2. Φυλλάδιο Ασκήσεων : ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β 2) Σελ. 46, Μ.7, Χειρ. Σημ., Ηλ. Τάξη.

3) i) $\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\le 1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \eta\mu(x+y)=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Συνεχής στο $(0,0)$ για $a=0$.

ii) $\left|\eta\mu\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$. Συνεχής στο $(0,0)$ για $b=0$.

4) i) Για $y=\lambda x$, $f(x,\lambda x)=\frac{1}{1+\lambda^2}\,\frac{\eta\mu(\lambda x)}{x}\xrightarrow{x\to 0}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Εξαρτάται από το λ. Άρα ισχύει το ζητούμ

ii) Σελ. 47, Μ 7, Χειρ. Σημ., Ηλ. Τάξη.

Γ 4) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,\sigma\upsilon\nu(x^2-3y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\sigma\upsilon\nu(x^2-3y)-4x^2\eta\mu(x^2-3y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-6x\,\eta\mu(x^2-3y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-3\sigma\upsilon\nu(x^2-3y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=9\eta\mu(x^2-3y)$. Αντικαθιστώντας έχουμε ότι $k=10$.

Δ. 1) i) $f_x=2x-\frac{1}{1+x^2}$, $f_y=-y$ Συνεχείς στον $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists\, df(x_0,y_0)$ για $\forall\,(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Γραμμικοποίηση στο $(\frac{\pi}{4},1)$, $L(x,y)=\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}-1\right)+\left(2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{4})^2}\right)(x-\frac{\pi}{4})+(-1)(y-1)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

ii) $g_x=yz+2xe^{x^2+z}$, $g_y=xz$, $g_z=xy+e^{x^2+z}$ Συνεχείς στον $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists\, dg(x_0,y_0,z_0)$ για $\forall\,(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$

Γραμμικοποίηση στο $(1,1,1)$, $L(x,y,z)=(1+e^{1^2+1})+(1+2e^2)(x-1)+1\cdot(y-1)+(1+e^2)(z-1)$

iii) $h_x=yz$, $h_y=xz$, $h_z=xy$, $h_w=10w^9$ Συνεχείς στον $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \exists\, dh(x_0,y_0,z_0,w_0)$ για $\forall$ $(x_0,y_0,z_0,w_0)\in\mathbb{R}^4$. Γραμμικοποίηση στο $(1,2,3,4)$

$L(x,y,z,w)=(6+4^{10})+6(x-1)+3(y-1)+2(z-3)+10\cdot 4^9(w-4)$, $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$

iv) $\varphi_1=\sigma\upsilon\nu\, xy$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=-y\eta\mu(xy)$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=-x\eta\mu(x,y)$ συνεχείς $\Rightarrow \exists\, d\varphi_1(x_0,y_0)$ για $\forall\,(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

$\varphi_2=\ln(x^2+10)$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+10}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0$ συνεχείς $\Rightarrow \exists\, d\varphi_2(x_0,y_0)$ για $\forall\,(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

$\varphi_3=\frac{1}{y^2+1}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}=\frac{-2y}{(y^2+1)^2}$ συνεχείς $\Rightarrow \exists\, d\varphi_3(x_0,y_0)$ για $\forall\,(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

Άρα $\exists\, d\vec{\varphi}(x_0,y_0)=(d\varphi_1(x_0,y_0), d\varphi_2(x_0,y_0), d\varphi_3(x_0,y_0))$.

Γραμμικοποίηση $\vec{L}(x,y)=(1,\ln 10,1)+\big((1(x-0)+0(y-0)),\ 0(x-0)+0(y-0),\ 1(x-0)+0(y-0)\big)$

$=(1,\ln 10,1)+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2) i) Σελ 75, Μ.11, Χειρ. Σημ., Ηλ. Τάξη

ii) Όμοια, βλ. Β4 ii)

iii) $\varphi_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(h,0)-\varphi(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{|h|}$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

$\varphi_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(0,h)-\varphi(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$.

Η φ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, διότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ μερική παράγωγος

iv) Σελ 76, Μ 11, Χειρ. Σημ., Ηλ. Τάξη

v) $F_x(0,0)=0=F_y(0,0)$, $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{F(h_1,h_2)-F(0,0)-\nabla F(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{h_1^2\cdot h_2^2}{h_1^2+h_2^2}=$

διότι: $\left|\dfrac{h_1^2\cdot h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right|\le h_1^2 \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0$. Άρα $\exists\ dF(0,0)(h_1,h_2)=\nabla F(0,0)\cdot(h_1,h_2)=0\cdot h_1+0h_2=0$

vi) Σχ. 77, Μ11, Χειρ. Σημ., Ηλ. Τάξη.

Ε 1) i) $T_x=-4x$, $T_y=2y$, $T_z=-2z$. Συνεχείς στον $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ η T είναι διαφορίσιμη. Άρα, $\vec{\alpha}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

$D_{\vec{\alpha}}T(2,-1,1)=\nabla T(2,-1,1)\cdot\left(\frac{4}{13},\frac{-3}{13},\frac{12}{13}\right)=(-8)\cdot\frac{4}{13}+(-2)\left(-\frac{3}{13}\right)+(-2)\cdot\frac{12}{13}=-\frac{60}{13}$

ii) $\vec{\alpha}=-\dfrac{\nabla T(2,-1,1)}{\|\nabla T(2,-1,1)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{72}}(8,2,2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

2) Το κάθετο στο $x+y-z=5$ το $\vec{N}_1=(1,1,-1)$, στο $4x-y-z=-2$ το $\vec{N}_2=(4,-1,-1)$.

$\vec{\alpha}=\dfrac{\vec{N}_1\times\vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\times\vec{N}_2\|}$ ή $\vec{b}=-\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}=\dfrac{(2,3,5)}{\sqrt{38}}$ (ή Τομή, $\vec{c}(x)=\left(x,\frac{3}{2}x+2,\frac{5}{2}x-3\right)\Rightarrow\vec{c}\,'(x)=\left(1,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $\vec{\alpha}=\vec{c}\,'/\|\vec{c}\,'\|$)

$f_x=e^x\sigma\upsilon\nu(\pi yz)$, $f_y=-e^x\pi z\,\eta\mu(\pi yz)$, $f_z=-e^x\pi y\,\eta\mu(\pi yz)$. Συνεχείς στον $\mathbb{R}^3\Rightarrow$ η f είναι διαφορίσιμη. Άρα $D_{\vec{\alpha}}f(0,1,\frac{1}{2})=\nabla f(0,1,\frac{1}{2})\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{38}},-\frac{3}{\sqrt{38}},-\frac{5}{\sqrt{38}}\right)=0\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{38}}\right)+$
$+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{38}}\right)+(-\pi)\left(-\frac{5}{\sqrt{38}}\right)=\pi\left(\frac{3}{2\sqrt{38}}+\frac{5}{\sqrt{38}}\right)$. $D_{\vec{b}}f(0,1,\frac{1}{2})=-D_{\vec{\alpha}}f(0,1,\frac{1}{2})$

Ζ. 1) $T,\vec{c}$ διαφορίσιμες (γιατί;) Άρα $\dfrac{d(T\circ\vec{c})(t)}{dt}=\nabla T(\vec{c}(t))\cdot\vec{c}\,'(t)=-4(1+2t)+4(1+t)(2-3t)+$
$+2(1+2t)(2-3t)+(2-3t)^2+(-3)2(1+2t)(1+t)+(-3)2(1+t)(2-3t)$, $\dfrac{dT\circ\vec{c}}{dt}(0)=-4$.

2) i) $\begin{array}{ccc}(x,y) & \xrightarrow{h} & t\\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow\varphi\\ & & \mathbb{R}\end{array}$, $h(x,y)=x^2+y^2$ διαφ., φ διαφ $\Rightarrow f_x=\varphi'\cdot\frac{\partial h}{\partial x}$, $f_y=\varphi'\frac{\partial h}{\partial y}\Rightarrow f_x=2x\varphi'$, $f_y=2y\varphi'$

Άρα $xf_y-yf_x=2xy\varphi'-2xy\varphi'=0$.

ii) $\begin{array}{ccc}(x,y) & \xrightarrow{h} & t\\ & {\scriptstyle g}\searrow & \downarrow\varphi\end{array}$, $h(x,y)=e^{xy}$ διαφ., φ διαφ $\Rightarrow g_x=\varphi' y e^{xy}$, $g_y=\varphi' x e^{xy}\Rightarrow xg_x-yg_y=0$

3) $\begin{array}{ccc}(x,y) & \xrightarrow{h} & t\\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow f\\ & \mathbb{R} & \end{array}$ $h(x,y)=\frac{y}{x}$ διαφορίσιμη, f διαφ $\Rightarrow F_x=f'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $F_y=f'\cdot\frac{1}{x}$ $(F=f\circ h)$

$u(x,y)=x^2F(x,y)\Rightarrow u_x=2xF+x^2F_x$, $u_y=x^2F_y$

Άρα $x\left[2xF+x^2\left(-\frac{y}{x^2}\right)f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]+y\left[x^2\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]=2x^2F(x,y)=2u(x,y)\Rightarrow xu_x+yu_y=2u$

4) i) $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial w}{\partial x}=\alpha\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}$ (w - C^1, από το Θ. Clairaut)

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\alpha\left[\dfrac{\partial w_u}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w_u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]+\left[\dfrac{\partial w_v}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w_v}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]\Rightarrow$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\alpha\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(\alpha b+1)\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+b\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$

ii) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=3\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+4\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}\overset{i)}{\Rightarrow}$ Πρέπει $(3\alpha+\alpha b+1)w_{uv}+(4\alpha+b)w_{vv}=0\Rightarrow 3\alpha+\alpha b+1=0$, $4\alpha+b$

$\Rightarrow(\alpha=1, b=-4)$ ή $\left(\alpha=-\frac{1}{4}, b=1\right)$

6) $f=g-h$ διαφ. Έστω τυχαία $\vec{x}_0,\vec{y}\in A$ ($\vec{x}_0$ σταθερό). Τότε υπάρχει πολ. γραμμή που ενώνει τα $\vec{x}_0,\vec{y}$. Τότε $f(\vec{x}_1)-f(\vec{x}_0)=df(\vec{\xi}_1)(\vec{x}_1-\vec{x}_0)=\nabla f(\vec{\xi}_1)\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=0$ (για κάποιο $\vec{\xi}_1\in(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$)

$f(\vec{x}_2)-f(\vec{x}_1)=\nabla f(\vec{\xi}_2)(\vec{x}_2-\vec{x}_1)=0,\ldots,f(\vec{y})-f(\vec{x}_{n-1})=\nabla f(\vec{\xi}_n)(\vec{y}-\vec{x}_{n-1})=0$. Άρα $f(\vec{y})=f(\vec{x}_0)$

Άρα $f(\vec{y})=f(\vec{x}_0)$ $\forall\, \vec{y}\in A$ δηλ. $g(\vec{y})-h(\vec{y})=c$ $\forall\, y\in A$, $g=h+c$.

Η 1) S_1 : Σελ 96, Μ.14, Χειρ. Σημ., H_1 Τάξη

S_2 : $F_2(x,y,z)=x\,\text{συν}\,y-ye^{x}-z=0$ (C^1), $\nabla F_2(0,0,0)=(1,-1,-1)$ $(\neq(0,0,0))$

Εφ. επίπεδο στο $(0,0,0)$: $\nabla F_2(0,0,0)\cdot(x-0,y-0,z-0)=0$, $x-y-z=0$.

Κάθετη ευθεία στην S_2 στο $(0,0,0)$: $\varepsilon_2(t)=(0,0,0)+t\nabla F_2(0,0,0)=(t,-t,-t)$, $t\in\mathbb{R}$

ή $x=t,\ y=-t,\ z=-t$, $t\in\mathbb{R}$

ή Τομή των επιπέδων : $y+x=0$, $y=z$.

3) $F(x,y,z)=x^2-\frac{1}{2}y^2-\text{τοξεφ}\,x-z=0$. Το $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=\left(2x_0-\frac{1}{1+x_0^2},-y_0,-1\right)$ είναι κάθετο στο εφ. επίπεδο της επιφάνειας, στο (x_0,y_0,z_0).

Πρέπει $\left(2x_0-\frac{1}{1+x_0^2},-y_0,-1\right)=\lambda(-3,16,2)$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα

$\lambda=-\frac{1}{2}$, $y_0=-8$, $x_0=1$. Τότε $z_0=1^2-\frac{1}{2}(-8)^2-\text{τοξεφ}\,1\Rightarrow z_0=-31-\frac{\pi}{4}$.

Άρα στο σημείο $\left(1,-8,-31-\frac{\pi}{4}\right)$ της επιφάνειας το κάθετο είναι το $(-3,16,2)$

Σημείωση : Οι τύποι και η θεωρία που χρησιμοποιήθηκαν υπάρχουν και στις Χειρ σημειώσεις

Μ = ΜΑΘΗΜΑ.

10 Απριλίου 2009