Ασυμπτωτική Προσέγγιση Μερικών Αθροισμάτων

- Όταν μία συνάρτηση είναι μονότονη, μπορούμε να φράξουμε το άθροισμά της από το ολοκλήρωμά της.
- Αν επιπλέον η συνάρτηση μεταβάλλεται αργά, τότε το άθροισμα και το ολοκλήρωμα έχουν την ίδια τάξη μεγέθους ασυμπτωτικά.

Ασυμπτωτική Προσέγγιση

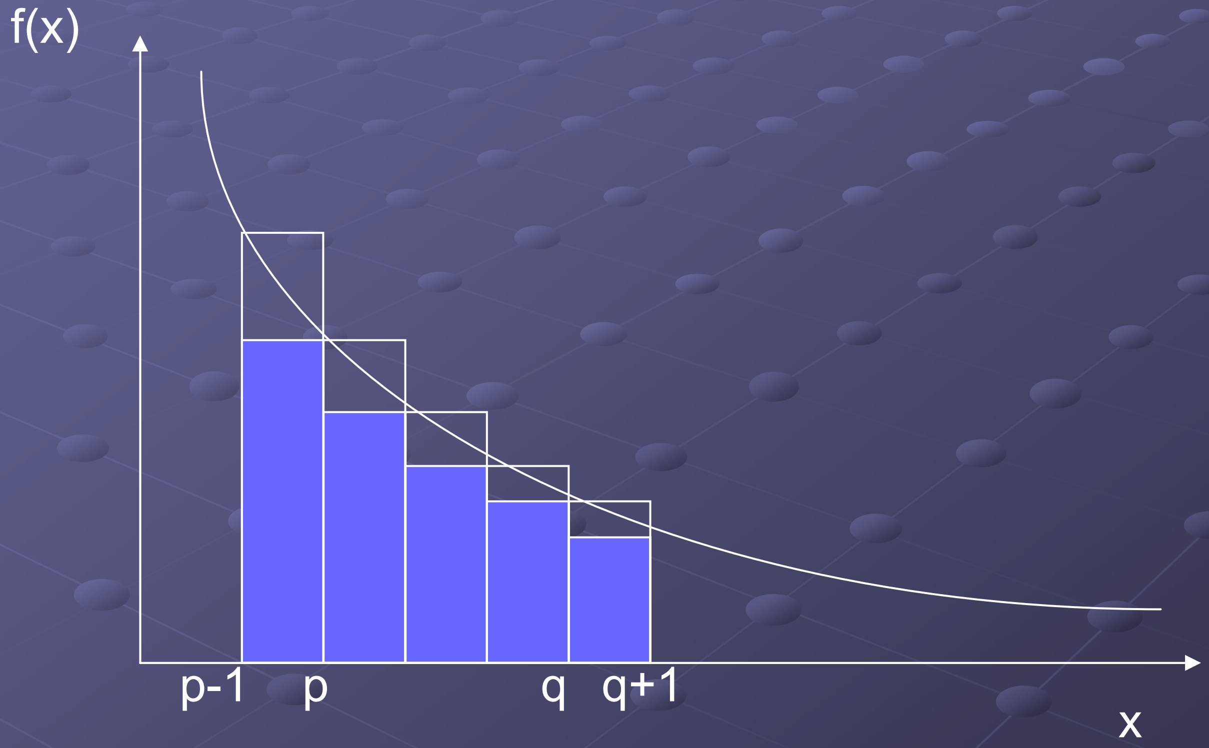
- Για κάθε μονότονη φθίνουσα συνάρτηση ισχύει:

$$\int_{p}^{q+1} f(x)dx \le \sum_{i=p}^{q} f(i) \le \int_{p-1}^{q} f(x)dx$$

- Για κάθε μονότονη αύξουσα συνάρτηση ισχύει:

$$\int_{p-1}^{q} f(x)dx \le \sum_{i=p}^{q} f(i) \le \int_{p}^{q+1} f(x)dx$$

Ασυμπτωτική Προσέγγιση Μερικών Αθροισμάτων



Ασυμπτωτική Προσέγγιση Μερικών Αθροισμάτων (H_n)

- Παρ. $H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, $H_n=\Theta(\log_2 n)$
- Εφαρμογή θεωρήματος
- αν $f(\chi)=\frac{1}{x}$ τότε $\int_2^{n+1}\frac{1}{x}dx \le \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \le \int_1^{n}\frac{1}{x}dx$
- Επομένως για τον n-ιοστό αρμονικό

$\ln(n+1)-\ln(2)+1\le H_n \le \ln(n)+1$, $H_n = \Theta(\log n)$