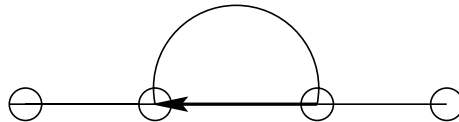


Δυναμικός Προγραμματισμός

Αρχη: Κάθε υποστρατηγική μιας βέλτιστης στρατηγικής είναι ίδια βέλτιστη



Μέθοδος: • ένταξη του προβλήματος σε μια οικογένεια προβλημάτων της ίδιας φύσης

- σύνδεση των βέλτιστων λύσεων με μια αναδρομική σχέση

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$f_k(y) = \max \left\{ \sum_{j=1}^k c_j x_j \mid \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j \leq y, \quad x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, k \right\}$$

$$f_k(y) = \begin{cases} f_{k-1}(y) & \text{αν } y \leq \alpha_k \\ \max\{f_{k-1}(y), c_k + f_{k-1}(y - \alpha_k)\} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq b \\ 1 \leq k \leq n \\ f_k(0) = 0 \end{cases} \quad \text{βέλτιστη λύση} = f_n(b)$$

- εύρεση λύσης:

$$x_k(y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } f_k(y) = f_{k-1}(y) \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Πολυπλοκότητα:

- $O(nb)$ χρόνος
- $O(b)$ μνήμη
- (pseudo-polynomial)

$$g_k(z) = \min\left\{\sum_{j=1}^k a_j x_j \mid \sum_{j=1}^k c_j x_j \geq z, \quad x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, k\right\}$$

$$k \in \{1, \dots, n\}, z \in \{1, \dots, \sum_{j=1}^n c_j\}$$

$$g_k(z) = \min\{g_{k-1}(z), \alpha_k + g_{k-1}(z - c_k)\}$$

$V(B)$: βέλτιστη τιμή

$$V(B) = \min\{z \in \mathbb{N} \mid g_n(z + 1) > b\}$$

$$* \quad g_1(z) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } z > c_1 \\ \alpha_1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

* $z \in \{1, \dots, \lceil V(\bar{B}) \rceil\}$ όπου $V(\bar{B})$ η βέλτιστη λύση του συνεχούς προβλήματος

Πολυπλοκότητα: $O(n \times V(B)) \rightarrow O(n \times \min\{b, V(B)\})$

pseudo-polynomial

Dynamic Programming Knapsack

$$\max \quad z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20	20
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16	20	20	20	20
3	0	0	0	0	0	11	11	11	16	20	20	20	20
4	0	0	0	0	9	11	11	11	16	20	20	20	20
5	0	0	0	0	9	11	11	11	16	20	20	20	23
6	0	1	1	1	7	9	11	12	16	20	21	21	23

Finding the solution

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20 ¹	20 ¹	20 ¹	20 ¹
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16 ¹	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰
3	0	0	0	0	0	0	11 ¹	11 ¹	16 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰
4	0	0	0	0	0	9	11	11	16 ⁰	20	20	20	20
5	0	0	0	0	7	9	11	11	16 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	23 ¹
6	0	1 ¹	1 ¹	1 ¹	7 ⁰	9 ⁰	11 ⁰	12 ¹	16 ⁰	20 ⁰	21 ¹	21	23 ⁰

$$x_6(12) = 0$$

$$x_5(12) = 1 \quad 12 - x_5(12)a_5 = 8$$

$$x_4(8) = 0$$

$$x_2(8) = 1 \quad 8 - 8 = 0$$

n φορές

Πολ/τα: Εύρεση Τιμής σε χρόνο:

$$O(n(b+1)) \Leftarrow O(nb)$$

Μνήμη: $O(b)$