Σχήματα Προσέγγισης

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Βασίλης Ζησιμόπουλος

Θεωριτική Πληροφορική
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

PTAS

Είναι ένας αλγόριθμος ή μια σειρά αλγορίθμων που $\forall I$ και $\varepsilon > 0$ δίνει λύση με σχετικό σφάλμα $\dfrac{|f_A(I) - \hat{f}(I)|}{\hat{f}(I)} < \varepsilon$ σε πολυωνυμικό χρόνο $O(n^{1/\varepsilon})^k = O(n^{k/\varepsilon})$.

Για $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ έχουμε $O(n^{100k})$.

FPTAS

Είναι είναι ένα PTAS, που όμως βρίσκει τη λύση σε χρόνο πολυωνυμικό και ως προς το $\frac{1}{\varepsilon}$. Δηλαδή, $O(\frac{n^{k_1}}{\varepsilon^{k_2}})$.

Για $\varepsilon = \frac{1}{100}$ έχουμε $O(100^{k_2} n^{k_1})$.

knapsack, bin packing, independent task σε επεξεργαστές

Προσεγγιστικές λύσεις με την χρήση δυναμικού προγραμματισμού

j	1	2	3	4	5	6	7
s_i	4	1	2	3	2	1	2
p_i	299	73	159	221	137	89	157

n αντικείμενα
$B = 10$
$OPT = \{1, 2, 3, 6, 7\}$
Συνολική αξία: $Z^* = \sum_{i \in OPT} p_i = 777$

Προσεγγιστικές λύσεις με την χρήση δυναμικού προγραμματισμού

Τροποποιούμε τις αξίες των αντικειμένων αγνοώντας το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο τους.

j	1	2	3	4	5	6	7
s_i	4	1	2	3	2	1	2
$\bar{p}_i$	290	70	150	201	130	80	150

$\overline{OPT} = \{1, 3, 4, 6\}$
Συνολική αξία: $\bar{Z}^* = \sum_{i \in \overline{OPT}} \bar{p}_i = 740$ (5% της OPT)
Συνολική αξία: $\bar{Z}^* = \sum_{i \in \overline{OPT}} p_i = 768$ (ακόμα καλύτερα)

Truncation error

$$\sum_{i \in OPT} p_i \geq \sum_{i \in \overline{OPT}} p_i \geq \sum_{i \in \overline{OPT}} \bar{p_i} \geq \sum_{i \in OPT} \bar{p_i} \geq \sum_{i \in OPT} (p_i - 10) \geq \sum_{i \in OPT} p_i - 10n \Rightarrow$$

$$\sum_{i \in OPT} p_i - \sum_{i \in \overline{OPT}} \bar{p_i} \leq 10n$$

Truncation error

- Αποκοπή t τελευταίων δεκαδικών ψηφίων, απόκλιση $\leq 10^t n$
- $p_{\max} = \max\{p_i\}$.
- DP: $O(n^2 p_{\max})$ και μετά την αποκοπή $O(n^2 p_{\max} 10^{-t})$
- Προκύπτει ένας ε-προσεγγιστικός αλγόριθμος
- Θέτουμε: $\varepsilon = \dfrac{10^t n}{p_{\max}}$
- $$\frac{\sum_{i \in OPT} p_i - \sum_{i \in \overline{OPT}} p_i}{\sum_{i \in OPT} p_i} \leq \frac{10^t n}{p_{\max}} = \varepsilon$$
- $O(n^2 p_{\max} 10^{-t}) = O(\dfrac{n^3}{\varepsilon})$
- $t = \log_{10} \dfrac{\varepsilon p_{\max}}{n}$