ΦΩΡΑΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ (ML SEQUENCE DETECTION)

Σε ένα δυαδικό σύστημα μερικής απόκρισης ισχύει:

$$y_m = a_m + a_{m-1} + v_m$$

Όπου η ακολουθία $\{\alpha_m\}$ είναι η ακολουθία πλατών ενός PAM που αντιστοιχεί στα δυαδικά δεδομένα $\{d_m\}$.

$$a_m = \begin{cases} A & \text{για } d_m = 1 \\ -A & \text{για } d_m = -1 \end{cases}$$

Η ανακατασκευή της $\{d_m\}$ από την $\{y_m\}$, αν γίνει σύμβολο προς σύμβολο παρουσιάζει τα προβλήματα που περιγράψαμε στα προηγούμενα.

Ένας πιο αποδοτικός τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε μια ακολουθία δειγμάτων του δέκτη $\{y_n\}=y_1,y_2,...,y_K$ μήκους K και να αναζητήσουμε τη βέλτιστη ακολουθία δυαδικών δεδομένων $\{d_n\}=d_1,d_2,...,d_K$ που για δεδομένη την $\{y_n\}$ θα δημιουργηθούν τα λιγότερα λάθη.

Έστω $$\mathbf{d}^{(\mu)} = \left(d_1^{(\mu)}, d_2^{(\mu)}, ..., d_K^{(\mu)}\right)^T, \mu = 1, 2, ..., Q = 2^K$$

είναι όλα τα δυνατά διανύσματα δεδομένων με Κ συνιστώσες εισόδου και έστω ότι αυτά είναι ισοπίθανα μεταξύ τους, και

$$\mathbf{b}^{(\mu)} = \left(b_1^{(\mu)}, b_2^{(\mu)}, ..., b_K^{(\mu)}\right)^T, \mu = 1, 2, ..., Q = 2^K$$

τα αντίστοιχα διανύσματα λήψης του δέκτη (για μηδενικό θόρυβο), και έστω

$$\mathbf{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_K\right)^T$$

το ενθόρυβο διάνυσμα λήψης στο δέκτη.

$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_K)$

με τα v_i iid Gaussian μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σ^2. Για δεδομένο το ενθόρυβο διάνυσμα λήψης **y** ζητείται το βέλτιστο διάνυσμα **b** που εξασφαλίζει ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος. Η βέλτιστη τιμή του **b**, έστω $\mathbf{b}^{(m)}$, πρέπει να εξασφαλίζει:

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(m)})>p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})$, για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu\neq m$.

Από $\mathbf{b}^{(m)}$ προσδιορίζεται αμέσως το αντίστοιχο $\mathbf{d}^{(m)}$.

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mathrm{m})})>p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu\neq m$.

$$p\left(\mathbf{y} \mid \mathbf{b}^{(\mu)}\right) = p\left(\left(y_1, y_2, ..., y_K\right)^T \mid \left(b_1^\mu, b_2^\mu, ..., b_K^\mu\right)^T\right)$$

$$p\left(\mathbf{y} \mid \mathbf{b}^{(\mu)}\right) = \prod_{\iota=1}^{K} p\left(y_i \mid b_i^\mu\right) = \\ = \prod_{\iota=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(y_i - b_i^\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^K e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\iota=1}^{K}\left(y_i - b_i^\mu\right)^2}$$

Θέτοντας

$$D\left(\mathbf{y}, \mathbf{b}^{(\mu)}\right) = \| \mathbf{y} - \mathbf{b}^{(\mu)} \|^2 = \sum_{\iota=1}^{K}\left(y_i - b_i^\mu\right)^2$$

$$p\left(\mathbf{y}\mid\mathbf{b}^{(\mu)}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{\mathrm{K}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}D\left(\mathbf{y},\mathbf{b}^{(\mu)}\right)}$$

Για τη σύγκριση

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(m)})>p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu\neq m$.

Ισοδύναμα:

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow \ln\{p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(m)})\}>\ln\{p(\mathbf{y}|\mathbf{b}^{(\mu)})\}$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu\neq m$.

Ισοδύναμα:

$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(m)} \Leftrightarrow D(\mathbf{y},\mathbf{b}^{(m)})< D(\mathbf{y},\mathbf{b}^{(\mu)})$ για όλα τα $\mu=1,2,\ldots,Q$ $\mu\neq m$.

Διπλοδυαδικό: Υποτίθεται ότι $d_0=0$ και A=1
Διάνυσμα Λήψης $y=(1.5, 0.5, -1.5)^T$

i	Data Sequence $d^{(i)T}$ i=1,2,…,8	Sample Sequence $b^{(i)T}$ i=1,2,…,8	Αποστάσεις $\|\|y- b^{(i)}\|\|^2$ i=1,…,8
1	000	-2 -2 -2	18.75
2	001	-2 -2 0	20.75
3	010	-2 0 0	14.75
4	011	-2 0 2	24.75
5	100	0 0 -2	2.75
6	101	0 0 0	4.75
7	110	0 2 0	6.75
8	111	0 2 2	16.75

➔ Η πλέον πιθανή λύση: Έχει αποσταλεί το $d=(1\ 0\ 0)^T$

Μεγάλη Πολυπλοκότητα!!

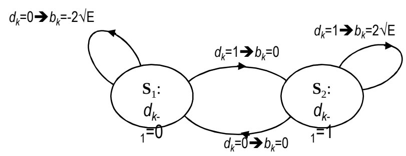
Αλγόριθμος Viterbi

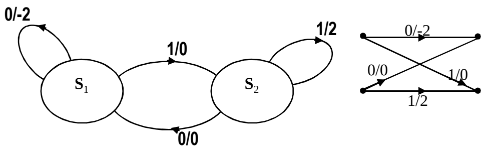
Στο Διπλοδυαδικό που έχουμε αναφέρει:

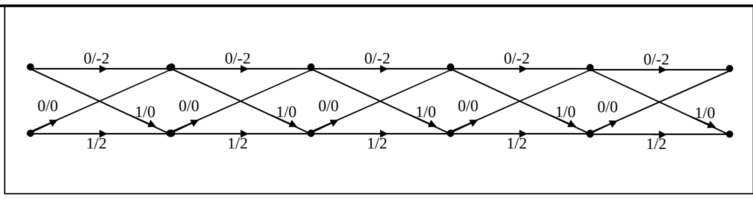
$$y_m = a_m + a_{m-1} + v_m$$

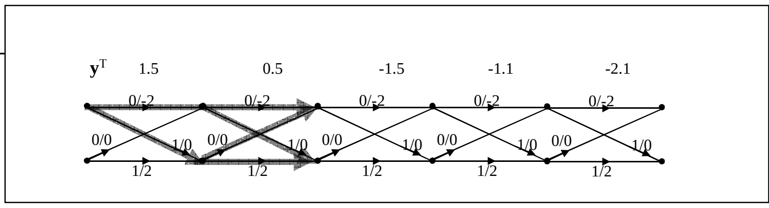
y=(1.5, 0.5, -1.5, -1.1, -2.1)^T

Να υπολογιστεί η πιο πιθανή ακολουθία (d_1,d_2,...,d_5)

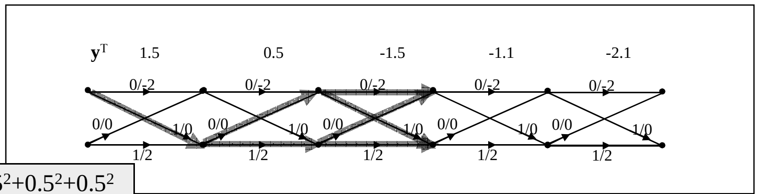




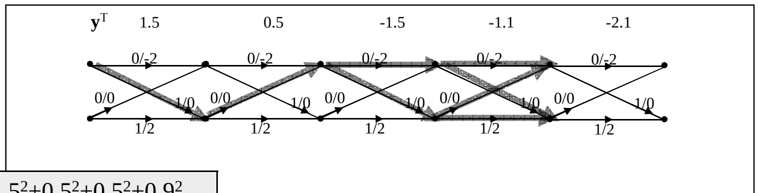




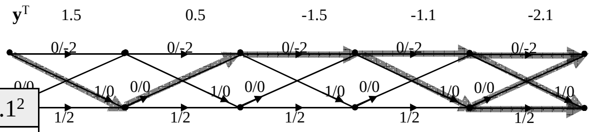
$\mu(0,0)=3.5^2+2.5^2$
$\mu(1,0)=1.5^2+0.5^2$
$\mu(0,1)=3.5^2+0.5^2$
$\mu(1,1)=1.5^2+1.5^2$



$\mu(1,0,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2$
$\mu(1,1,0)=1.5^2+1.5^2+1.5^2$
$\mu(1,0,1)=1.5^2+0.5^2+1.5^2$
$\mu(1,1,1)=1.5^2+1.5^2+3.5^2$



$\mu(1,0,0,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+0.9^2$
$\mu(1,0,1,0)=1.5^2+0.5^2+1.5^2+1.1^2$
$\mu(1,0,1,1)=1.5^2+0.5^2+1.5^2+3.1^2$
$\mu(1,0,0,1)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+1.1^2$

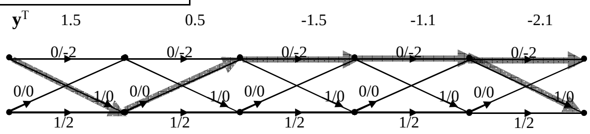


$\mu(1,0,0,0,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+0.9^2+0.1^2$

$\mu(1,0,0,1,0)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+1.1^2+2.1^2$

$\mu(1,0,0,0,1)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+0.9^2+2.1^2$

$\mu(1,0,0,1,1)=1.5^2+0.5^2+0.5^2+1.1^2+4.1^2$



Η πιο πιθανή ακολουθία που έχει σταλεί είναι: 1,0,0,0. Η θεωρία ορίζει ότι μόνο το πρώτο bit είναι σίγουρο ενώ τα υπόλοιπα πιθανόν να αλλάξουν με τις μελλοντικές τιμές του y.

Σημείωση: Ο αλγόριθμος προτείνει απάντηση μόνο για το d_1! Για να υπάρχει η απαιτούμενη βεβαιότητα για τις επόμενες τιμές d_2, d_3, d_4 έπρεπε να είχαμε άλλες τρεις τιμές του y_k, τις y_6, y_7, y_8 .

Για να αξιοποιήσουμε όσο γίνεται καλύτερα τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των στοιχείων της ακολουθίας λήψης $\{y_n\}$, η απόφασή μας (φώραση) για κάποιο δεδομένο d_k πρέπει να γίνεται αφού προηγουμένως προχωρήσει ο αλγόριθμος 5Λ βήματα (πεταλούδες) από τό αντίστοιχο στοιχείο λήψης. Το Λ είναι το μήκος εξαναγκασμού (constrained length), δηλαδή το πλήθος των στοιχείων της ακολουθίας λήψης που επηρεάζονται από το σύμβολο αυτό. Για παράδειγμα στα συστήματα μερικής απόκρισης Λ=1 και για να βγάλουμε απόφαση για τη τιμή του d_1 κανονικά πρέπει να προχωρήσουμε 5 βήματα (πεταλούδες) στο trellis από το y_1=1.5 του προηγούμενου παραδείγματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Σε ένα Σύστημα μερικής απόκρισης με 4 σύμβολα θα υπάρχουν 4 καταστάσεις, σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν 4 μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι 4 μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.
2. Σε ένα σύστημα δυαδικό με $y_m=a_m+0.5a_{m-1}+0.2a_{m+1}+n_m$ οι καταστάσεις της πηγής θα είναι 4, σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν 2 μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι 4 μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.
3. Σε ένα σύστημα 4δικό με $y_m=a_m+0.5a_{m-1}+0.2a_{m+1}+n_m$ οι καταστάσεις της πηγής θα είναι $4^2=16$, σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν 4 μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι 16 μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ (συνέχεια)

4.Σε ένα Σύστημα με M σύμβολα και μήκος ISI L θα υπάρχουν M^L καταστάσεις, σε κάθε κατάσταση θα φθάνουν M μονοπάτια και στο τέλος του κάθε βήματος θα επιζεί ένα μονοπάτι για κάθε κατάσταση, ήτοι M^L μονοπάτια θα εξελίσσονται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου.

Αν οι πιο πάνω παρατηρήσεις δεν σας φαίνονται προφανείς μη διστάσετε να φέρετε ερωτήσεις στο μάθημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η ύλη αυτού του PDF καλύπτεται από τις πιο κάτω παραγράφους του ¨ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ¨

$8.5.2 και 8.5.3