

Καλύψεις

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Βασίλης Ζησιμόπουλος

Θεωρητική Πληροφορική
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ορισμός

Δοσμένου ενός συνόλου $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ και μιας συλλογής υποσυνόλων του U , $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ και βάρη $w_j \geq 0 \quad \forall S_j$, να βρεθεί μια συλλογή ελαχίστου κόστους $C \subseteq \mathcal{S}$ τέτοια ώστε $\bigcup_{S_i \in C} S_i = U$. Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει το κάλυμμα με την ελάχιστη πληθικότητα, θεωρούμε ότι το κόστος κάθε συνόλου S_i ισούται με 1.

Παράδειγμα

U	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
x_1	X					
x_2	X			X		
x_3	X				X	
x_4	X		X			
x_5	X	X		X		
x_6	X	X			X	
x_7			X	X		
x_8		X		X		
x_9		X			X	
x_{10}			X			X
x_{11}				X		X
x_{12}					X	

$$C = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}, OPT = \{S_3, S_4, S_5\}$$

Γραμμικό Πρόγραμμα

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & \sum_{j=1}^m w_j x_j \\ \text{subject to:} \quad & \sum_{j:e_i \in S_j} x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Το Vertex Cover είναι ειδική περίπτωση του Set Cover.

Algorithm 1 Set Cover (Greedy)

```
1:  $C \leftarrow \emptyset$ 
2: while  $C \neq U$  do
3:   Επέλεξε  $S \in \mathcal{S}$  τέτοιο ώστε να μεγιστοποιεί το  $|S \cap U|$ 
4:    $U = U - S$ 
5:    $C = C \cup S$ 
6: end while
7: return τα επιλεγμένα σύνολα
```

Ορισμός

Δοσμένου ενός συνόλου $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ και μιας συλλογής υποσυνόλων του U , $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ και βάρη $w_j \geq 0 \quad \forall S_j$, να βρεθεί μια συλλογή ελαχίστου κόστους $C \subseteq \mathcal{S}$, **στοιχείων ξένων μεταξύ τους** ($S_i \cap S_j = \emptyset$), τέτοια ώστε $\bigcup_{S_i \in C} S_i = U$. Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει η διαμέριση με την ελάχιστη πληθικότητα, θεωρούμε ότι το κόστος κάθε συνόλου S_i ισούται με 1.

Γραμμικό Πρόγραμμα

$$\text{minimize: } \sum_{j=1}^m w_j x_j$$

$$\text{subject to: } \sum_{j:e_i \in S_j} x_j = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, m$$

Set Packing (MIS)

Γραμμικό Πρόγραμμα

$$\begin{array}{ll} \text{minimize:} & \sum_{j=1}^m w_j x_j \\ \text{subject to:} & \sum_{j:e_i \in S_j} x_j \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, m \end{array}$$