1 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων $Navier - Stokes \quad (NS)$

1.1 Πεπερασμένες διαφορές

Οι πεπερασμένες διαφορές προσεγγίζουν τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται σε μια ΜΔΕ ως άθροισμα και διαφορά των τιμών της συνάρτησης σε ένα σύνολο από διακριτά σημεία. Συνήθως υποθέτουμε ότι τα σημεία αυτά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα όσον αφορά τις ανεξάρτητες μεταβλητές της.

1.1.1 Τύποι πεπερασμένων διαφορών σε μία διάσταση

Έστω x και h πραγματικοί αριθμοί συνήθως το h είναι ένα μικρό θετικό *βήμα* τότε έχουμε

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \tag{1}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \tag{2}$$

τους τύπους των *κεντρικών διαφορών* της πρώτης και δεύτερης παραγώγου. Οι τύποι αυτοί ονομάζονται και *δεύτερης τάξης* διότι το σφάλμα προσέγγισης είναι ανάλογο του h^2. Το σφάλμα των τύπων αυτών συνήθως ονομάζεται και *σφάλμα αποκοπής*. Η ένοια αυτή του *σφάλματος* είναι στενά συνδεδεμένη με το *σφάλμα* που εμφανίζεται στη σειρά του αναπτύγματος $Taylor$. Αξίζει να πούμε ότι είναι δυνατόν να έχουμε και μεγαλύτερης *τάξης* τύπους κεντρικών διαφορών που δεν θα χρησιμοποιήσουμε όμως στην παρούσα εργασία. Οι προηγούμενοι τύποι διακριτοποιούν την πρώτη και δεύτερη παρέγωγο σε μία διάσταση. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \tag{3}$$

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \tag{4}$$

1.1.2 Τύποι πεπερασμένων διαφορών σε ανώτερες διαστάσεις

Έστω $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^{\in}$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $f = f(x, y)$ να μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά $Taylor$

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x,y) + hf_x + kf_y + \frac{1}{2}\Big[h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\Big] + \\ + \frac{1}{6}\Big[h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}\Big] + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

για κάθε $(x, y) \in R^2$ και $h, k > 0$. Διαιρούμε το χωρίο $\mathcal{D}$ σε μικρά ορθογώνια με κόμβους στα σημεία $(x_0 + ih, y_0 + jk)$ για $i = 0, 1, \ldots, M_1$ και $j = 0, 1, \ldots, M_2$. Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενοι τύποι κεντρικών διαφορών είναι οι ακόλουθοι:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \tag{6}$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \tag{7}$$

$$\frac{\partial f^2(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \tag{8}$$

$$\frac{\partial f^2(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \tag{9}$$

$$\frac{\partial f^2(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4hk} + O(hk) \tag{10}$$

όπου $f_{i,j} = f(x_0 + ih, y_0 + jk)$. Οι προηγούμενες πεπερασμένες διαφορές διακριτοποιούν τις μερικές παραγώγους $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που υπάρχει και ο χρόνος σαν τρίτη διάσταση έχουμε:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial t} = \frac{f^{n+1}_{i,j} - f^n_{i,j}}{h} + O(h^2)$$

1.2 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων NS σε δύο διαστάσεις

Θεωρούμε τον φραγμένο τόπο $\mathcal{D}$ του R^2. Οι έξίσωσεις των Navier-Stokes σε δύο διαστάσεις εκφράζονται από τις ακόλουθες μερικές διαφορικές εξίσωσεις:

$$\Delta\Psi = -\Omega, \quad u\frac{\partial\Omega}{\partial x} + v\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\Delta\Omega \tag{11}$$

όπου:

- Ω η συνάρτηση του στροβιλισμού
- Ψ η συνάρτηση του ρεύματος
- Re ο αριθμός του Reynold και εκφράζει την ρευστότητα.
- Οι ποσότητες u, v είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας ως προς τις κατευθύνσεις x, y αντίστοιχα. Ισχύει $u = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$

Στην συνέχεια δίνουμε την διακριτοποίηση της (11) σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα με μήκος $h = 1/N$. Για την πρώτη εξίσωση της (11) έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta\Psi = -\Omega \quad \longrightarrow \quad & \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j}}{h^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j}}{h^2} = \Omega_{i,j} \\ & \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 4\Psi_{i,j}}{h^2} = \Omega_{i,j} \end{aligned} \tag{12}$$

Ομοίως η δεύτερη εξίσωση της (11) δίνει:

$$u\frac{\partial\Omega}{\partial x} + v\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\Delta\Omega$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad & \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2h}\frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}}{2h} - \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2h}\frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{2h} \\ = \quad & \frac{1}{Re}\frac{\Omega_{i+1,j} + \Omega_{i-1,j} + \Omega_{i,j+1} + \Omega_{i,j-1} - 4\Omega_{i,j}}{h^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Θέτουμε τώρα

$$u_{i,j} = \Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}, \quad v_{i,j} = \Psi_{i-1,j} - \Psi_{i+1,j}$$

Η εξίσωση (13) παίρνει την μορφή

$$\frac{u_{i,j}(\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}) + v_{i,j}(\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1})}{4} = \frac{1}{Re}(\Omega_{i+1,j} + \Omega_{i-1,j} + \Omega_{i,j+1} + \Omega_{i,j-1} - 4\Omega_{i,j})$$

και τελικά προκύπτει

$$\Omega_{i,j} = l_{i,j}\Omega_{i-1,j} + r_{i,j}\Omega_{i+1,j} + t_{i,j}\Omega_{i,j+1} + b_{i,j}\Omega_{i,j-1} \tag{14}$$

όπου

$$l_{i,j} = 1/4 + 1/16Re \cdot u_{i,j}, \quad r_{i,j} = 1/4 - 1/16Re \cdot u_{i,j}$$
$$t_{i,j} = 1/4 - 1/16Re \cdot v_{i,j}, \quad b_{i,j} = 1/4 + 1/16Re \cdot v_{i,j}$$

Οι εξισώσεις (12),(14) εκφράζουν το επαναληπτικό σχήμα για την αριθμητική λύση της ΜΔΕ (11). Ο πίνακας A του συστήματος είναι block τριδιαγώνιος με διαγώνιους πίνακες στις παραδιαγώνιους του. Οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Jacobi του συστήματος ως γνωστό δίνονται από τον τύπο

$$\mu_{i,j} = 2(\sqrt{l_{i,j}r_{i,j}}\cos\frac{i\pi}{M_1+1} + \sqrt{t_{i,j}b_{i,j}}\cos\frac{j\pi}{M_2+1}) \tag{15}$$

όπου $i = 1, 2, \ldots, M_1$ και $j = 1, 2, \ldots, M_2$ και στην γενική περίπτωση είναι μιγαδικές. Η βέλτιστη τιμή για την επίλυση του συστήματος με την επαναληπτική μέθοδο SOR μπορεί να βρεθεί από τον αλγόριθμο που αναπτύξαμε στη προηγούμενη παράγραφο.

1.2.1 Η τοπική τροποποιημένη SOR μέθοδος ($LMSOR$)

Την τοπική τροποποιημένη μέθοδο SOR την εισήγαγαν οι Ehrlich [5,6], Botta and Veldman [1] σε μια προσπάθεια της αύξησης του ρυθμού σύγκλισης της μεθόδου SOR. Η βασική ιδέα είναι να αφήσουμε τον χαλαρωτικό παράγοντα ω να αλλάζει από εξίσωση σε εξίσωση. Οι Cuo et. [10] συνδύασαν την τοπική SOR με κόκκινη και μαύρη διάταξη και παρατήρησαν ότι είναι κατάλληλη για παράλληλη επεξεργασία σε συνδεδεμένους πίνακες επεξεργαστών. Παρακάτω εξετάζουμε και γενικεύουμε την τοπική μέθοδο SOR χρησιμοποιόντας δύο διαφορετικά σύνολα παραμέτρων $\omega_{ij}, \omega'_{ij}$ για την χρήση των κόκκινων ($i+j$ άρτιος) και μαύρων ($i+j$ περιττός) σημείων, αντίστοιχα. Διακριτοποιώντας τις εξισώσεις έχουμε:

$$\Omega_{ij}^{(n+1)} = (1-\omega_{ij})\Omega_{ij}^{(n)} + \omega_{ij} J_{ij}\Omega_{ij}^{(n)}, \quad i+j \quad \text{άρτιος}$$

$$\Omega_{ij}^{(n+1)} = (1-\omega'_{ij})\Omega_{ij}^{(n)} + \omega'_{ij} J_{ij}\Omega_{ij}^{(n+1)}, \quad i+j \quad \text{περιττός}$$

με

$$J_{ij}\Omega_{ij}^{(n)} = l_{ij}^{(n)}\Omega_{i-1,j}^{(n)} + r_{ij}^{(n)}\Omega_{i+1,j}^{(n)} + t_{ij}^{(n)}\Omega_{i,j+1}^{(n)} + b_{ij}^{(n)}\Omega_{i,j-1}^{(n)}$$

και $l_{ij}^{(n)} = 1/4 + 1/16Reu_{ij}^{(n)}$, $r_{ij}^{(n)} = 1/4 - 1/16Reu_{ij}^{(n)}$, $t_{ij}^{(n)} = 1/4 - 1/16Rev_{ij}^{(n)}$, $b_{ij}^{(n)} = 1/4 + 1/16Rev_{ij}^{(n)}$, όπου $u_{ij}^{(n)} = \Psi_{i,j+1}^{(n)} - \Psi_{i,j-1}^{(n)}$, $v_{ij} = \Psi_{i-1,j}^{(n)} - \Psi_{i+1,j}^{(n)}$. Μια παρόμοια επαναληπτική μέθοδος ισχύει επίσης για τα Ψ_{ij}. Αν μ_{ij} πραγματικός, τότε οι βέλτιστες τιμές των $LMSOR$ παραμέτρων δίνονται από τους τύπους

$$\omega_{1,i,j} = \frac{2}{1-\overline{\mu}_{ij}\underline{\mu}_{ij} + \sqrt{(1-\overline{\mu}_{ij}^2)(1-\underline{\mu}_{ij}^2)}}, \ \omega_{2,i,j} = \frac{2}{1+\overline{\mu}_{ij}\underline{\mu}_{ij} + \sqrt{(1-\overline{\mu}_{ij}^2)(1-\underline{\mu}_{ij}^2)}},$$

όπου $\overline{\mu}_{ij}$ και $\underline{\mu}_{ij}$ υπολογίζονται από τους

$$\overline{\mu}_{ij} = 2\left(\sqrt{\ell_{ij}r_{ij}}\cos\pi h + \sqrt{t_{ij}b_{ij}}\cos\pi k\right), \underline{\mu}_{ij} = 2\left(\sqrt{\ell_{ij}r_{ij}}\cos\frac{\pi(1-h)}{2} + \sqrt{t_{ij}b_{ij}}\cos\frac{\pi(1-k)}{2}\right),$$

με $h = k = 1/\sqrt{N}$.

Αν μ_{ij} είναι φανταστικοί, τότε οι βέλτιστη τιμή των $LMSOR$ παραμέτρων δίνονται από τους τύπους

$$\omega_{1,i,j} = \frac{2}{1-\overline{\mu}_{ij}\underline{\mu}_{ij} + \sqrt{(1+\overline{\mu}_{ij}^2)(1+\underline{\mu}_{ij}^2)}}, \ \omega_{2,ij} = \frac{2}{1+\overline{\mu}_{ij}\underline{\mu}_{ij} + \sqrt{(1+\overline{\mu}_{ij}^2)(1+\underline{\mu}_{ij}^2)}}.$$

Αν $\mu_{ij} = \mu_{Rij} + i\mu_{Iij}$ είναι μιγαδικοί, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον γενικό αλγόριθμο που μελετήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

1.3 Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης NS σε τρεις διαστάσεις

Θεωρούμε τον τόπο $\mathcal{D} \times (0,T)$, όπου $\mathcal{D}$ είναι φραγμένο χωρίο του R^2. Η έξίσωση των Navier-Stokes σε τρεις διαστάσεις εκφράζεται από την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση:

$$\Delta\Psi = -\Omega, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{1}{Re}\Delta\Omega - u\frac{\partial\Omega}{\partial x} - v\frac{\partial\Omega}{\partial y} \tag{16}$$

Οι συναρτήσεις u, v είναι ορισμένες στο σύνορο $\partial\mathcal{D}$ σε κάθε χρονική στιγμή και ισχύουν:

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = u \tag{17}$$

Για την απλοποίηση των υπολογισμών υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις u, v είναι σταθερές. Διακριτοποιούμε τώρα την δεύτερη εξίσωση της (16) σε ένα πλέγμα με $\Delta x = h$, $\Delta y = k$, $\Delta t = s$. Επομένως σε κάθε σημείο $(i\Delta x, j\Delta y)$ και για τη χρονική στιγμή $n\Delta t$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\Psi^{n+1}_{i,j}-\Psi^{n}_{i,j}}{s} &= \frac{1}{Re}\Big(\frac{\Psi^{n+1}_{i+1,j}+\Psi^{n+1}_{i-1,j}-2\Psi^{n+1}_{i,j}}{h^2}+\frac{\Psi^{n+1}_{i,j+1}+\Psi^{n+1}_{i,j-1}-2\Psi_{i,j^{n+1}}}{k^2}\Big)\\ &- u\Big(\frac{\Psi^{n+1}_{i+1,j}-\Psi^{n+1}_{i-1,j}}{2h}\Big)-v\Big(\frac{\Psi^{n+1}_{i,j+1}-\Psi^{n+1}_{i,j-1}}{2k}\Big)\end{aligned} \tag{18}$$

Αν τώρα θέσουμε $\Delta x = \Delta x = h$ και $\dfrac{\Delta t}{Re\cdot h^2} = a_0, \quad \dfrac{\Delta t}{2\cdot h} = b_0$ προκύπτει το παρακάτω επαναληπτικό σχήμα:

$$\begin{aligned}(1+4a_0)\Psi^{n+1}_{i,j} &- (a_0+b_0u)\Psi^{n+1}_{i-1,j}-(a_0-b_0u)\Psi^{n+1}_{i+1,j}\\ &- (a_0+b_0v)\Psi^{n+1}_{i,j-1}-(a_0-b_0v)\Psi^{n+1}_{i,j+1}=\Psi^{n}_{i,j}\end{aligned} \tag{19}$$

Η εξίσωση (19), εκφράζει το επαναληπτικό σχήμα για την αριθμητική λύση της ΜΔΕ (16). Ο πίνακας A του συστήματος είναι block τριδιαγώνιος με διαγώνιους πίνακες στις παραδιαγώνιους του. Οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Jacobi του συστήματος ως γνωστό δίνονται από τον τύπο

$$\mu_{i,j} = \frac{2a_0}{1+4a_0}\Big[\sqrt{1-U^2}\cos\frac{i\pi}{M_1+1}+\sqrt{1-V^2}\cos\frac{j\pi}{M_2+1}\Big] \tag{20}$$

όπου

$$U = -\frac{b_0}{a_0}u, \quad V = \frac{b_0}{a_0}v, \quad i = 1,\dots,M_1, \quad j = 1,\dots,M_2$$

και στην γενική περίπτωση είναι μιγαδικές. Χρησιμοποιώντας τον γενικό αλγόριθμο μπορούμε να βρούμε την βέλτιστη τιμή ω_{opt} για την επίλυση του συστήματος με την επαναληπτική μέθοδο SOR.