P_1(1,2,4)$, $P_2(0,0,0)$ αντίστοιχα και οι κάθετες ευθείες των S_1, S_2 στα αντίστοιχα σημεία.

2) Λέμε ότι μια καμπύλη εφάπτεται μιας επιφάνειας στο σημείο τομής αν το $\vec{r}'$ διάνυσμα ταχύτητας είναι ορθογώνιο στο ∇F εκεί.
Δείξτε ότι η καμπύλη $\vec{r}(t)=\sqrt{t}\,\vec{i}+\sqrt{t}\,\vec{j}+(2t-1)\vec{k}$ εφάπτεται της επιφάνειας $x^2+y^2=z+1$ για $t=1$.

3) Να ευρεθεί το σημείο της επιφάνειας $z=x^2-\frac{1}{2}y^2-\text{τοξεφ}\,x$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι κάθετο στο $(-3,16,2)$.

ΘΕΜΑΤΑ (2008-2009): Β 2), 3), 4), Γ 4), Δ 1), 2), Ε 1), 2)
Ζ 1), 2), 3), 4), 6) Η 1), 3).