

Προβλήματα βέλτιστων μονοπατιών

- Δρομολόγηση μιας οντότητας ανάμεσα σε δύο σημεία ενός δικτύου έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε ένα κόστος, μια διάρκεια, κτλ.

Εφαρμογές: Χρονοπρογραμματισμός
(διαχείριση εργασιών, προγραμμάτων,...)

Τύποι Προβλημάτων

- Κατευθυνόμενος γράφος με βάρη:

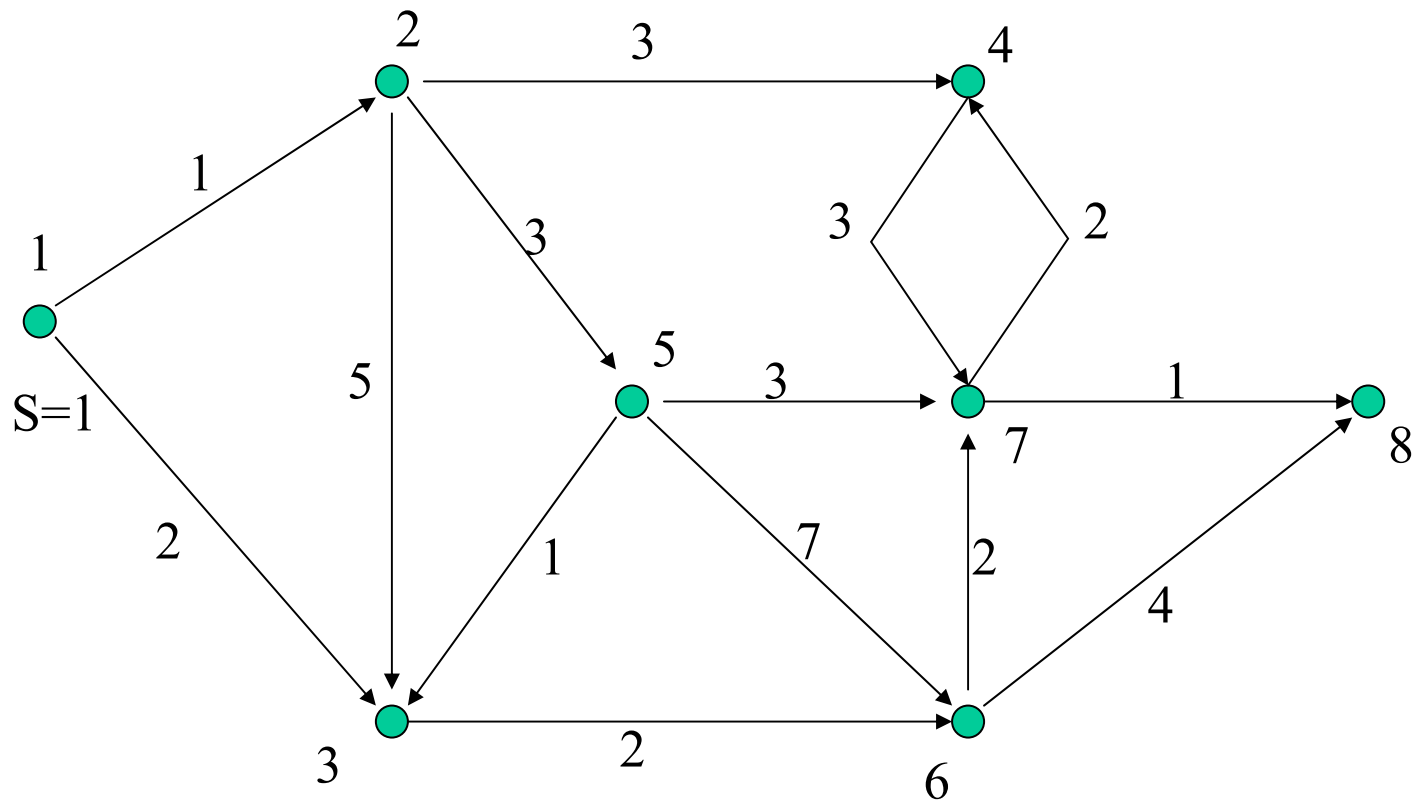
$$G = (X, A, W)$$

- X σύνολο n κόμβων
 - A σύνολο m τόξων
 - $W(i, j)$ κόστος τόξου (x_i, y_j)
- Κόστος ενός μονοπατιού ανάμεσα σε δύο κόμβους είναι το άθροισμα των κοστών των τόξων του.

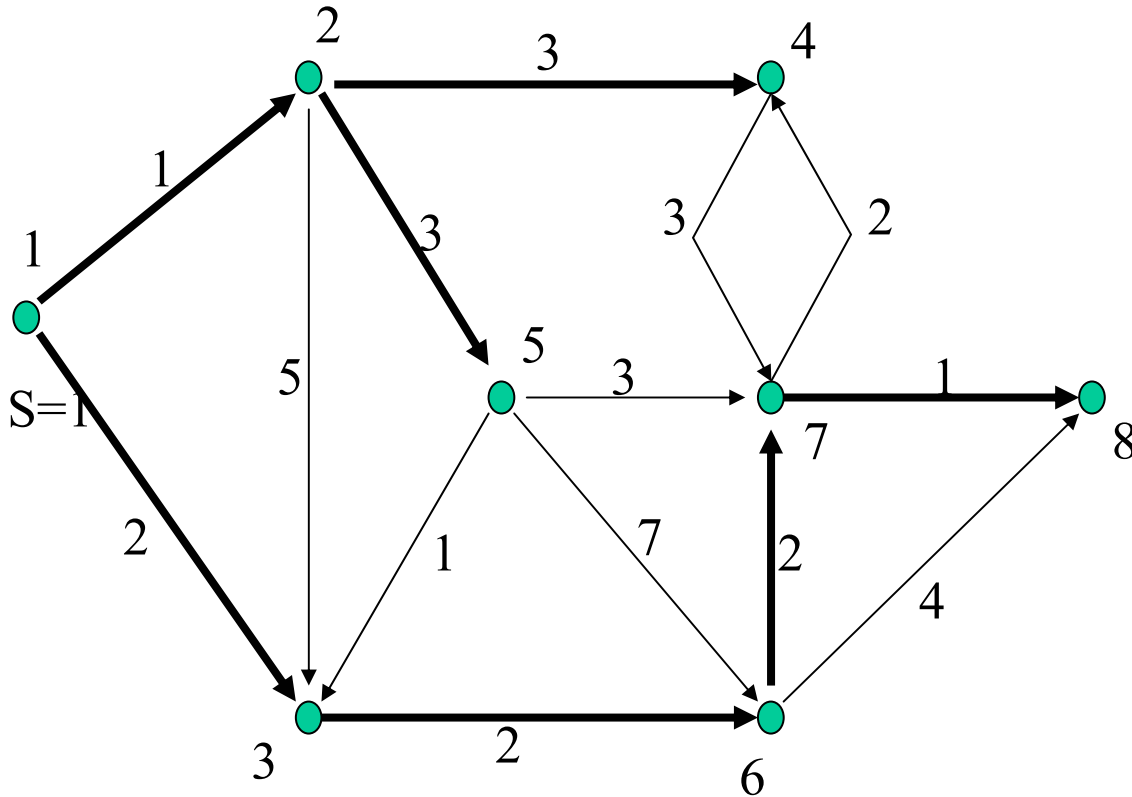
Τύποι Προβλημάτων

- **Πρόβλημα Α:** Δεδομένων δύο κόμβων s και t , να βρεθεί το συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο s προς τον κόμβο t .
- **Πρόβλημα Β:** Δεδομένου ενός κόμβου αφετηρίας s , να βρεθεί το συντομότερο μονοπάτι από το s προς κάθε άλλο κόμβο.
- **Πρόβλημα C:** Να βρεθεί το συντομότερο μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κόμβων.

Παράδειγμα: $G = (X, A)$



Κατευθυνόμενο δέντρο συντομότερων μονοπατιών



1 → 8 κόστος 7

1 → 6 κόστος 4

1 → 5 κόστος 4

1 → 4 κόστος 4

.

.

Αλγόριθμοι με οριστικοποίηση ετικετών (Greedy για πρόβλημα B)

- Για κάθε κόμβο $x : V[x]$, τιμή του συντομότερου μονοπατιού από τον κόμβο αφετηρία s προς τον κόμβο x .
- Διατήρηση για κάθε κόμβο x προσπελάσιμο ξεκινώντας από τον κόμβο $s : P[x]$.

Αλγόριθμος Dijkstra

- Γράφος $G=(X, A, w)$, $|X| = n$, $|A| = m$ και $w(i,j) \geq 0$
- Σε κάθε επανάληψη, ένας κόμβος x δέχεται την οριστική του ετικέτα (θα λέμε ότι είναι φιξαρισμένος). Ένας πίνακας $FIXE[]$ θα δείχνει τους φιξαρισμένους κόμβους.

Αλγόριθμος Dijkstra

- Αρχικοποίησε τον πίνακα V με ∞
- $---\#---$ P με 0
- $---\#---$ $FIXE$ σε $False$
- Θέσε $V[S] = 0$ και $P[S] = 1$

Repeat

$---$

$---$

Until $\{x | V[x] < \infty\} = \emptyset$

Αλγόριθμος Dijkstra

Repeat

Επέλεξε ένα κόμβο x **ΜΗ** φικαρισμένο και με **ελάχιστο** $V[x]$

ΑΝ υπάρχει x με $V[x] < \infty$ **ΤΟΤΕ**

Φίξαρε x

Για κάθε y **επόμενο** του x και **ΜΗ** φικαρισμένο

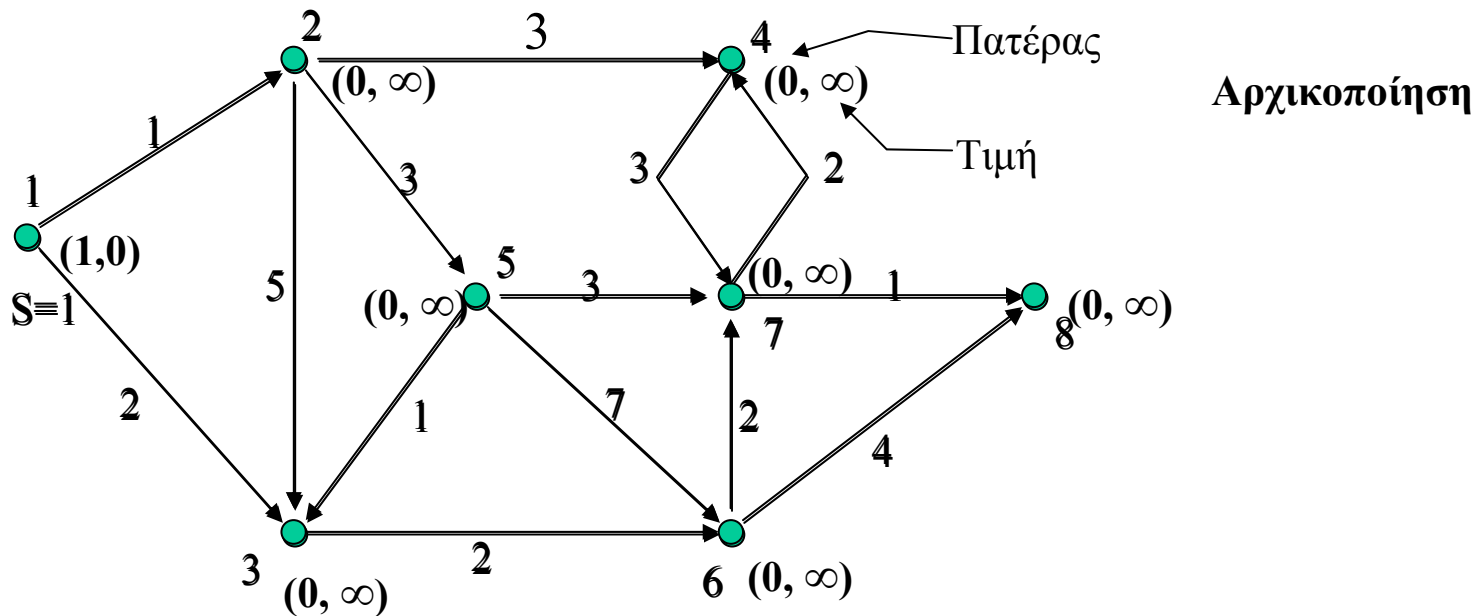
An $V[y] > V[x] + W(x, y)$

ΤΟΤΕ $V[y] = V[x] + W(x, y)$

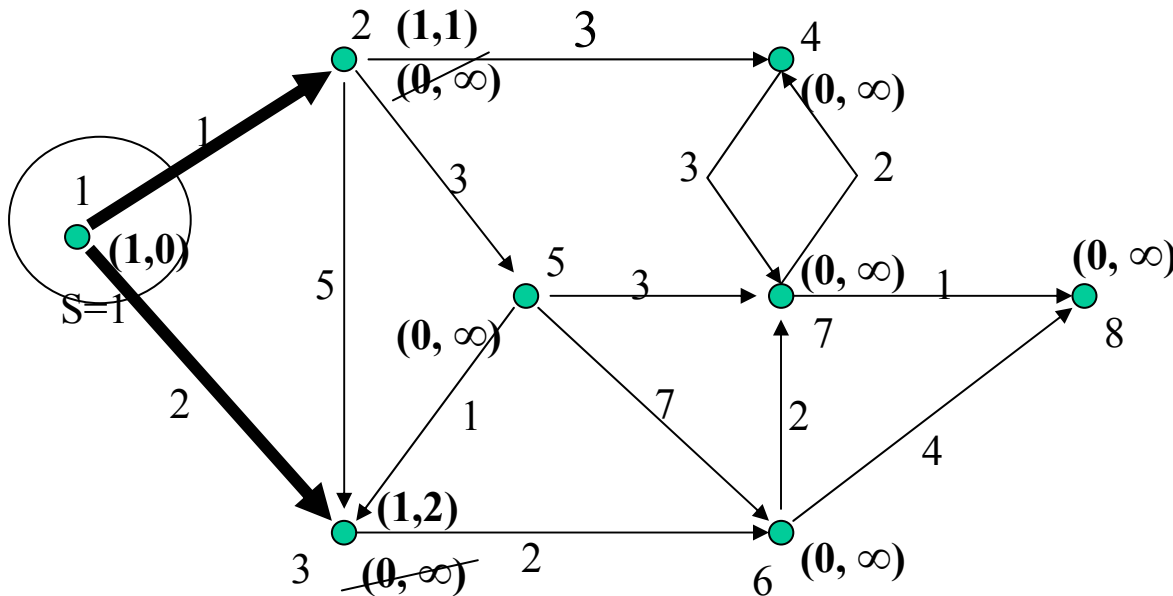
Θέσε $P[y] = x$ /*απομνημόνευσε
ότι ερχόμαστε στο y απο τον x */

Until $\{x | V[x] < \infty\} = \emptyset$

Αλγόριθμος Dijkstra: παράδειγμα



Αλγόριθμος Dijkstra

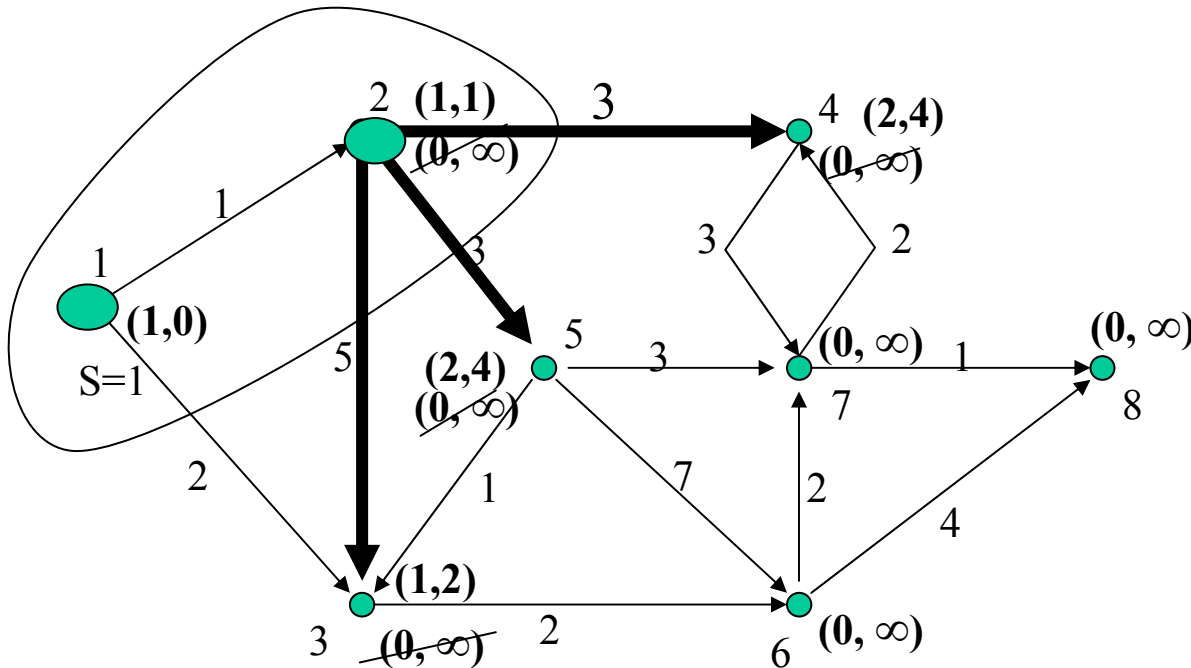


Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



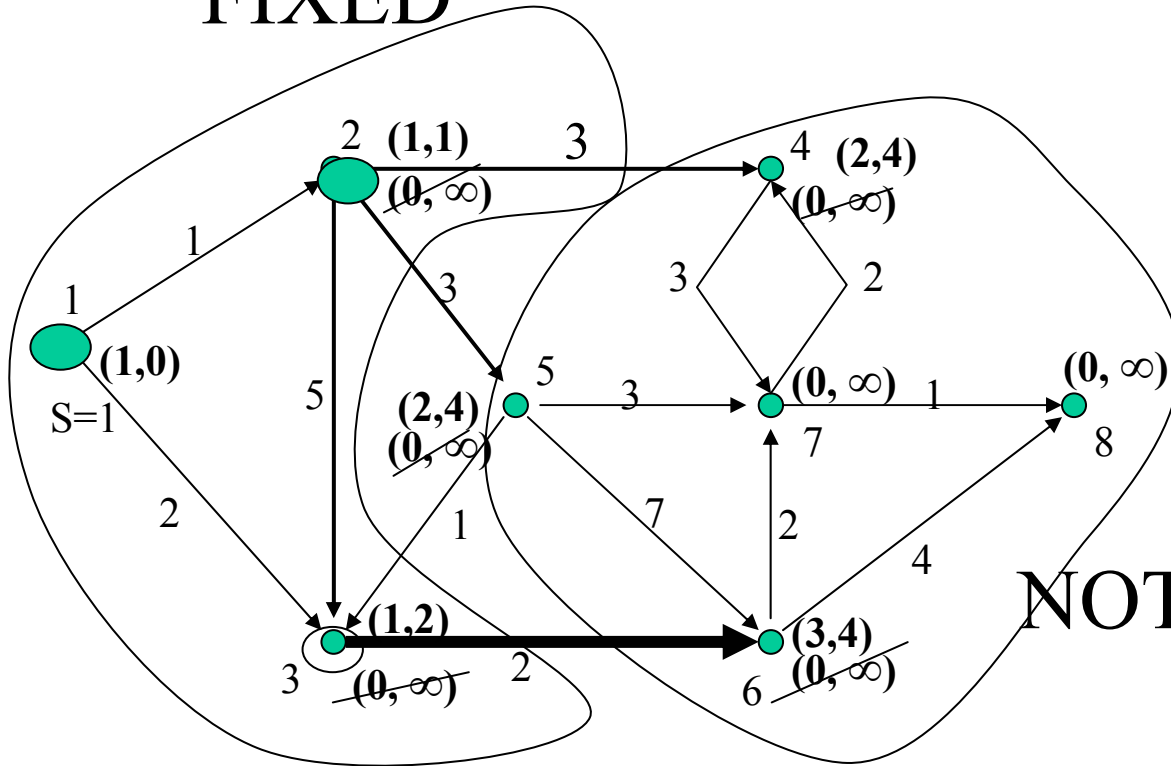
Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Αλγόριθμος Dijkstra

FIXED



Αρχικοποίηση

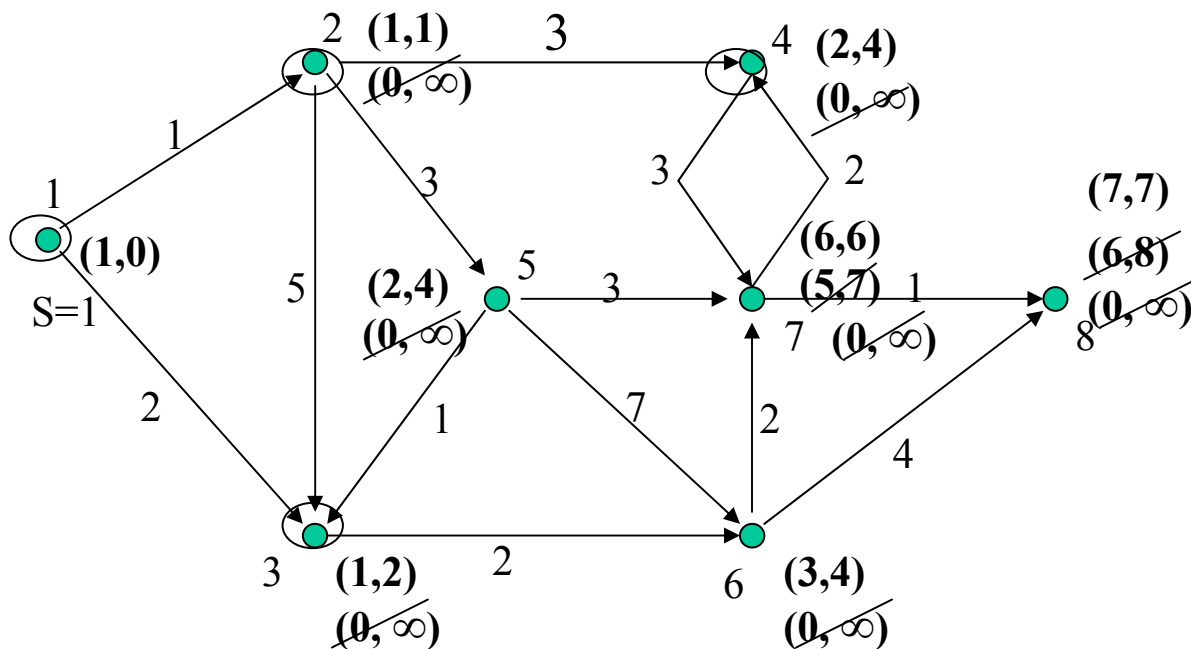
Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

NOT FIXED

Αλγόριθμος Dijkstra



Αρχικοποίηση

Βήμα 1 → επέλεξε κόμβο 1

Βήμα 2 → επέλεξε κόμβο 2

Βήμα 3 → επέλεξε κόμβο 3

Βήμα 4 → επέλεξε κόμβο 4

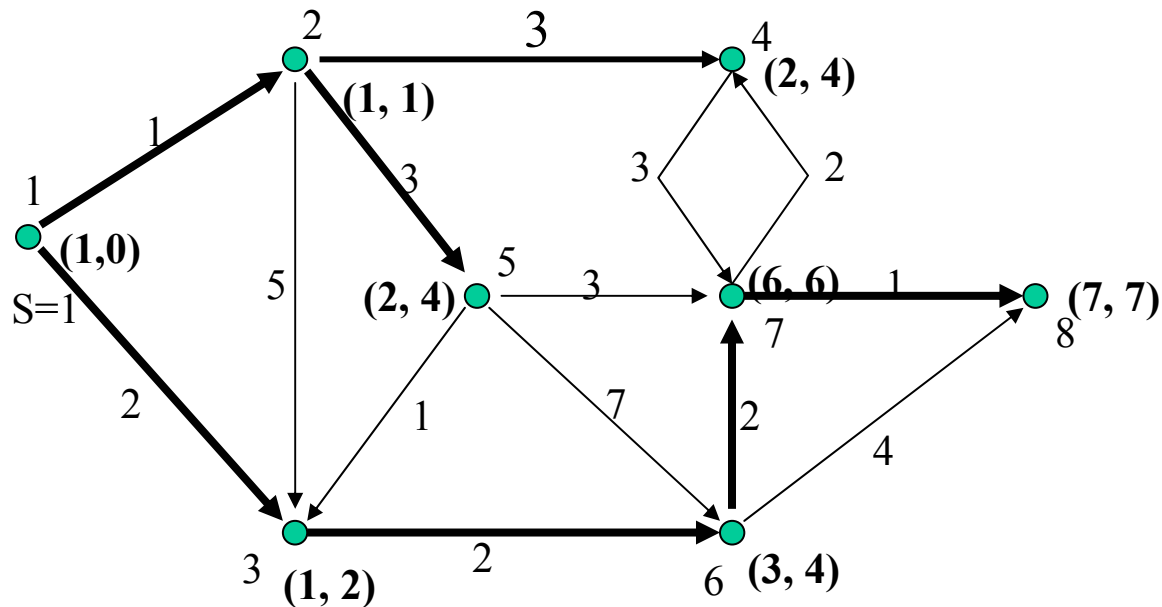
Βήμα 5 → επέλεξε κόμβο 5

Βήμα 6 → επέλεξε κόμβο 6

Βήμα 7 → επέλεξε κόμβο 7

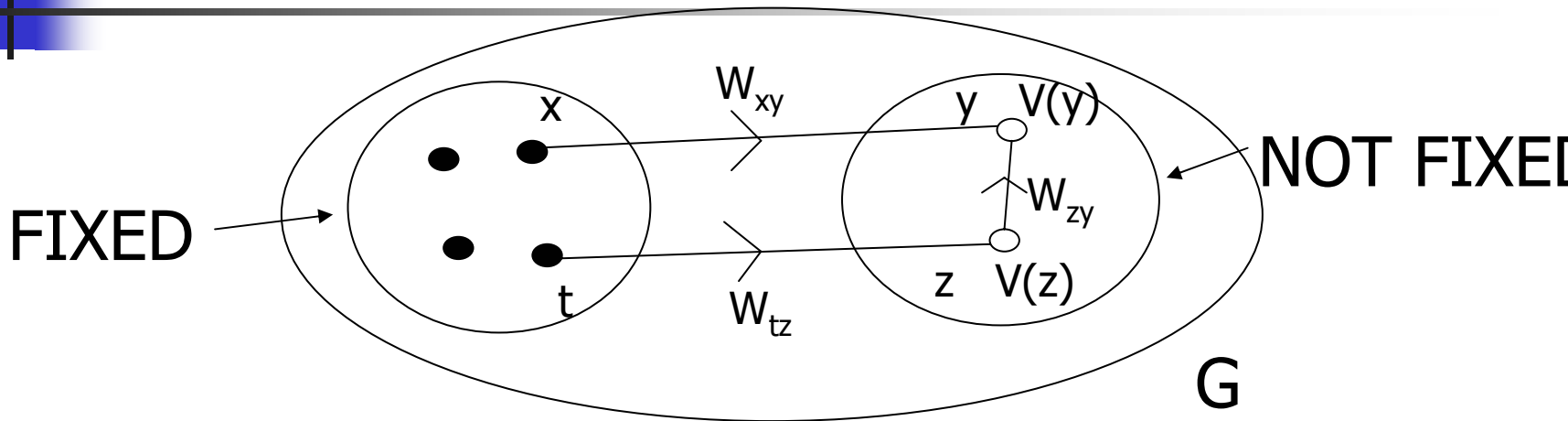
Βήμα 8 → επέλεξε κόμβο 8

Αλγόριθμος Dijkstra



Κατευθυνόμενο δέντρο ελάχιστων μονοπατιών

Ορθότητα αλγορίθμου Dijkstra



$$V[y] \leq V[z]$$

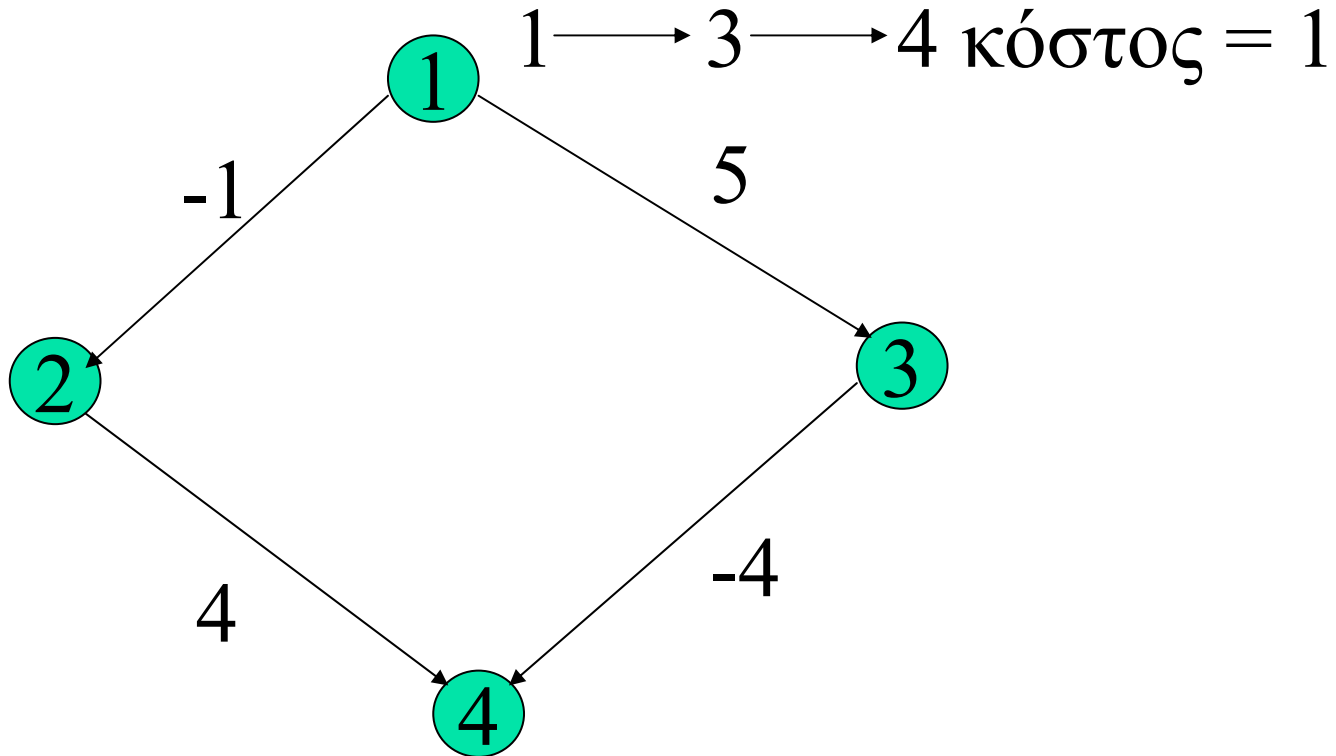
$$V[z] + W_{zy} < V[y] \leq V[z] \Rightarrow$$

$$W_{zy} \leq 0 \Rightarrow$$

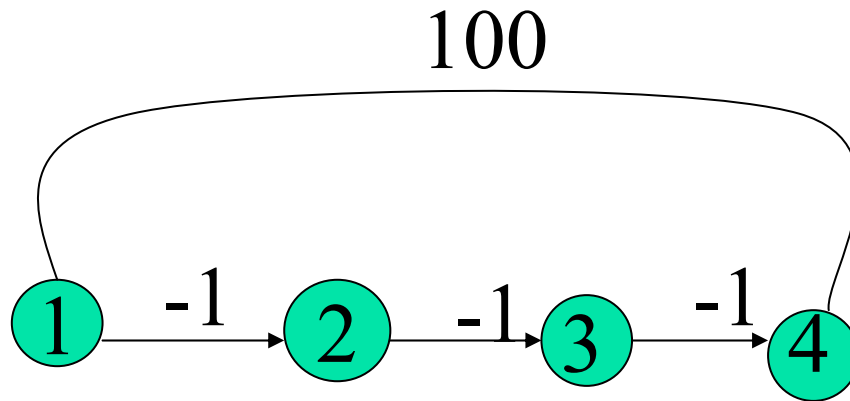
ΑΔΥΝΑΤΟ

Αρνητικά βάρη

1 → 2 → 4 κόστος = 3



Αρνητικά βάρη



Αρνητικά βάρη

