

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

N. M. Μισυρλής

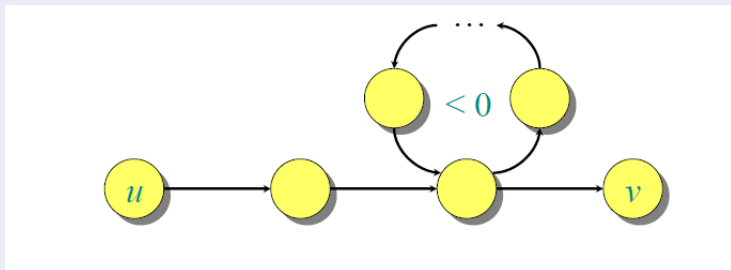
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εύρεση Ελάχιστου Μονοπατιού

- Αλγόριθμος Bellman-Ford
- Γραμμικός Προγραμματισμός (linear programming) και περιορισμοί
- διάταξη VLSI

Κύκλοι Αρνητικού Βάρους

- Επιλύει το πρόβλημα στην περίπτωση που οι ακμές ενδέχεται να έχουν αρνητικά βάρη.
- Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει ένας κύκλο αρνητικού βάρους, τότε πιθανώς να μην υπάρχουν κάποια ελάχιστα μονοπάτια.
- Παράδειγμα:



- Αλγόριθμος Bellman-Ford: Βρίσκει όλα τα ελάχιστα μονοπάτια από μια πηγή $s \in V$ προς όλες τις κορυφές $v \in V$ ή αποφασίζει αν υπάρχει κύκλος αρνητικού βάρους.

$d[s] \leftarrow 0$
για κάθε $v \in V - \{s\}$
 $d[v] \leftarrow \infty$ } αρχικοποίηση

για $i \leftarrow 1$ έως $|V| - 1$
για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

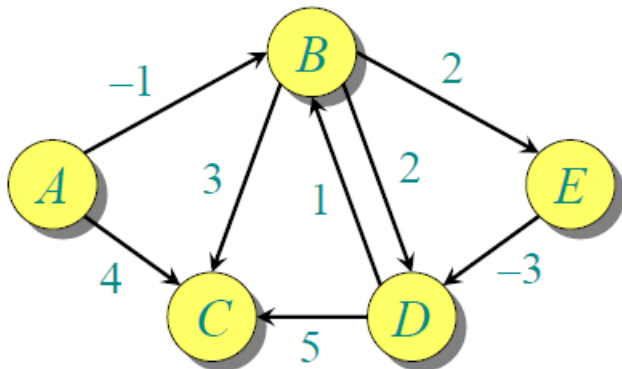
αν $d[v] > d[u] + w(u, v)$
τότε $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

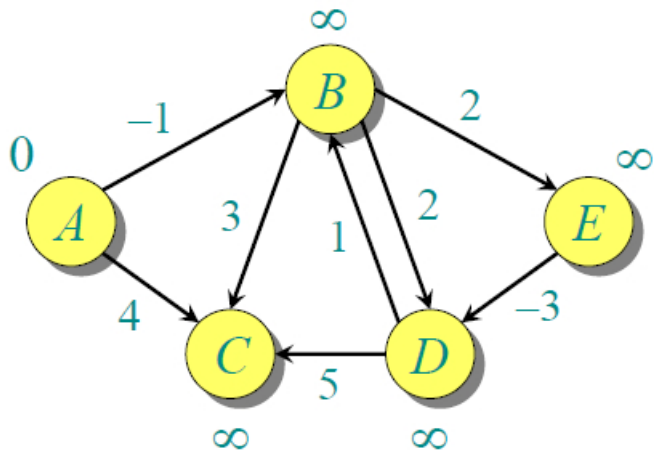
για κάθε ακμή $(u, v) \in E$
αν $d[v] > d[u] + w(u, v)$
τότε υπάρχει κύκλος αρνητικού βάρους
επιστροφή ψευδές

Επιστροφή αληθές

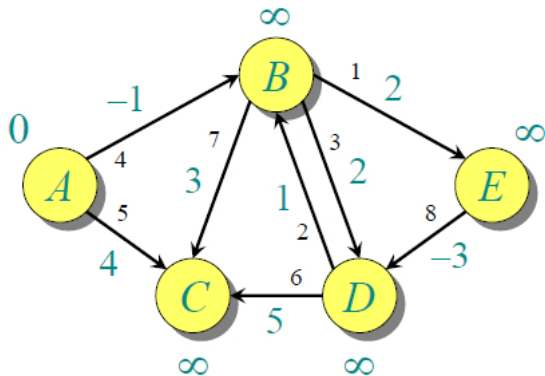
- $d[v] = \delta(s, v)$, αν δεν υπάρχουν αρνητικού βάρους κύκλοι
- χρόνος: $O(VE)$

Παράδειγμα Bellman-Ford



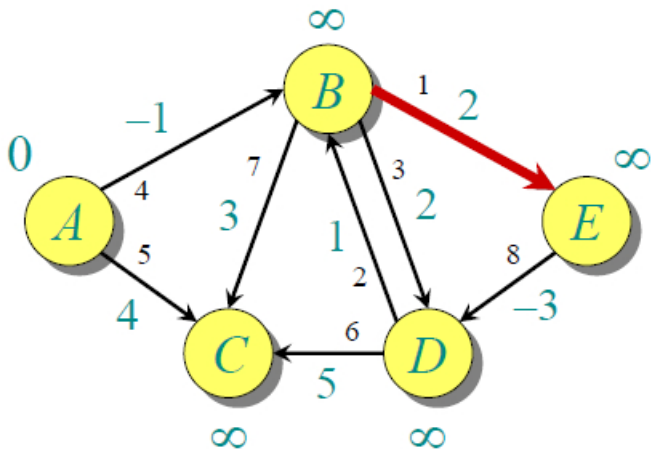


Αρχικοποίηση

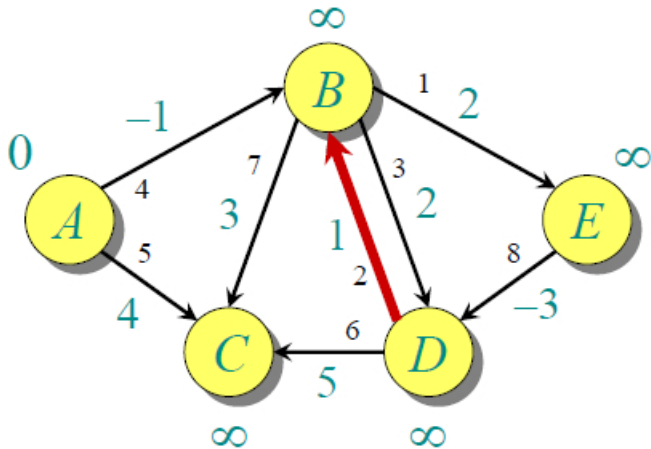


Διάταξη χαλάρωσης ακμών

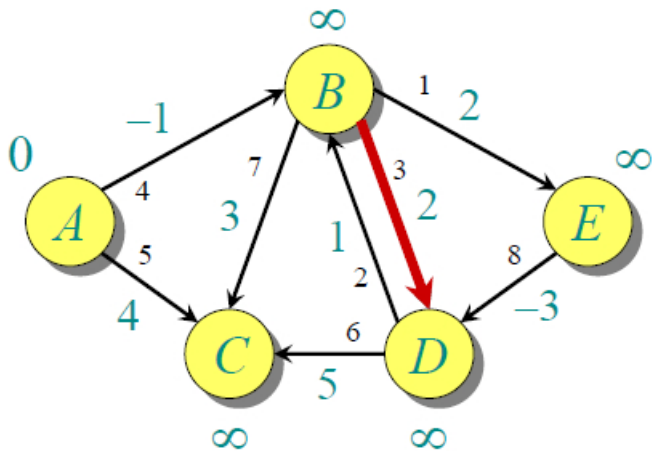
Παράδειγμα Bellman-Ford



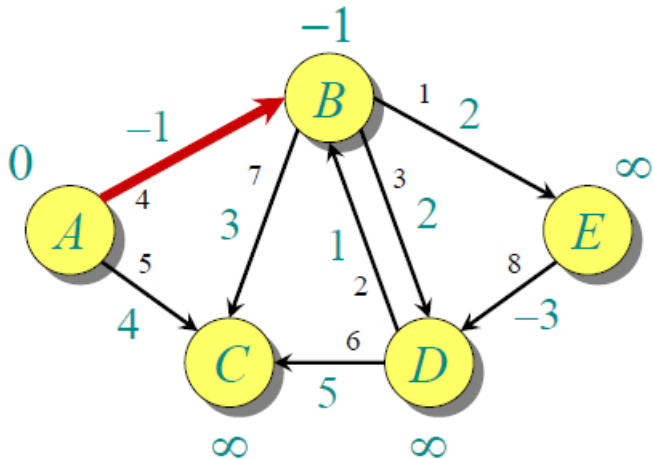
Παράδειγμα Bellman-Ford



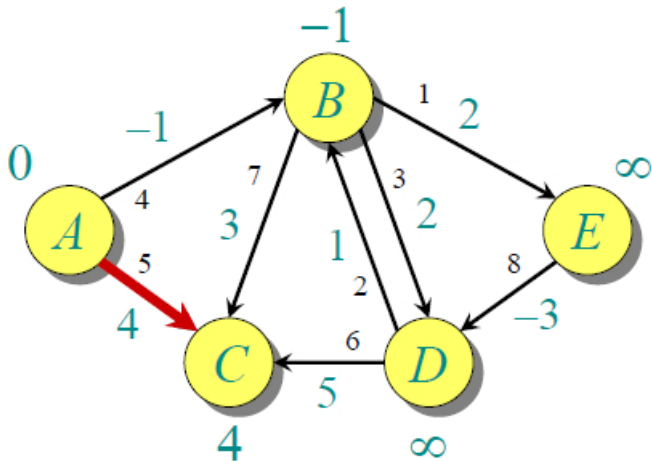
Παράδειγμα Bellman-Ford



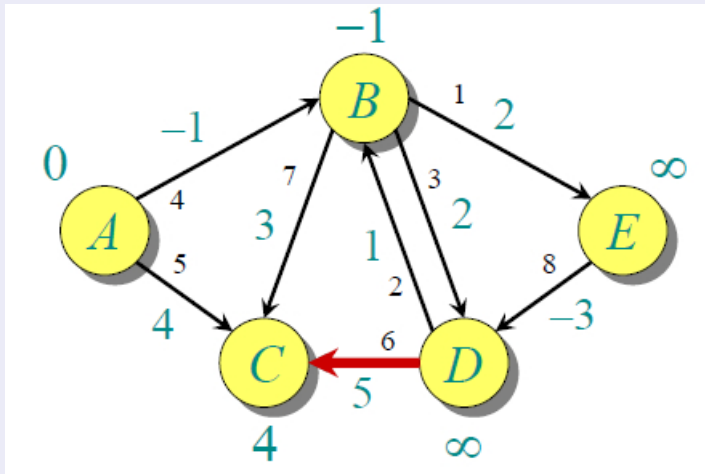
Παράδειγμα Bellman-Ford



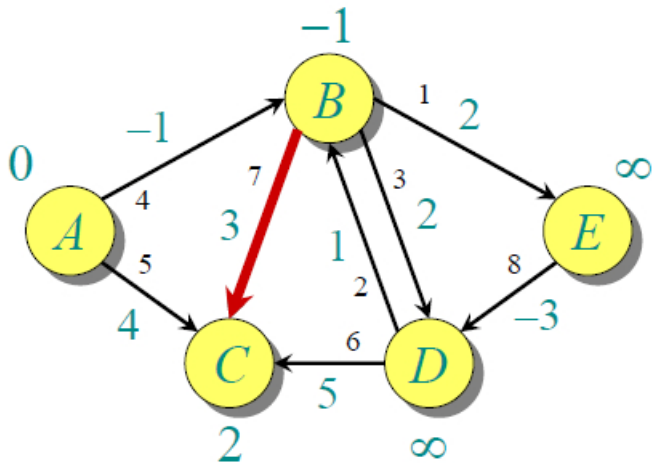
Παράδειγμα Bellman-Ford



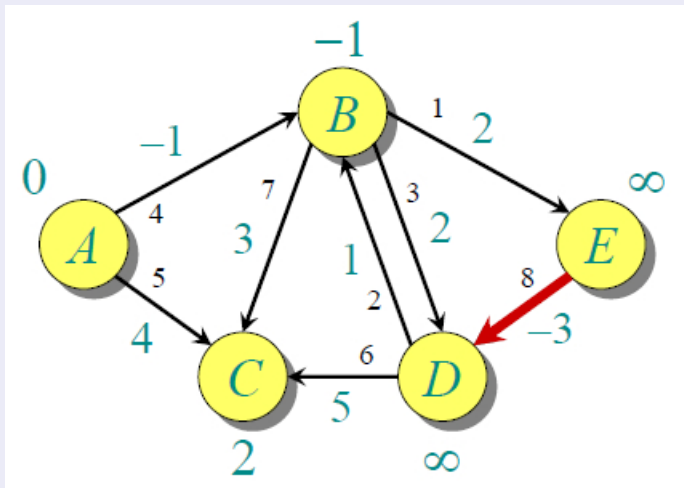
Παράδειγμα Bellman-Ford



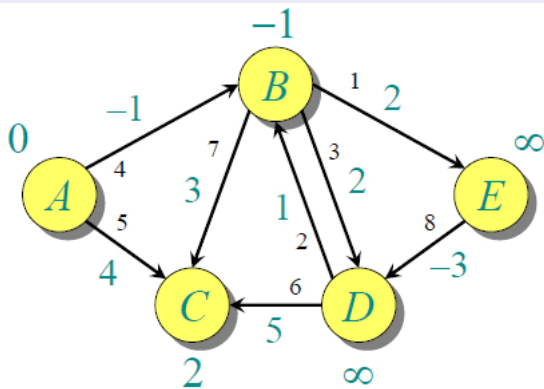
Παράδειγμα Bellman-Ford



Παράδειγμα Bellman-Ford

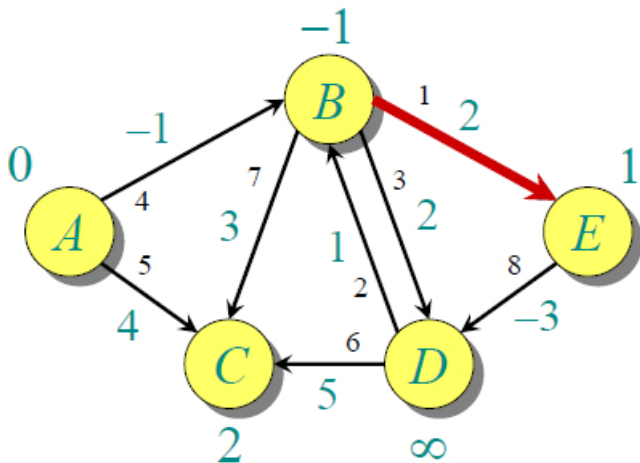


Παράδειγμα Bellman-Ford

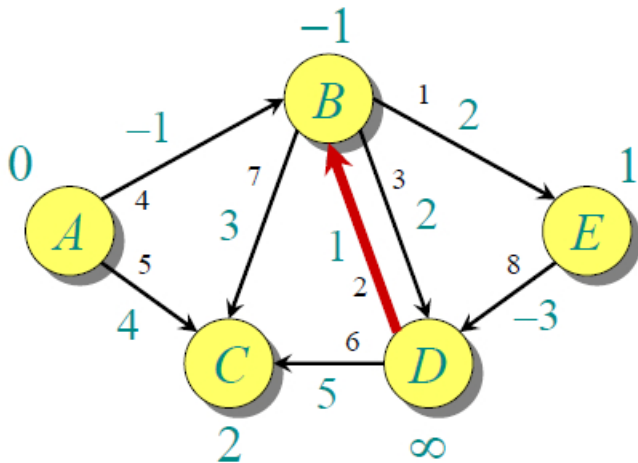


Τέλος πρώτης επανάληψης

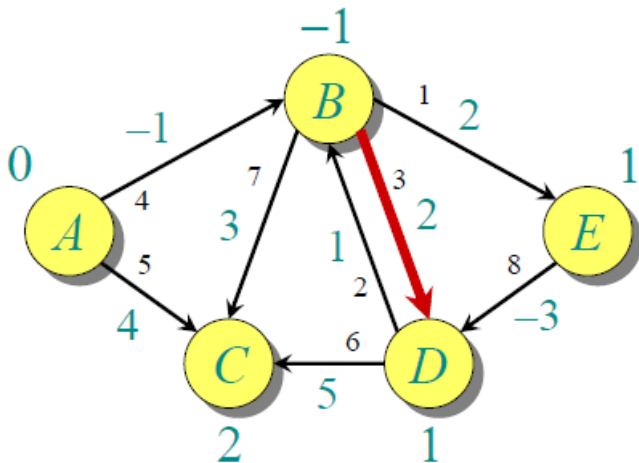
Παράδειγμα Bellman-Ford



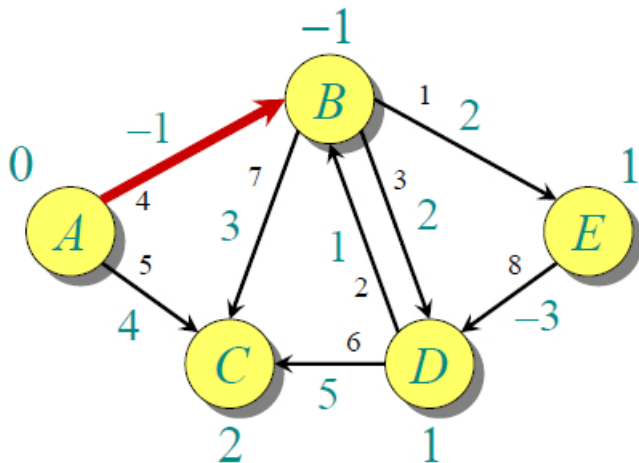
Παράδειγμα Bellman-Ford



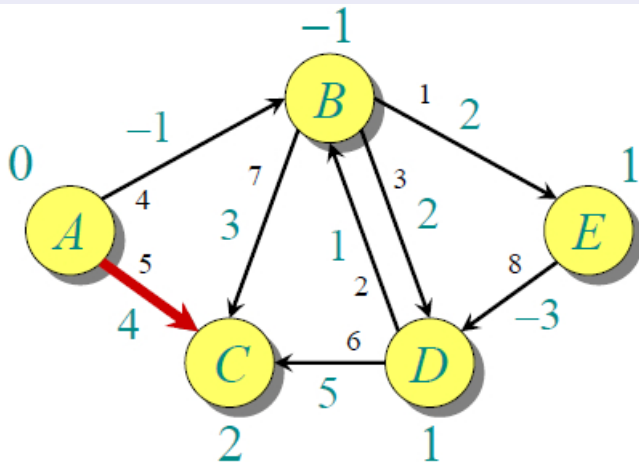
Παράδειγμα Bellman-Ford



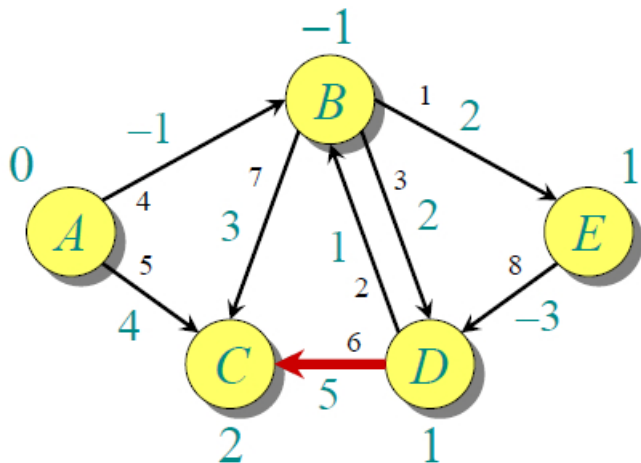
Παράδειγμα Bellman-Ford



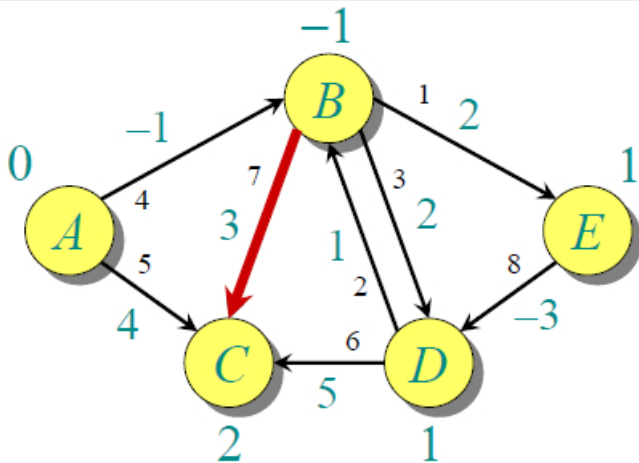
Παράδειγμα Bellman-Ford



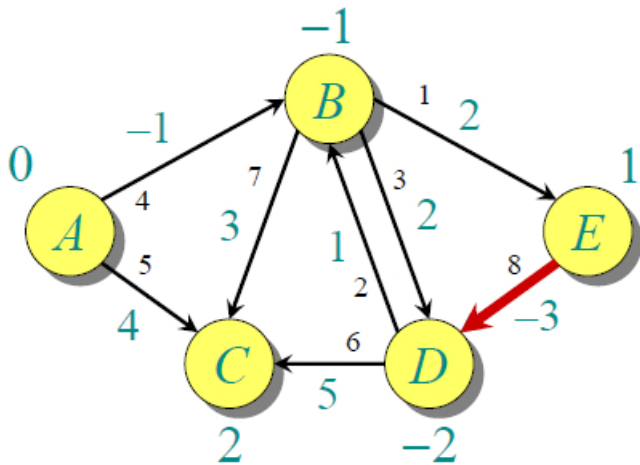
Παράδειγμα Bellman-Ford



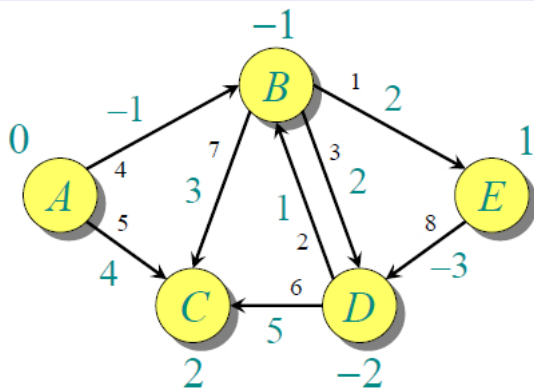
Παράδειγμα Bellman-Ford



Παράδειγμα Bellman-Ford



Παράδειγμα Bellman-Ford



Τέλος 2ης επανάληψης (και 3ης και 4ης)

Ορθότητα(Θυμηθείτε)(ιδιότητα χαλάρωσης διαδρομής)

Lemma

Έστω $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ μια ελαφρύτατη διαδρομή από τον $s = v_0$ στην v_k . Τότε, αν εφαρμοστεί η χαλάρωση στις διαδοχικές ακμές της p , έχουμε

$$d[v_k] = \delta(s, v_k)$$

και αυτό διατηρείται.

Ορθότητα Bellman-Ford

1. Αν \nexists κύκλος $c : w(c) < 0$ τότε ο $BF =$ αληθές και

$$d[v] = \delta(s, v) \quad (1)$$

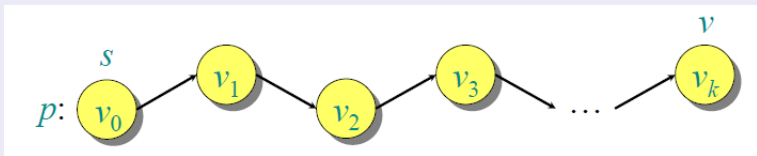
2. Αν $\exists c : w(c) < 0$ τότε $BF =$ ψευδές και

$$d[v] > d[u] + w(u, v) \quad (u, v) \in E$$

Ορθότητα Bellman-Ford

Απόδειξη

1. Έστω $v \in V$ και $s \rightsquigarrow v$, μια άκυκλη ελαφρύτατη διαδρομή $p = \langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ όπου $v_0 = s$ και $v_k = v$



- ▶ Η p αποτελείται το πολύ από $|V| - 1$ ακμές.
- ▶ Σε κάθε μια από τις $|V| - 1$ επαναλήψεις εκτελούνται πράξεις χαλάρωσης στις $|E|$ ακμές.
- ▶ Μια εκ των ακμών που υφίσταται χαλάρωση είναι και η (v_{i-1}, v_i) , $i = 1, 2, \dots, k$

Ορθότητα Bellman-Ford (I)

Lemma

Έστω ότι δεν υπάρχει κύκλος

$$c : w(c) < 0.$$

Μετά από $V - 1$ επαναλήψεις του Bellman-Ford έχουμε

$$d[v] = \delta(s, v) \quad \forall v \in V$$

και αυτό διατηρείται.

Έστω $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ μια ελαφρύτατη διαδρομή από τον $s = v_0$ στην $v_k = v$. Η p αποτελείται από το πολύ $V - 1$ ακμές $k \leq V - 1$. Σε κάθε μία από τις $V - 1$ επαναλήψεις εκτελούνται πράξεις χαλάρωσης στις E ακμές.

Ορθότητα Bellman-Ford

Επαγωγή

Βάση : $d[v_0] = 0$ αρχικά. Επίσης $\delta(s, v_0) = 0$ άρα ισχύει.

Βήμα : Υποθέτουμε ότι

$$d[v_j] = \delta(s, v_j)$$

μετά από $j < i$ επαναλήψεις

$$d[v_{i-1}] = \delta(s, v_{i-1})$$

Κατά τη i επανάληψη χαλαρώνεται η ακμή (v_{i-1}, v_i) και από το Λήμμα (ιδιότητα χαλάρωσης διαδρομής) έχουμε

$$d[v_i] = \delta(s, v_i)$$

Επομένως

$$d[v] = \delta(s, v) \quad \forall v \in V.$$

- 1 Αν δεν υπάρχει $c : w(c) < 0$
 - 1 Bellman Ford = ΑΛΗΘΕΣ και $d[v] = \delta(s, v) \forall v \in V$
 - 2 G_{π} αποτελεί δένδρο ελαφρύτατων διαδρομών με ρίζα το s .
- 2 Αν $\exists c : w(c) < 0$ Bellman Ford= ΨΕΥΔΕΣ.

Απόδειξη.

- Το 1 έπεται από το Λήμμα και το 2 έπεται από το 1 και την ιδιότητα των προκατόχων.
- Θαδειχθεί ότι Bellman-Ford= ΑΛΗΘΕΣ
- Κατά τον τερματισμό έχουμε

$$d[v] = \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v) \quad \forall v \in V$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u, v) \quad \forall (u, v) \in E.$$

- Ο Αλγόριθμος BF επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ.



Ορθότητα Bellman-Ford

2. \exists κύκλος $c : w(c) < 0$ τότε $BF = \PsiΕΥΔΕΣ$ και

$$d[v] > d[u] + w(u, v) \quad \forall (u, v) \in E$$

Έστω κύκλος $c = \langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$
τότε

$$\sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) < 0 \quad (2)$$

Ας υποθέσουμε ότι BF επιστρέφει $ΑΛΗΘΕΣ$. Τότε

$$d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

Ορθότητα Bellman-Ford

Αθροίζοντας έχουμε

$$\sum_{i=1}^k d[v_i] \leq \sum_{i=1}^k d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

Συνεπώς

$$0 \leq \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

το οποίο αντιβαίνει προς την (2). Άρα ο *BF* επιστρέφει ΨΕΥΔΕΣ. Επίσης, τώρα

$$d[v] > d[u] + w(u, v) \quad (u, v) \in E$$

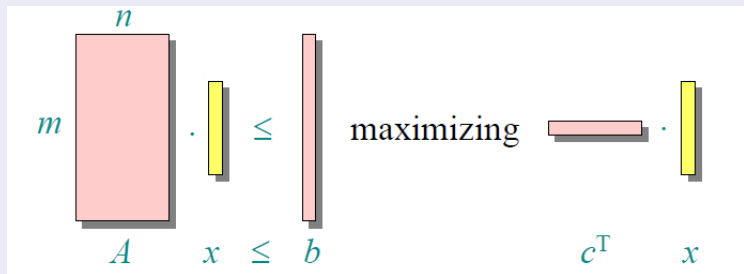
Ανίχνευση Κύκλου με Αρνητικό Βάρος

Corollary

Αν μια τιμή $d[v]$ δεν συγκλίνει μετά από $|V| - 1$ περάσματα, τότε υπάρχει κύκλος με αρνητικό βάρος στον G προσβάσιμο από την s .

Γραμμικός Προγραμματισμός

Έστω A ένας πίνακας $m \times n$, b m -διάνυσμα και c n -διάνυσμα. Να βρεθεί n -διάνυσμα x που μεγιστοποιεί το $c^T x$ δεδομένου ότι $Ax \leq b$, ή δεν υπάρχει τέτοια λύση.



Αλγόριθμοι Γραμμικού Προγραμματισμού

- Αλγόριθμοι για το γενικό πρόβλημα
 - ▶ Μέθοδοι Simplex : πρακτικές αλλά εκθετικοί χρόνοι (χείριστη περίπτωση).
 - ▶ Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου: πολυωνυμικός χρόνος και ανταγωνίζεται την simplex.
- Πρόβλημα εφικτότητας :
 - ▶ κανένα κριτήριο βελτιστοποίησης
 - ▶ Να βρεθεί κάποιο x τέτοιο ώστε $Ax \leq b$.
 - ▶ γενικά, τόσο δύσκολο όσο τα κοινά LP.

Λύνοντας ένα σύστημα περιορισμών διαφοράς

Σε ένα σύστημα περιορισμών διαφοράς κάθε γραμμή του A περιέχει ακριβώς ένα 1, ένα -1 και τα υπόλοιπα 0.

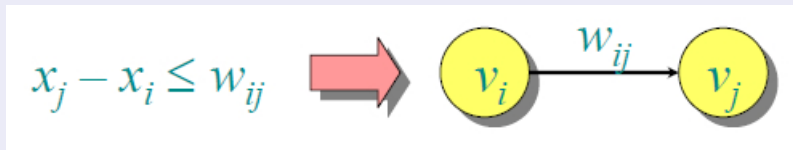
Παράδειγμα:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_2 - x_3 \leq -2 \\ x_1 - x_3 \leq 2 \end{array} \right\} x_j - x_i \leq w_{ij}$$

Λύση:

$$\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{array}$$

Γράφημα Περιορισμών



με $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, $1 \leq k \leq m$. Ο πίνακας "A" έχει διαστάσεις $|E| \times |V|$

Theorem

Αν το γράφημα περιορισμών περιέχει έναν κύκλο αρνητικού βάρους, τότε το σύστημα των διαφορών είναι μη ικανοποιήσιμο.

Proof.

Έστω ότι ο κύκλος c με αρνητικό βάρος είναι ο $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$.
Τότε, έχουμε

$$\begin{array}{rcl} x_2 - x_1 & \leq & w_{12} \\ x_3 - x_2 & \leq & w_{23} \\ \vdots & & \\ x_k - x_{k-1} & \leq & w_{k-1,k} \\ x_1 - x_k & \leq & w_{k1} \\ \hline 0 & \leq & w(c) \\ & & < 0 \end{array}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει τιμή του x_i που μπορεί να ικανοποιήσει τους περιορισμούς.

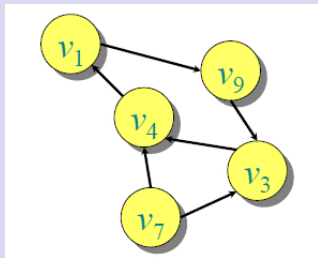


Theorem

Αν το γράφημα περιορισμών δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους, τότε το σύστημα των διαφορών είναι ικανοποιήσιμο.

Proof.

Προσθέτουμε μια νέα κορυφή s στο V με μηδενικό βάρος ακμής προς κάθε κορυφή $v_i \in V$.

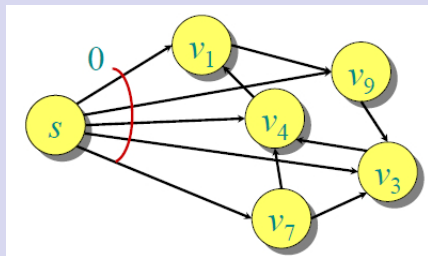


Theorem

Αν το γράφημα περιορισμών δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους, τότε το σύστημα των διαφορών είναι ικανοποιήσιμο.

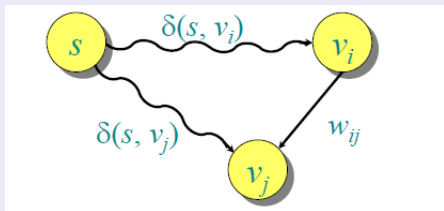
Proof.

Προσθέτουμε μια νέα κορυφή s στο V με μηδενικό βάρος ακμής προς κάθε κορυφή $v_i \in V$.



Απόδειξη (συν.)

Ισχυρισμός: Η ανάθεση $x_i = \delta(s, v_i)$ λύνει το σύστημα των περιορισμών. Έστω περιορισμός $x_j - x_i \leq w_{ij}$, και τα ελάχιστα μονοπάτια από το s στο v_j και v_i :



Η τριγωνική ανισότητα μας δίνει $\delta(s, v_j) \leq \delta(s, v_i) + w_{ij}$.

Αφού $x_i = \delta(s, v_i)$ και $x_j = \delta(s, v_j)$, τότε ο περιορισμός $x_j - x_i \leq w_{ij}$ ικανοποιείται.

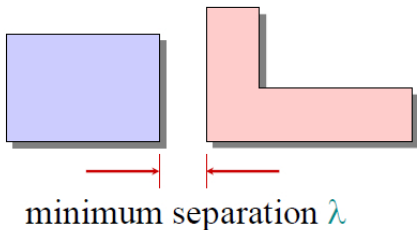
Bellman-Ford και Γραμμικός Προγραμματισμός

Corollary

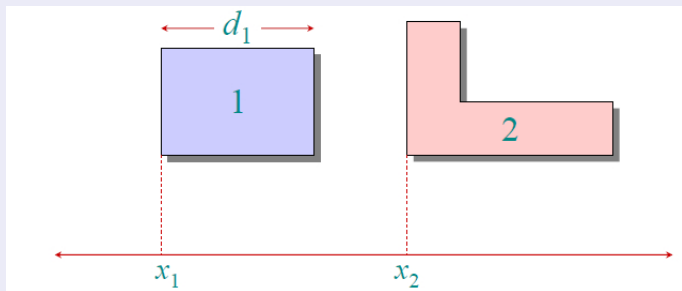
Ο αλγόριθμος *Bellman-Ford* λύνει ένα σύστημα με m περιορισμούς διαφορών και n μεταβλητές σε χρόνο $O(mn)$.

- Τα ελάχιστα μονοπάτια μιας πηγής είναι ένα απλό πρόβλημα LP.
- Ο Bellman-Ford μεγιστοποιεί το $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ αναφορικά με το $x_j - x_i \leq w_{ij}$ και $x_i \leq 0$ (άσκηση)
- Ο Bellman-Ford επίσης ελαχιστοποιεί το $\max_i \{x_i\} - \min_i \{x_i\}$ (άσκηση)

*Integrated
-circuit
features:*



Πρόβλημα: Συνέπηξε (σε μια διάσταση) τον χώρο μεταξύ των γνωρισμάτων ενός σχεδιαγράμματος VLSI χωρίς να έρθουν πολύ κοντά κάποια από τα χαρακτηριστικά.



Περιορισμός:

$$x_2 - x_1 \geq d_1 + \lambda$$

Ο Bellman-Ford ελαχιστοποιεί την $\max_i \{x_i\} - \min_i \{x_i\}$, που συμπιέζει το σχεδιάγραμμα στη x-διάσταση.

Συντομότερα μονοπάτια στα ΚΑΓ

- Χαλαρώνοντας τις ακμές σε ένα ΚΑΓ με βάρη σύμφωνα με την τοπολογική ταξινόμηση μπορούμε να υπολογίσουμε τα συντομότερα μονοπάτια από μια απλή πηγή σε $\Theta(V+E)$ χρόνο.
- Τα συντομότερα μονοπάτια είναι **πάντα** καλά ορισμένα σε ένα ΚΑΓ αφού ακόμα και αν υπάρχουν ακμές με αρνητικά βάρη, δεν μπορούν να υπάρχουν κύκλοι με αρνητικά βάρη.
- Ο αλγόριθμος ξεκινάει με την τοπολογική ταξινόμηση του ΚΑΓ
- Γίνεται διάτρεξη μόνο μία φορά των κορυφών της τοπολογικής ταξινόμησης και χαλαρώνεται κάθε ακμή που φεύγει από μια κορυφή.

Συντομότερα μονοπάτια στα ΚΑΓ

DAG - SHORTEST - PATHS (G, w, s)

TOPOLOGICAL SORT (G, w, s)

$d[s] = 0$
for each $v \in V - \{s\}$
do $d[v] = \infty$ } αρχικοποίηση $\Theta(V)$

for each vertex u , taken in topological order

do for each vertex $v \in Adj[u]$
do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
then $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ } $|E|$ times

Analysis

$\Theta(V+E)$

Theorem

Μετά το τέλος της εκτέλεσης DAG - SHORTEST - PATHS (G, w, s) ισχύει ότι $d[v] = \delta(s, v) \quad \forall v \in V$ και ότι το γράφημα προκατόχων G_π αποτελεί δένδρο ελαφρύτατων διαδρομών.

Απόδειξη

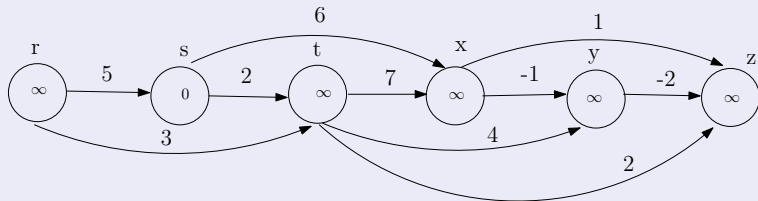
Έστω $p : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$, όπου $v_0 = s$ και $v_k = v$ είναι το συντομότερο μονοπάτι. Λόγω του ότι χρησιμοποιείται τοπολογική ταξινόμηση, οι ακμές του p χαλαρώνουν με την εξής διάταξη

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k).$$

Από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι

$$d[v_i] = \delta(s, v_i), \quad i = 0, 1, \dots, k$$

Τέλος, σύμφωνα με την ιδιότητα του γραφήματος προκατόχων το G_π αποτελεί δένδρο ελαφρύτατων διαδρομών.



(a)

