

# Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

N. M. Μισυρλής

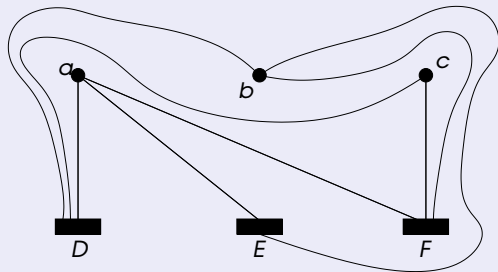
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

## Παραδείγματα γράφων

- Ηλεκτρικά κυκλώματα
- Δίκτυα μεταφορών
  - ▶ Σιδηροδρομικά
  - ▶ Οδικά
  - ▶ Αεροπορικά
- Δίκτυα Υπολογιστών
- Χρονοπρογραμματισμός εργασιών
- Διάγραμμα διαδοχής εργασιών στη διαχείριση προγραμμάτων
- Αναπαράσταση συνδέσεων και δυνατότητες διάσχισης.

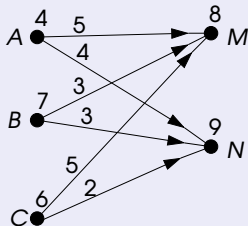
## Παράδειγμα 1

- Το πρόβλημα: Μπορούμε να τοποθετήσουμε (πάνω στο επίπεδο) τις 3 κατοικίες, τα 3 εργοστάσια και τις τροφοδοσίες, έτσι ώστε δυο τροφοδοσίες να μην τέμνονται εκτός των άκρων τους;



## Παράδειγμα 2

- Το πρόβλημα: *Να καθοριστεί ποιο εργοστάσιο θα πρέπει να στείλει σε ποιο κέντρο, έτσι ώστε το συνολικό κόστος μεταφοράς να είναι ελάχιστο.*



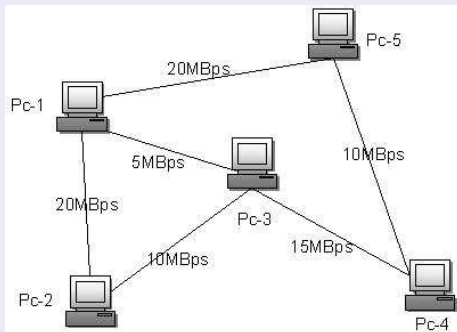
Σχήμα: Δίκτυο Μεταφορών

## Παράδειγμα 3

- Το πρόβλημα : Πώς θα δρομολογήσουμε τις παρακάτω ποσότητες δεδομένων:
  - ▶ 7MBps από το  $pc - 1$  στο  $pc - 4$
  - ▶ 6MBps από το  $pc - 3$  στο  $pc - 5$
  - ▶ 10MBps από το  $pc - 2$  στο  $pc - 3$
  - ▶ 5MBps από το  $pc - 4$  στο  $pc - 1$

έτσι ώστε να μεταφερθούν όλα τα δεδομένα χωρίς να παραβιαστεί η χωρητικότητα των ακμών;

## Παράδειγμα 3



Σχήμα: Δίκτυο Τηλεπικοινωνιών

## Ορισμοί

- Τυπικά γράφος είναι μια δομή που αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων (nodes) που συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο ακμών (edges). Ένας γράφος συμβολίζεται ως  $G = (V, E)$ , όπου  $V$  και  $E$  είναι τα σύνολα των κόμβων και των κορυφών αντίστοιχα.
- Ένας γράφος  $G = (V, E)$  δίνεται από ένα σύνολο κόμβων  $V$  και από ένα υποσύνολο  $E$  του καρτεσιανού γινομένου  $V \times V$ , ονομαζόμενο σύνολο ακμών του  $G$ .
- Το πλήθος των κορυφών  $n = |V|$  και το πλήθος των ακμών  $m = |E|$ .

## Ορισμοί

- Το πλήθος  $n$  των κορυφών του γράφου ονομάζεται *τάξη* του γράφου.
- *Πυκνότητα* ενός γράφου ορίζεται το πηλίκο  $\rho(G) = \frac{|E|}{n^2}$
- Μία ακμή με ταυτόσημα τερματικά σημεία ονομάζεται *βρόχος*. Δύο ή περισσότερες ακμές που ενώνουν το ίδιο ζεύγος κορυφών ονομάζονται *παράλληλες*. Κάθε γράφος χωρίς βρόγχους ή παράλληλες ακμές ονομάζεται *απλός γράφος*.



## Κατευθυνόμενοι γράφοι

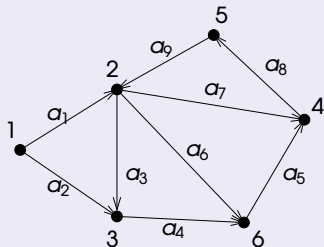
- Κατευθυνόμενος γράφος (directed graph) ονομάζεται ένας γράφος  $G = (X, U)$ , που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών  $X$  και ένα σύνολο  $U$  από διατεταγμένα (κατευθυνόμενα) ζεύγη κορυφών, που ονομάζονται κατευθυνόμενες πλευρές (ή τόξα).
- Ένα τόξο  $(i, j)$  σε έναν κατευθυνόμενο γράφο έχει δύο άκρα  $i$  και  $j$ . Η κορυφή  $i$  λέγεται ουρά (tail) ενώ η κορυφή  $j$  λέγεται κεφαλή (head). Το τόξο  $(i, j)$  ξεκινάει από την κορυφή  $i$  και κατευθύνεται στην κορυφή  $j$ . Το τόξο  $(i, j)$  είναι εξερχόμενο της κορυφής  $i$  και εισερχόμενο της κορυφής  $j$ .
- Έσω βαθμός (indegree)  $d_i^-$ .
- Έξωβαθμός (outdegree)  $d_i^+$ .
- Βαθμός (degree)  $d_i$  ( $d_i = d_i^+ + d_i^-$ ).

## Μη-Κατευθυνόμενοι γράφοι

- *Μη Κατευθυνόμενος γράφος* (undirected graph): ένα μη κενό σύνολο κορυφών  $V$  και ένα σύνολο  $E$  από μη κατευθυνόμενα ζεύγη κορυφών.
- *Βαθμός* (degree)  $d_i$ : το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή.
- *Γράφος με βάρη ή αντισταθμισμένος γράφος*: σε κάθε ακμή του  $e$  έχει μια χαρακτηριστική τιμή,  $w(e)$  το βάρος.

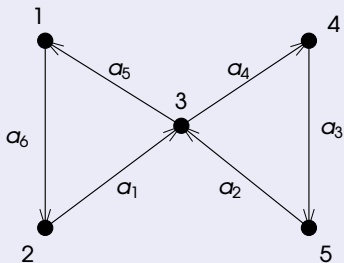
## Παράδειγμα 4: Μονοπάτια

- Ένας κατευθυνόμενος γράφος τάξης 6 με 9 κατευθυνόμενες πλευρές
- Μονοπάτι:  $\mu = \alpha_1 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_6 \alpha_5 \alpha_8$
- Απλό Μονοπάτι:  $\mu = \alpha_1 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_6$
- Στοιχειώδες Μονοπάτι:  $\mu = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$



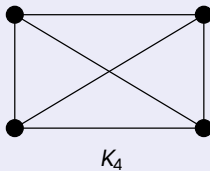
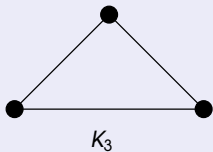
## Παράδειγμα 5: Μονοπάτια

- Κύκλος:  $\mu = \alpha_6 \alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_1 \alpha_5$
- Απλός Κύκλος:  $\mu = \alpha_6 \alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_5$
- Στοιχειώδης Κύκλος:  $\mu = \alpha_1 \alpha_5 \alpha_6$

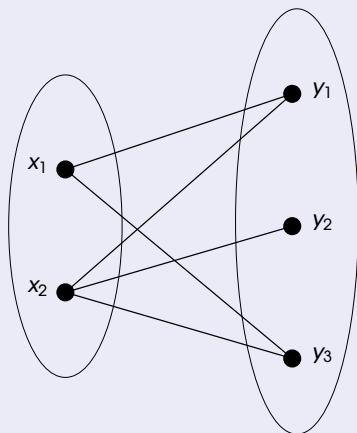


## Πλήρεις γράφοι

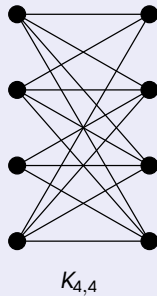
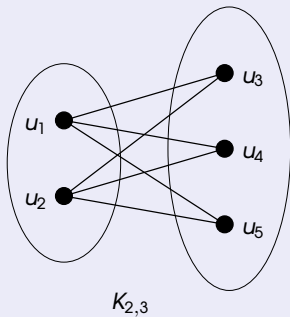
- Κλίκα 3 και Κλίκα 4



## Διμερείς γράφοι



## Πλήρεις Διμερείς γράφοι



## Κανονικοί και επίπεδοι γράφοι

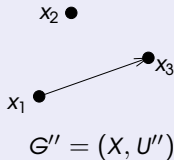
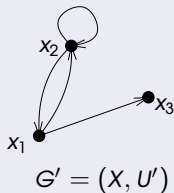
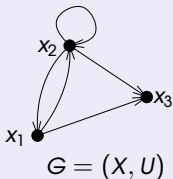
- *Κανονικός Γράφος* ή  *$\kappa$ -κανονικός* ονομάζεται ο γράφος  $G = (V, E)$  στον οποίο όλοι οι κόμβοι έχουν τον ίδιο βαθμό  $\kappa$ , δηλ.  $\forall v \in V d(v) = \kappa$ .
- Ένας γράφος ονομάζεται *επίπεδος* αν μπορούμε να τον σχεδιάσουμε στο επίπεδο, χωρίς τμήση των πλευρών του.



# Γράφοι

## Υπογράφοι

- $G'$  υπογράφος του  $G$  και  $G''$  παράγων υπογράφος του  $G$

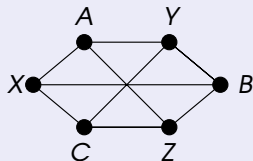
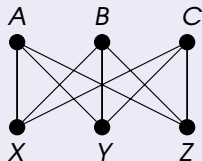


## Δέντρα

- Ένας *συνεκτικός* γράφος  $G$  είναι *δέντρο* αν και μόνο αν δύο οποιοσδήποτε κορυφές του ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.
- Ένα δέντρο αποτελείται από τη ρίζα  $root$ , τα φύλλα και τους εσωτερικούς κόμβους.
- *Θεώρημα*
  - ▶ Ο  $T$  είναι δέντρο
  - ▶ Ο  $T$  είναι *συνδεδεμένος* και δεν έχει κύκλους
  - ▶ Ο  $T$  είναι *συνδεδεμένος* και έχει  $n - 1$  ακμές
  - ▶ Ο  $T$  δεν έχει κύκλους και έχει  $n - 1$  ακμές
  - ▶ Αν στον  $T$  προστεθεί μία καινούργια ακμή  $e$  τότε ο γράφος  $T + e$  έχει ακριβώς ένα κύκλο
  - ▶ Οποιαδήποτε διαγραφή ακμής καταστρέφει τη συνεκτικότητα του  $T$

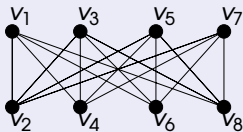
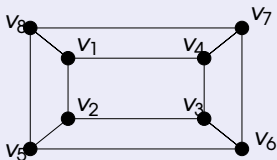
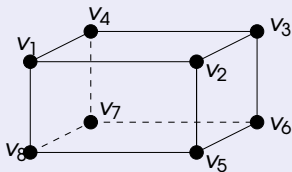
## Ισομορφισμός γράφων

- Δύο γράφοι  $G_1 = (V_1, E_1)$  και  $G_2 = (V_2, E_2)$  λέγονται ισομορφικοί αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία  $f : V_1 \rightarrow V_2$  έτσι ώστε  $[f(v_1), f(v_2)] \in E_2 \Leftrightarrow (v_1, v_2) \in E_1$ .



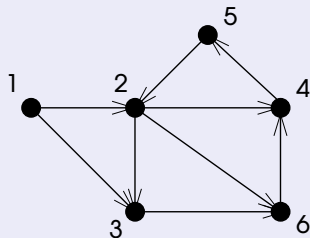
# Γράφοι

## Ισομορφισμός γράφων



## Αποθήκευση Γράφων: Πίνακας Γειτνίασης

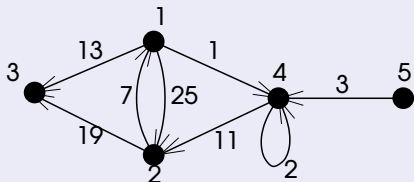
- Ένας κατευθυνόμενος γράφος  $G = (X, U)$ ,  $|X| = 6$ ,  $|U| = 9$  και ο πίνακας γειτνίασης  $M$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Αποθήκευση Γράφων: Πίνακας Γειτνίασης

- Ένας γράφος με βάρη και ο πίνακας γειτνίασης  $M$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 13 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

## Αποθήκευση Γράφων: Πίνακας Γειννίαςης

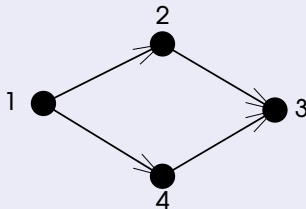
- Έστω για παράδειγμα  $M^p$ , η  $p$ -ιοστή δύναμη του πίνακα  $M$ , τότε το στοιχείο  $M^p(i, j)$  είναι ίσο προς τον αριθμό των μονοπατιών του  $G$ , μήκους  $p$ , των οποίων η αρχή είναι ο κόμβος  $x_i$  και το τέλος ο κόμβος  $x_j$ .
- Ο πολλαπλασιασμός δύο πινάκων έχει πολυπλοκότητα  $\mathcal{O}(n^3)$  ( $\mathcal{O}(n^{2.81})$ )
- Κάνοντας το πολύ  $n$  τέτοιους πολλαπλασιασμούς, η συνολική πολυπλοκότητα του παραπάνω αλγορίθμου είναι  $\mathcal{O}(n^4)$ .

## Αποθήκευση Γράφων: Πίνακας Γειτνίασης

- Επειδή  $M^2(1, 3) = 2$  υπάρχουν δύο μονοπάτια μήκους 2 μεταξύ των κόμβων 1 και 3.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

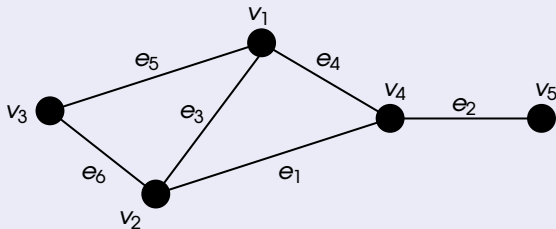
$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





## Αποθήκευση Γράφων: Πίνακας Πρόσπτωσης

- Ένας γράφος όπου οι πλευρές του είναι αριθμημένες αυθαίρετα  $e_1, e_2, \dots, e_6$



## Αποθήκευση Γράφων: Πίνακας Πρόσπτωσης

- Ο πίνακας πρόσπτωσης του γράφου είναι:

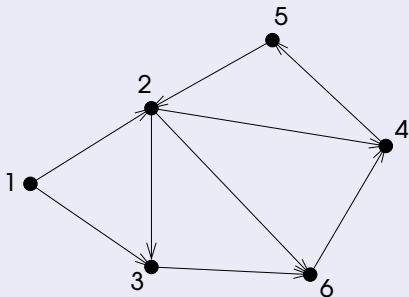
$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

## Αποθήκευση Γράφων: Πίνακας Πρόσπτωσης

- Ο πίνακας πρόσπτωσης απαιτεί για την αποθήκευσή του  $\mathcal{O}(n \times m)$  bits και δεν είναι τετραγωνικός ή συμμετρικός.
- Στην περίπτωση των απλών γράφων (χωρίς βρόγχους) κάθε στήλη περιέχει δύο άσσους.
- Αν ο γράφος έχει παράλληλες ακμές τότε οι αντίστοιχες στήλες είναι ίδιες ενώ μια γραμμή με μηδενικά υποδηλώνει την ύπαρξη απομονωμένης κορυφής.

## Αποθήκευση Γράφων: Λίστες γειτνίασης

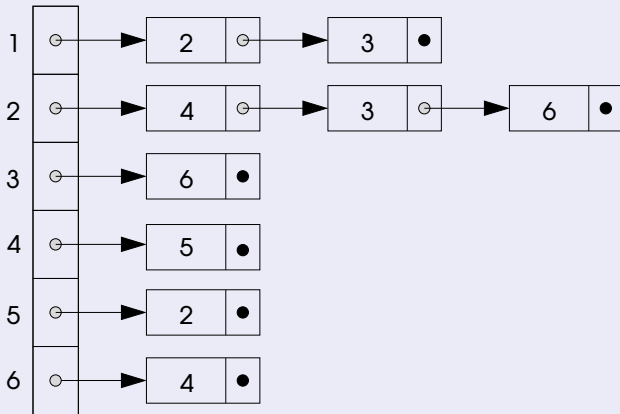
- Ένας κατευθυνόμενος γράφος και ο πίνακας γειτνίασης  $M$ :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Αποθήκευση Γράφων: Λίστες γειννίαςης

- Λίστα Γειννίαςης με συνδεδεμένες λίστες:



## Αποθήκευση Γράφων: Λίστες γεινίασης

- Λίστα Γεινίασης με γραμμικούς πίνακες:

