The master theorem

Υπενθύμιση

Μία συνάρτηση f(n) είναι πολυωνυμικά φραγμένη αν $f(n) = O(n^b)$ για κάποια σταθερά b.

Κάθε εκθετική συνάρτηση αυξάνεται γρηγορότερα από κάθε θετική πολυωνυμική συνάρτηση

Για a και b σταθερές με a > 1 ισχύει:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \;\rightarrow\; n^b = o(a^n)$$

f(n) πολυλογαριθμικά φραγμένη αν $f(n) = O(\log^b n)$ για κάποια σταθερά b

Κάθε θετική πολυωνυμική συνάρτηση αυξάνεται γρηγορότερα από κάθε πολυλογαριθμική συνάρτηση

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\lg^b n}{n^\alpha} = 0$$

$\lg^b n = o(n^\alpha)$, για οποιαδήποτε σταθερά $\alpha > 0$

Σύγκριση δυο συναρτήσεων (παραδείγματα)

1) $f(n) = \Theta(n)$

$g(n) = \Theta(n^2)$

$f(n) = \Theta(n^{2-\varepsilon})$, $\varepsilon=1$

Σύγκριση δυο συναρτήσεων (παραδείγματα)

2) $f(n)=\Theta(n\log n)$

$g(n) = O(n^{0.793})$

$f(n) = \Omega(n^{0.793+\varepsilon})$, $\varepsilon \approx 0.2$

Σύγκριση δυο συναρτήσεων (παραδείγματα)

3) $f(n)=\Theta(n\log n)$

$\log n \; ? \; n^{\varepsilon}$, $\varepsilon \approx 0.5$

$g(n) = \Theta(n)$

The master theorem

Υποθέσεις: $a \geq 1$, $b \geq 1$ σταθερές

$f(n)$, $n \geq 0$ integers

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$\frac{n}{b} = \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \text{ ή } \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$$

Πρώτη περίπτωση

- $f(n)$, $n^{\log_b a}$ σύγκριση των δυο συναρτήσεων
- κυριαρχία της $n^{\log_b a}$

η συνάρτηση $T(n)$ φράσσεται ασυμπτωτικά ως εξής:

1. Αν $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ για κάποιο $\varepsilon>0 \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$$T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n,\ a=9,\ b=3,\ f(n)=n$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$$

$$f(n) = O(n^{\log_3 9-\varepsilon}),\ \varepsilon=1$$

Δεύτερη περίπτωση

- $f(n)$, $n^{\log_b a}$ σύγκριση των δυο συναρτήσεων

η συνάρτηση $T(n)$ φράσσεται ασυμπτωτικά ως εξής:

2. Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1,\ a=1,\ b=\frac{3}{2},\ f(n)=1$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

Περίπτωση 2 $\rightarrow$ $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$

$\rightarrow$ $T(n) = \Theta(\log n)$

- $f(n)$, $n^{\log_b a}$ σύγκριση των δυο συναρτήσεων
- κυριαρχεί η $f(n)$

η $T(n)$ φράσσεται ασυμπτωτικά ως εξής:

3. Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ για κάποιο ε>0 και

αν $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$

για κάποια σταθερά $c<1$ και για όλα τα n αρκούντως μεγάλα
$\rightarrow$ $T(n) = \Theta(f(n))$

3) $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n\log n$, $a=3$, $b=4$, $f(n)=n\log n$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$$

$$f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon}),\ \varepsilon \approx 0.2$$

Περίπτωση 3 $\rightarrow$ μεγάλα n:

$$af(\frac{n}{b}) = 3(\frac{n}{4})\log(\frac{n}{4}) \leq \frac{3}{4} n\log n = cf(n),\ c= \frac{3}{4}$$

$\rightarrow$ $T(n) = \Theta(n\log n)$

καμμία περίπτωση!!!

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log n,\ a=2,\ b=2,\ f(n)=n\log n$$

$$n^{\log_b a} = n,\ f(n) = n\log n > n^{\log_b a} = n$$

Όχι πολυωνυμικά μεγαλύτερη

$$\frac{f(n)}{n} = \frac{n\log n}{n} = \log n$$

logn ασυμπτωτικά < n^{ε} για κάθε θετική σταθερά ε
Αρα T(n) μεταξύ 2 και 3 !!!!

$\lg n + \kappa = (\lg n) + k$

$\lg(n) = \log_2(n)$ (δυαδικός λογάριθμος)

$\ln(n) = \log_e(n)$ (φυσικός λογάριθμος)

$\lg^k n = (\lg n)^k$ (εκθετικό)

$\lg\lg n = \lg(\lg n)$ (σύνθεση)

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a>0, b>0, c>0:

$$a = b^{\log_b a}$$

$$n = 2^{\log_2 n}$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_b a^n = n\log_b a$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_b \frac{1}{a} = -\log_b a$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$