ΓΡΑΦΟΙ

- Προβλήματα που μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια γράφων

- Κωδικοποίηση Γράφων:
  - Πίνακας γειτνίασης
  - Λίστες γειτνίασης

Τυπική άποψη:

→ σύνολο σημείων (κόμβοι)

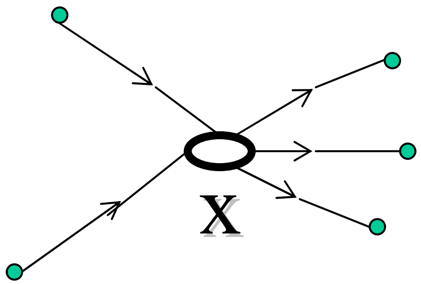
→ σύνολο πλευρών (τόξων) που συνδέουν τα ζευγάρια κόμβων

Ένας γράφος G=(X, A) δίνεται από ένα σύνολο κόμβων X και από ένα υποσύνολο A του καρτεσιανού γινομένου X×X

Ορισμοί

- Γράφος με βάρη ή αντισταθμισμένος γράφος: γράφος με βάρη πάνω στις πλευρές (τόξα).
- Βαθμός ενός κόμβου x

  d(x)=αριθμός πλευρών (τόξων) που προσπίπτουν στο x



d(x)=5

Άσκηση

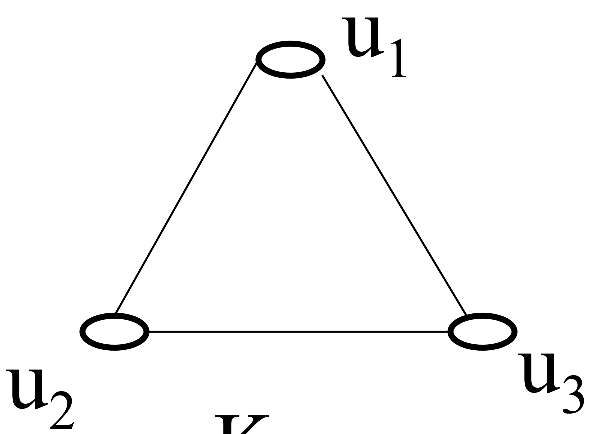
- Αθροισμα βαθμών d_i , i=1,2,…n

→ Ενός συμμετρικού γράφου τάξης n και πλήθος πλευρών m

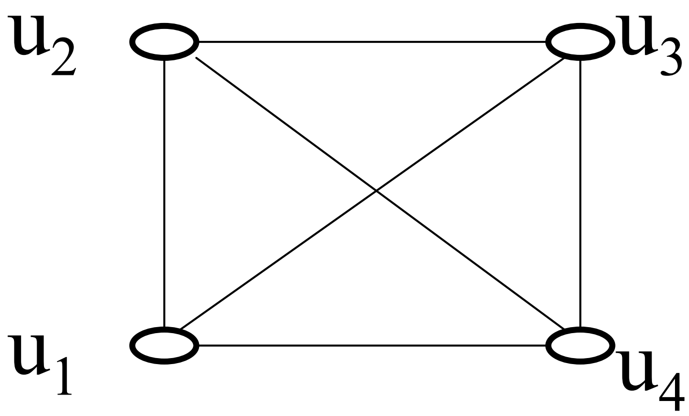
→ Ενός κατευθυνόμενου γράφου τάξης n και πλήθος πλευρών m

Ειδικοί γράφοι

πλήρης γράφος: Αν κάθε ζευγάρι κόμβων ενώνεται με μια πλευρά (κλίκα K_n για n κόμβους)



K_3

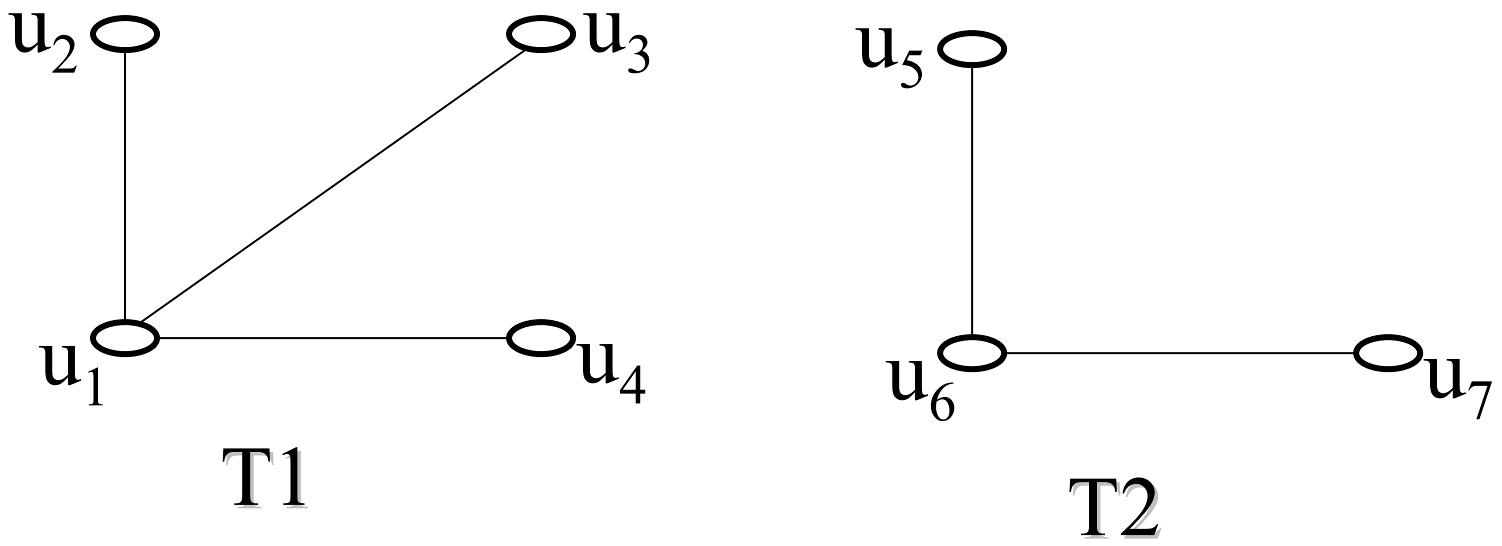


K_4

Δέντρα - Δάσος

→ δέντρο T, τάξης n: m = n-1= O(n)

→ Δάσος T=(T1, T2,...Tκ) με n κόμβους, m < n-1

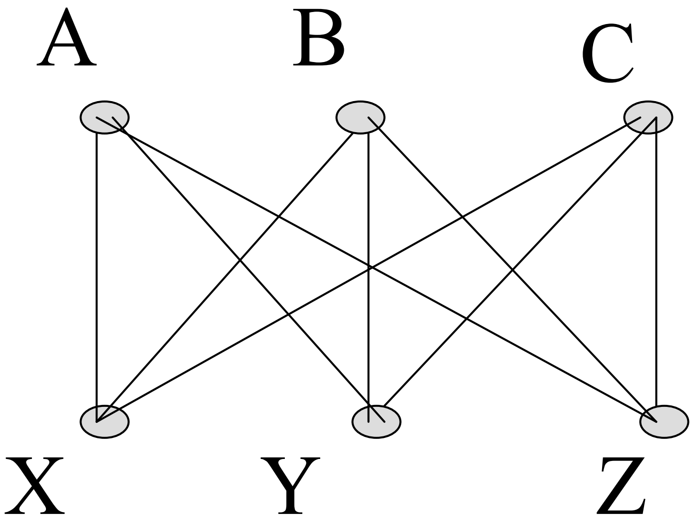


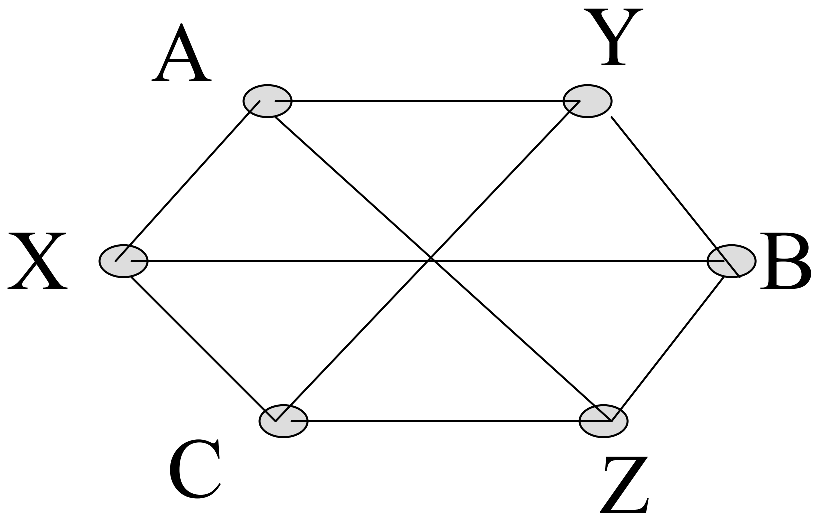
Ισομορφισμός γράφων

- διαφορετικά διαγράμματα μπορούν να αναπαριστούν την ίδια μαθηματική οντότητα !

$G_1=(V_1, E_1)$ ισόμορφος του $G_2=(V_2, E_2)$ αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f:V_1\rightarrow V_2$ έτσι ώστε:
$[f(x_1),f(x_2)]\in E_2 \Leftrightarrow [x_1, x_2]\in E_1$.

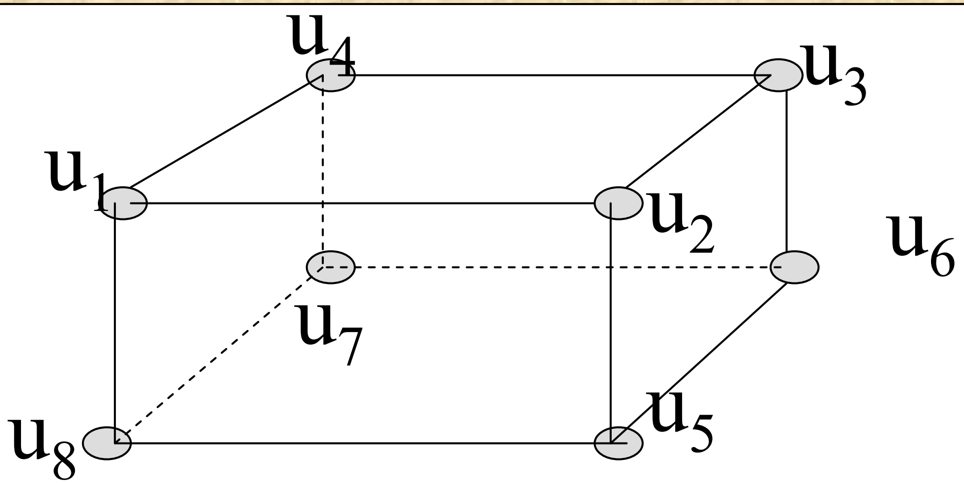
Παράδειγμα:





«ίδια πληροφορία»

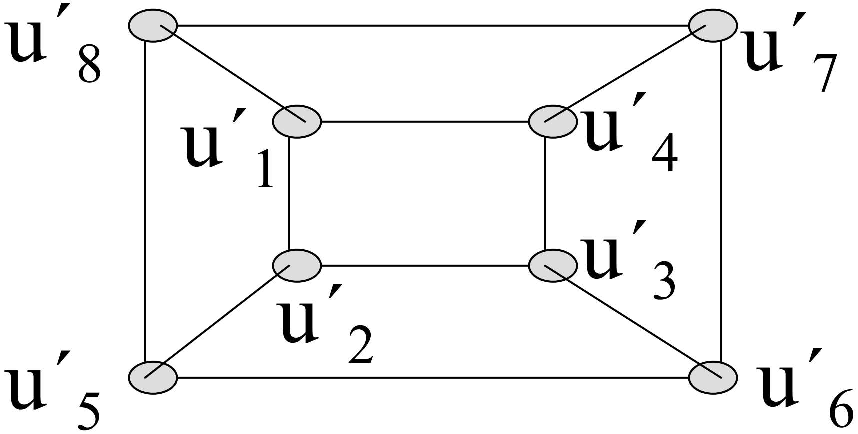
Ισομορφισμός γράφων



$G = (V,E)$

3-κανονικός

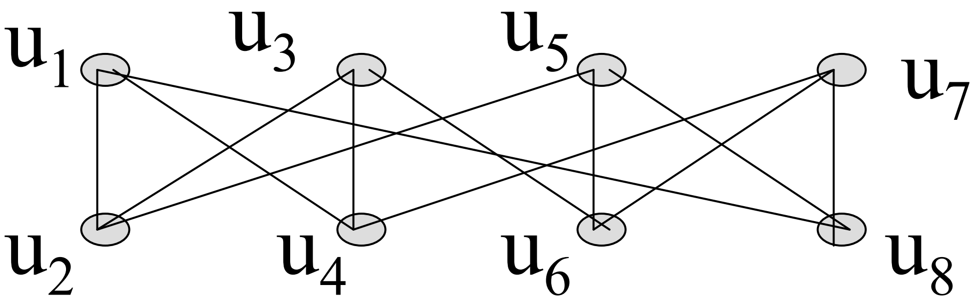
ισόμορφοι



$G' = (V',E')$

3-κανονικός

ισόμορφοι



$G'' = (V_1, V_2, E'')$

διμερής

Κωδικοποίηση γράφων

1) Πίνακας Γειτνίασης

$G=(X, A)$

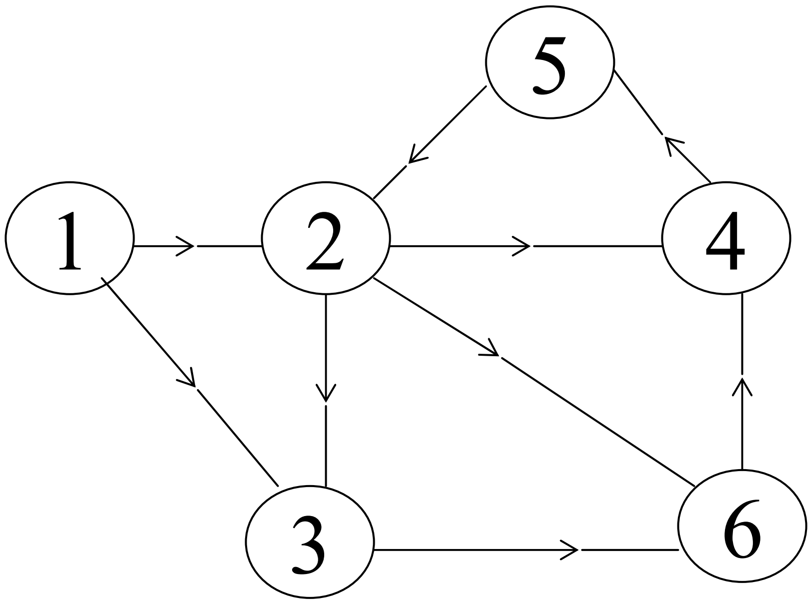
$X=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

M τετραγωνικός πίνακας n×n με στοιχεία:

$$M_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ αν } (x_i,x_j)\in A \\ 0 \text{ αν } (x_i,x_j)\notin A \end{cases}$$

Πίνακας Γειτνίασης

<u>Παράδειγμα:</u> $G=(X,A)$, $|X|=6$, $|A|=9$

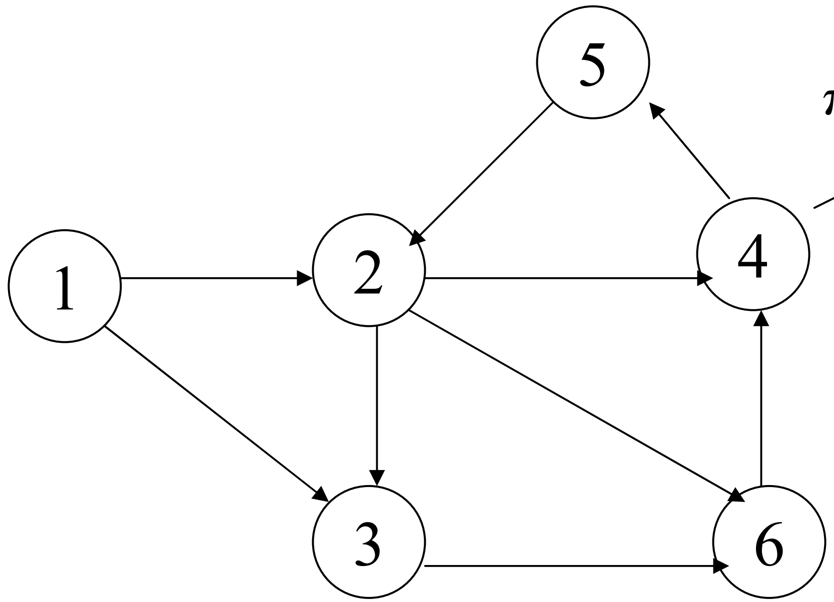


$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

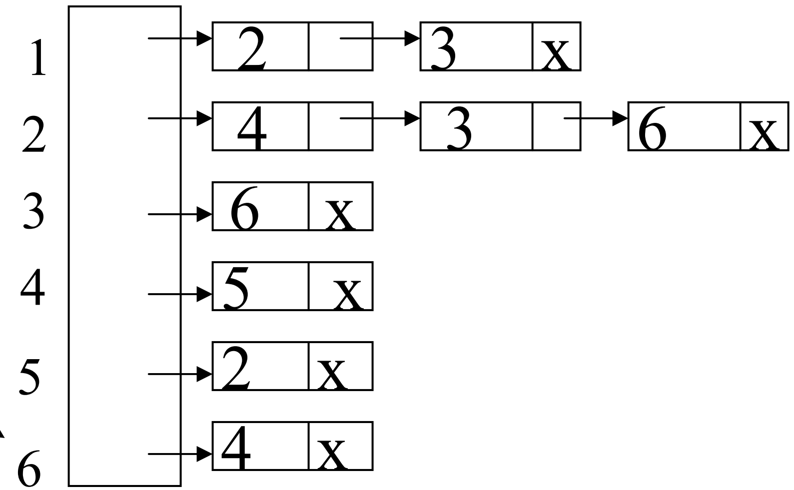
πίνακας γειτνίασης

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



πίνακας M_{ij}

λίστα διαδόχων



G=(X,A)

X={1,2,3,4,5,6}

|x|=n,|A|=m

2) λίστα γειτνίασης

Κωδικοποίηση γράφων

$G=(X,A,W)$

$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

3) Λίστες γειτνίασης με πίνακες

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
head	1	3	6	7	8	9	10

	1=κ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
succ	x_2	x_3	x_4	x_3	x_6	x_6	x_5	x_2	x_4	0

weight	w_{12}	w_{13}	w_{24}	w_{23}	w_{26}	w_{36}	w_{45}	w_{52}	w_{64}

<u>Επόμενοι κόμβοι του x_i</u>

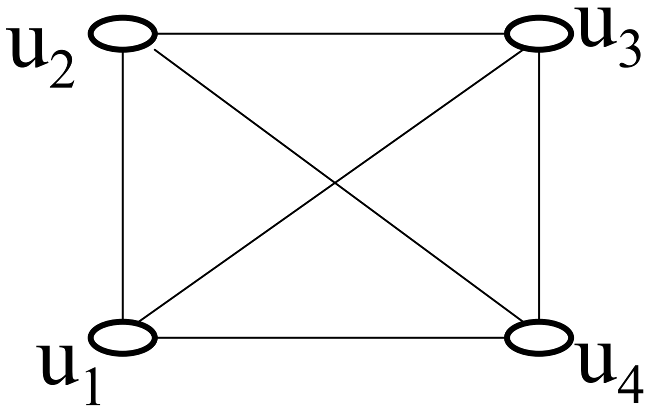
for k:=head[x_i] to head[x_{i+1}]-1

print(succ[k],w[k])

πυκνοί γράφοι – αραιοί γράφοι

Γράφος τάξης n με m πλευρές

→ πυκνοί γράφοι: m= O(n^2)

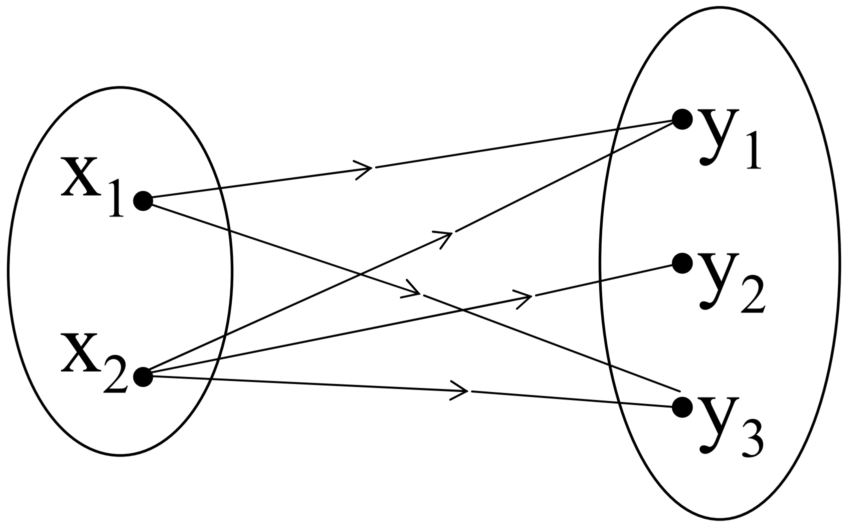


K_4

→ αραιοί γράφοι: m= O(n), d(u)=O(1) (κύκλοι: d(u)=2)

Διμερείς γράφοι

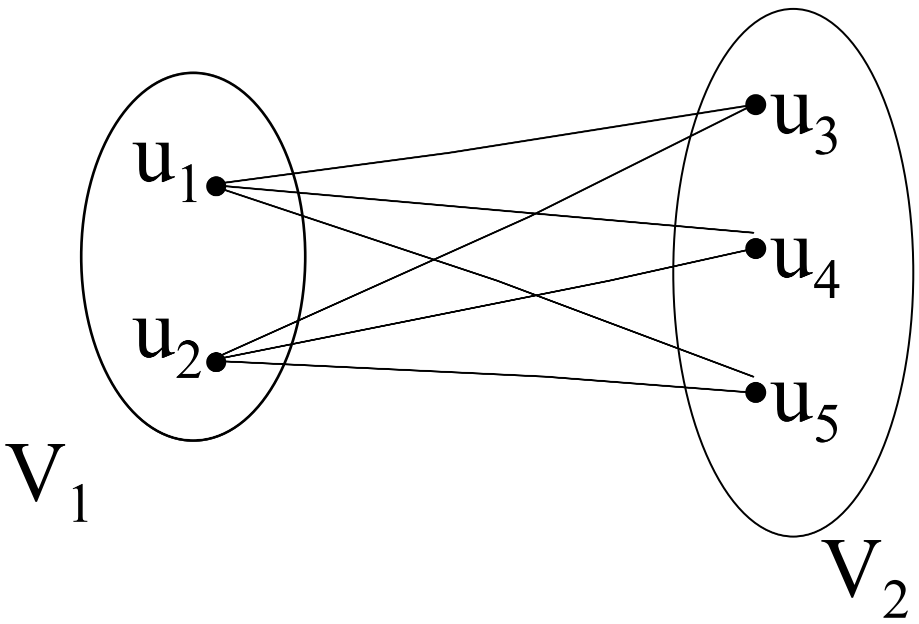
Αν μπορούμε να διαιρέσουμε τους κόμβους σε δυο υποσύνολα X_1 και X_2 έτσι ώστε $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cup X_2 = X$ και κάθε τόξο (πλευρά) έχει ένα άκρο στο X_1 και το άλλο στο X_2.

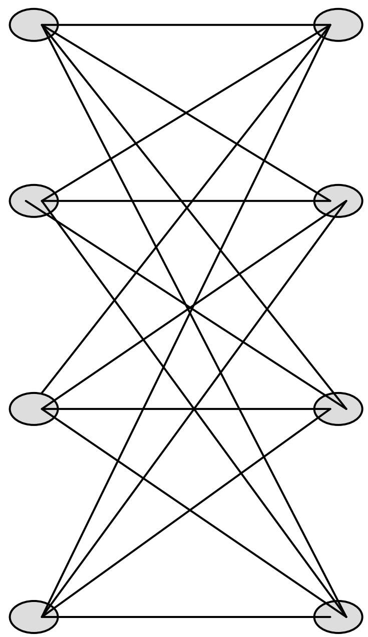


$G=(X_1, X_2, U)$

Διμερής πλήρης γράφος $G=(V_1, V_2, E)$

Αν $\forall u \in V_1$ έχουμε $d(u)=|V_2|$. Συμβολίζουμε $K_{a,b}$





$K_{4,4}$

Κανονικός γράφος $G=(V, E)$

Αν $\forall u \in V$ έχουμε $d(u)=\kappa$, $\kappa \in N$ και $\kappa \leq n-1$, όπου $n=|V|$.

Υπογράφοι

- Έστω G=(V,E) γράφος. Ένας γράφος G'=(V',E') με V'$\subseteq$V, E'$\subseteq$E είναι ένας υπογράφος του G.