Προηγμένοι Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Ν. Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περιεχόμενα

Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Συμβολισμός

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$$

$$u = u(x, y), \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Παραδείγματα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x = u + x^2 + y^2$$

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = exp(u)$$

Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (συν.)

Η τάξη μιας ΜΔΕ είναι η μεγαλύτερης τάξης παράγωγος στην εξίσωση.

$$
\begin{aligned}
u_x - b u_y &= 0 \quad \text{1ης τάξης} \\
u_{xx} + u_y &= 0 \quad \text{2ης τάξης} \\
u_{xxx} + u_{yyyy} &= 0 \quad \text{4ης τάξης}
\end{aligned}
$$

Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (συν.)

Γραμμικότητα

$$
\begin{aligned}
a(.)u_x + b(.)u_y &= c(.) \\
(.) \equiv (x, y) &\quad \text{γραμμική (linear)} \\
(.) \equiv (x, y, u) &\quad \text{ημιγραμμική (quasilinear)} \\
(.) \equiv (x, y, u, u_x, u_y) &\quad \text{μη γραμμική (nonlinear)}
\end{aligned}
$$

Παραδείγματα

$$
\begin{aligned}
u_x + bu_y = 0 &\quad \text{γραμμική} \\
u_x + uu_y = x^2 &\quad \text{ημιγραμμική} \\
u_x + (u_y)^2 = 0 &\quad \text{μη γραμμική}
\end{aligned}
$$

Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (συν.)

Πρόβλημα

$$u_y = u_{xx} \quad y > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u(x,0) = f(x) \quad y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{αρχικές συνθήκες}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) &= \phi_1(y) \quad x = 0, \quad y \geq 0 \\ u(1,y) &= \phi_2(y) \quad x = 1, \quad y \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{συνοριακές συνθήκες}$$

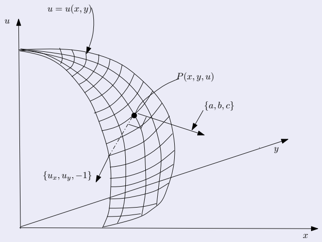
- Καλά τοποθετημένο πρόβλημα
  - μοναδική λύση

Πρώτης Τάξης ΜΔΕ

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

$$u = u(x,y)$$

$$du = u_x dx + u_y dy \quad \{a,b,c\} \equiv \{dx, dy, du\}$$



- Επιφάνεια λύση $u = u(x,y)$
- διάνυσμα $\{a,b,c\}$ εφάπτεται στη u
- διάνυσμα $\{u_x, u_y, -1\}$ κάθετο στη u στο σημείο $P(x,y,u)$

Δεύτερης Τάξης ΜΔΕ

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Laplace
$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$	Poison
$u_t = u_{xx}$	heat flow ή diffusion
$u_t = u_{xx} + u_{yy}$	heat flow ή diffusion
$u_t + uu_x = ku_{xx}$	Εξίσωση Burger
$u_{tt} = u_{xx}$	wave Εξίσωση

$b^2 - ac > 0$	υπερβολική
$b^2 - ac = 0$	παραβολική
$b^2 - ac < 0$	ελειπτική

Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες

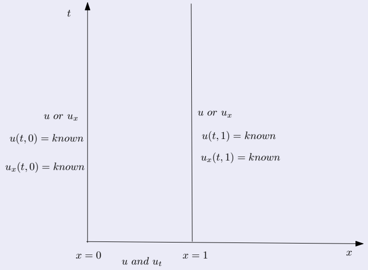
$$\alpha(x, y)u(x, y) + \beta(x, y)u_n(x, y) = \gamma(x, y)$$

$$u_n = \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{ορθογώνια στο σύνορο}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x \quad \text{ή} \quad u_y$$

Παραβολική Εξίσωση

$$u_t = u_{xx}$$



$$\alpha_1 u + \beta_1 u_x = \gamma_1 \quad \text{στο} \quad x = 0$$

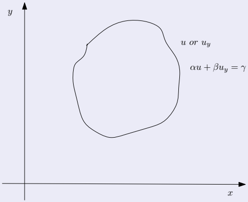
και

$$\alpha_2 u + \beta_2 u_x = \gamma_2 \quad \text{στο} \quad x = 1$$

με

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \leq 0, \quad \alpha_1 - \beta_1 > 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 > 0$$

Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες (συν.)



Dirichlet	$\beta = 0$	καθορισμός τιμής
Neumann	$\alpha = 0$	καθορισμός κλίσης
Cauchy	$\alpha = 0$ στη μια	καθορισμός τιμής
	$\beta = 0$ στην άλλη	και κλίσης
Robbins	α και $\beta \neq 0$	

Πεπερασμένες Διαφορές

$$u(x+h) = u(x) + hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} + \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} - \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + O(h^4)$$

Προσθέτοντας

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2}\{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\} + O(h^2)$$

Αφαιρώντας

$$u_x = \frac{1}{2h}\{u(x+h) - u(x-h)\} + O(h^2)$$

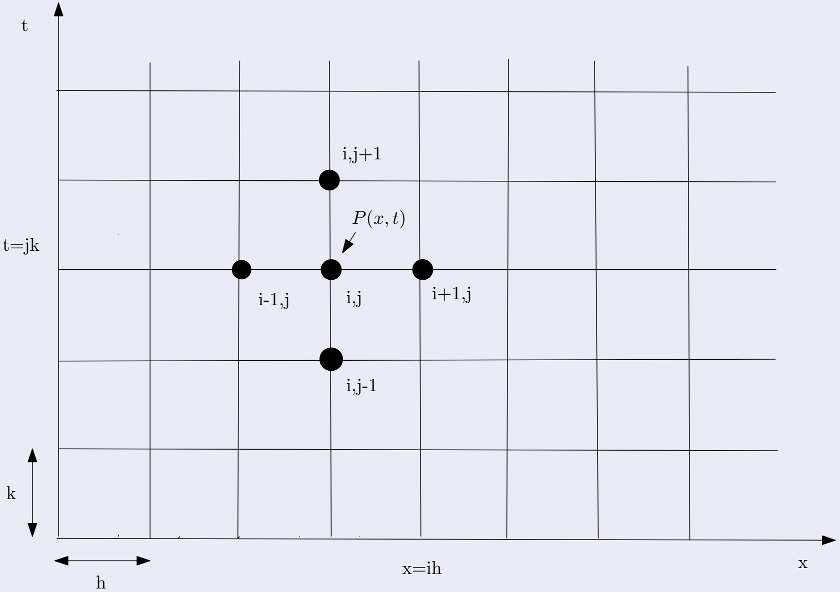
Επίσης

$$u_x = \frac{1}{h}\{u(x+h) - u(x)\} + O(h)$$

και

$$u_x = \frac{1}{h}\{u(x) - u(x-h)\} + O(h)$$

Πεπερασμένες Διαφορές (συν.)



Πεπερασμένες Διαφορές (συν.)

$$x = ih \quad t = jk$$

$$u_P \equiv u(x,t) \equiv u(ih, jk) \equiv u_{ij}$$

$$u_{xx}\,|_P = (u_{xx})_{ij} = \frac{u\{(i+1)h, jk\} - 2u\{ih, jk\} + u\{(i-1)h, jk\}}{h^2} + O(h^2)$$

ή

$$(u_{xx})_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

$$(u_t)_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} + O(k)$$

ή

$$(u_t)_{ij} = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{k} + O(k)$$

και

$$(u_t)_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2)$$

Πεπερασμένες Διαφορές (συν.)

Υπο μορφή μορίων

$$(u_{xx})_{ij} = \frac{1}{h^2}\left\{ \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & -- & \boxed{-2} & -- & \boxed{1} \\ i-1,j & & i,j & & i+1,j \end{array} \right\} + O(h^2)$$

$$(u_t)_{ij} = \frac{1}{2k}\left\{ \begin{array}{cc} \boxed{1} & i,j+1 \\ | & \\ \boxed{0} & i,j \\ | & \\ \boxed{-1} & i,j-1 \end{array} \right\} + O(k^2)$$

Πεπερασμένες Διαφορές (συν.)

$$(Du(x,t)) = u_t = L(t, x, D, D^2)u$$

$$Lu = u_{xx}$$

$$\text{ή} \quad Lu = u_{xx} + u_{yy}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{ή} \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$u(x, t+k) = u(x,t) + ku_t + \frac{k^2}{2!}u_{tt} + \frac{k^3}{3!}u_{ttt} + \cdots$$

$$= (1 + kD + \frac{k^2}{2!}D^2 + \frac{k^3}{3!}D^3 + \cdots)u(x,t)$$

$$\text{ή} \quad u(x, t+k) = exp(kD)u(x,t) \tag{1}$$

$$\text{ή} \quad u_{i,j+1} = exp(kD)u_{i,j} = exp(kL(x, t, D, D^2))u_{ij} \tag{2}$$

$$Eu(x) = u(x+h)$$

Πεπερασμένες Διαφορές (συν.)

$$\text{Από (1) έχουμε} \quad E = exp(kD)$$

$$\text{ή} \quad kD = lnE = \begin{cases} ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots \\ ln(1-\nabla)^{-1} = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots \end{cases}$$

όπου

$$\Delta u(x) = u(x+h) - u(x)$$

$$\nabla u(x) = u(x) - u(x-h)$$

και

$$E = 1 + \Delta, \quad E = (1-\nabla)^{-1}$$

Πεπερασμένες Διαφορές (συν.)

$$\text{Επίσης} \quad \delta = 2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right) \tag{3}$$

όπου

$$\delta u(x) = u(x+\frac{h}{2}) - u(x-\frac{h}{2}) = u_{i+1/2} - u_{i-1/2}$$

$$\delta^2 u(x) = \delta(\delta u(x)) = \delta(u_{i+1/2} - u_{i-1/2})$$

$$= \delta u_{i+1/2} - \delta u_{i-1/2} = (u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1})$$

$$= u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$$

$$\boxed{\delta^2 u_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}} \tag{4}$$

Πεπερασμένες Διαφορές (συν.)

Από (3) έχουμε

$$hD = 2 \sin h^{-1}(\frac{\delta}{2})$$

ή

$$D = \frac{2}{h} \sin h^{-1}(\frac{\delta}{2}) = \frac{1}{h}(\delta - \frac{1}{2^2 3!}\delta^3 + \frac{3^2}{2^4 5!}\delta^5 - \cdots)$$

Από (2) έχουμε

$$u_{i,j+1} = exp(kL(u, t, \frac{2}{h} \sin h^{-1}(\frac{\delta_x}{2}), (\frac{2}{h} \sin h^{-1} \frac{\delta_x}{2})^2))u_{ij}$$

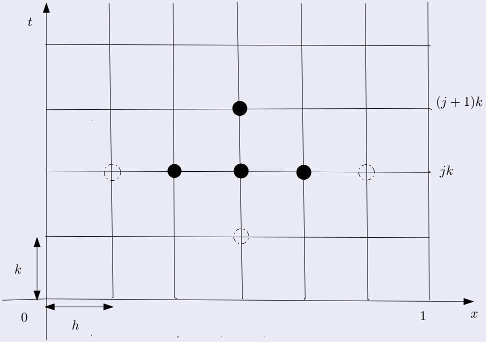
ή

$$u_{i,j+1} = exp(kL(u, t, D, D^2))u_{ij}.$$

Παραβολικές εξισώσεις σε μια διάσταση

$$\sigma(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \gamma(x,t)u$$

΄Αμεσες Μέθοδοι



Περίπτωση I: Σταθεροί Συντελεστές

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

$$u_{i,j+1} = exp(k\frac{\partial}{\partial t})u_{ij} = exp(kL)u_{ij} \tag{6}$$

όπου

$$L \equiv D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$D = \frac{2}{h}\sin h^{-1}\frac{\delta_x}{2} = \frac{1}{h}(\delta_x - \frac{1^2}{2^2 3!}\delta_x^3 + \frac{1^2 3^2}{2^4 5!}\delta_x^5 - \cdots) \tag{8}$$

και

$$D^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \cdots) \tag{9}$$

Από (6) λόγω (7) έχουμε

$$u_{i,j+1} = exp(kD^2)u_{ij} \tag{10}$$

Περίπτωση I: Σταθεροί Συντελεστές

Από (10) λόγω (9) έχουμε

$$u_{i,j+1} = exp[r(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \cdots)]u_{ij} =$$

$$[1+r(\delta_x^2-\frac{1}{12}\delta_x^4+\frac{1}{90}\delta_x^6-\cdots)+\frac{r^2}{2!}(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \cdots)^2+\frac{r^3}{3!}(\cdots)^3+\cdots]u_{ij}$$

όπου

$$r = k/h^2$$

ή

$$u_{i,j+1} = [(1 + r\delta_x^2 - \frac{r}{12}\delta_x^4 + \frac{r}{90}\delta_x^6 - \cdots)$$
$$+\frac{1}{2}(r^2\delta_x^4 - \frac{2r^2}{12}\delta_x^6 + \cdots) + \cdots]u_{ij}$$

ή

$$u_{i,j+1} = [1 + r\delta_x^2 + \frac{1}{2}r(r - \frac{1}{6})\delta_x^4 + \frac{1}{6}r(r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{15})\delta_x^6 + \cdots]u_{ij} \tag{11}$$

Περίπτωση Ι: Σταθεροί Συντελεστές

Προσεγγίζοντας την (11) έχουμε

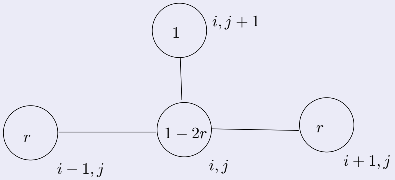
$$U_{i,j+1} = (1 + r\delta_x^2)U_{i,j} \tag{12}$$

ή

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + r(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

ή

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1 - 2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j} \tag{13}$$



Περίπτωση II: Συντελεστές εξαρτώμενοι από το x

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a(x) \neq 0 \quad \forall x$$

$$L \equiv aD^2$$

$$u_{i,j+1} = exp(ka_iD^2)u_{ij} = [1 + ka_iD^2 + \frac{1}{2}k^2a_iD^2(a_iD^2) + \cdots]u_{ij}$$

$$= [1 + ka_iD^2 + \frac{1}{2}k^2a_i(a_i''D^2 + 2a_i'D^3 + a_iD^4) + \cdots]u_{ij}$$

$$u_{i,j+1} = [1 + ka_i\frac{1}{h^2}(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \cdots) + \cdots]u_{ij}$$

$$U_{i,j+1} = (1 + ra_i\delta_x^2)U_{ij}, \quad r = k/h^2$$

$$U_{i,j+1} = ra_iU_{i-1,j} + (1 - 2ra_i)U_{ij} + ra_iU_{i+1,j} \tag{14}$$

όπου $a(x) = a(ih) = a_i$

Περίπτωση III: Self - adjoint

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$u_{i,j+1} = exp(kL)u_{ij} = exp(kD(a_i D))u_{ij} = [1 + kD(a_i D) + \cdots]u_{ij}$$

$$D \simeq \frac{1}{h}\delta_x$$

$$U_{i,j+1} = [1 + \frac{k}{h^2}\delta_x(a_i\delta_x)]U_{ij}. \tag{15}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\delta_x(a_i\delta_x)U_{ij} &= \delta_x(a_i(U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j})) \\ &= \delta_x(a_i U_{i+1/2,j}) - \delta_x(a_i U_{i-1/2,j}) \\ &= \underbrace{(a_{i+1/2}U_{i+1,j} - a_{i-1/2}U_{ij}) - (a_{i+1/2}U_{i,j} - a_{i-1/2}U_{i-1,j})} \end{aligned} \tag{16}$$

Περίπτωση III: Self - adjoint

Από (15) λόγω (16) έχουμε

$$U_{i,j+1} = U_{ij} + r[(a_{i+1/2}U_{i+1,j} - a_{i-1/2}U_{ij}) - (a_{i+1/2}U_{i,j} - a_{i-1/2}U_{i-1,j})].$$

ή

$$U_{i,j+1} = ra_{i-1/2}U_{i-1,j} + [1 - r(a_{i+1/2} + a_{i-1/2})]U_{ij} + ra_{i+1/2}U_{i+1,j} \tag{17}$$

Dufort - Frankel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2} \qquad (18)$$

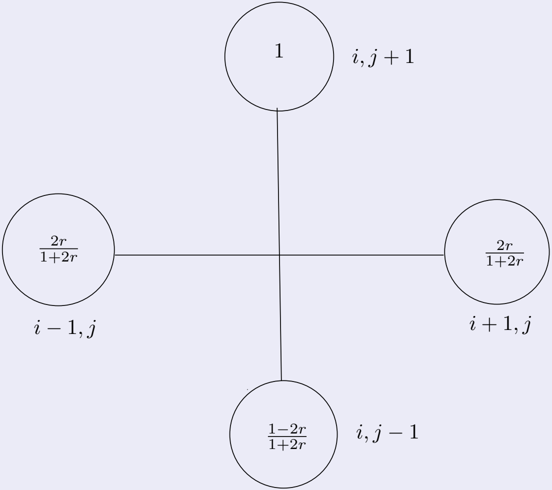
ή θέτοντας $U_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j+1} + U_{i,j-1})$

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} = \frac{U_{i-1,j} - (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) + U_{i+1,j}}{h^2}$$

ή

$$(1 + 2r)U_{i,j+1} = 2r(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + (1 - 2r)U_{i,j-1} \qquad (19)$$

Μέθοδος των Dufort-Frankel

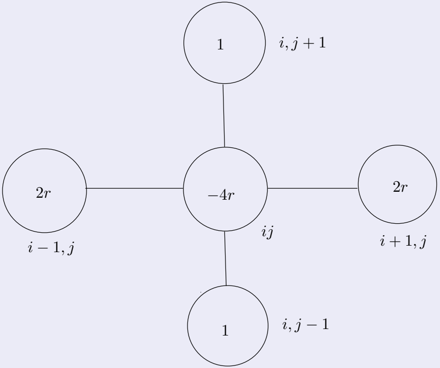


Richardson

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2}$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j-1} + 2r\left(U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}\right) \tag{20}$$



Τοπική ακρίβεια

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor έχουμε

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + k(\frac{\partial u}{\partial t})_{ij} + \frac{1}{2!}k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})_{ij} + \cdots$$

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + h(\frac{\partial u}{\partial x})_{ij} + \frac{1}{2!}h^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{ij} + \frac{1}{3!}h^3(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_{ij} + \frac{1}{4!}h^4(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_{ij} + \cdots$$

$$u_{i-1,j} = u_{ij} - h(\frac{\partial u}{\partial t})_{ij} + \frac{1}{2!}h^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{ij} - \frac{1}{3!}h^3(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_{ij} + \frac{1}{4!}h^4(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_{ij} - \cdots$$

Συνεπώς

$$u_{i,j+1} - (1-2r)u_{ij} - r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) =$$

$$k(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{ij} + \frac{1}{2}k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_{ij} + \cdots \quad (21)$$

$$z_{ij} = u_{ij} - U_{ij} \quad (22)$$

u_{ij} : ακριβής λύση ΜΔΕ

U_{ij} : ακριβής λύση εξισώσεως διαφορών

Τοπική ακρίβεια

Από τις (13), (21) και (22) έχουμε

$$z_{i,j+1} = (1-2r)z_{ij} + r(z_{i-1,j} + z_{i+1,j}) + \underbrace{\frac{1}{2}k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij}}_{\text{τοπικό σφάλμα αποκοπής}} + \cdots$$

ή

$$z_{i,j+1} = (1-2r)z_{ij} + r(z_{i-1,j} + z_{i+1,j}) + O(k^2 + kh^2) \qquad (23)$$

Έμμεσες Μέθοδοι (Implicit Methods)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(x, t, D, D^2)u$$

ή

$$u_{i,j+1} = exp(k\frac{\partial}{\partial t})u_{ij}$$

ή

$$u_{i,j+1} = exp(kL)u_{ij}$$

ή πολλαπλασιάζοντας επί $exp(-\frac{1}{2}kL)$

$$exp(-\frac{1}{2}kL)u_{i,j+1} = exp(\frac{1}{2}kL)u_{ij}. \tag{24}$$

Περίπτωση I: Σταθεροί Συντελεστές

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

οπότε

$$L \equiv D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Από (24) έχουμε

$$exp(-\frac{1}{2}kD^2)u_{i,j+1} = exp(\frac{1}{2}kD^2)u_{ij} \quad (25)$$

αλλά

$$D^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \cdots)$$

άρα η (25) γράφεται

$$(1 - \frac{1}{2}r\delta_x^2)U_{i,j+1} = (1 + \frac{1}{2}r\delta_x^2)U_{ij} \quad (26)$$

με σφάλμα αποκοπής της τάξης $O(k^3 + kh^2)$.

Περίπτωση I: Σταθεροί Συντελεστές

Εφαρμόζοντας τον τελεστή δ_x^2 (βλ. (2)) έχουμε από την (26) ότι

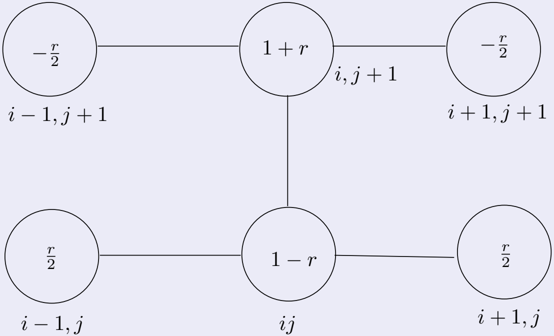
$$U_{i,j+1} - \frac{1}{2}r\big(U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}\big) =$$

$$= U_{i,j} + \frac{1}{2}r\big(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\big)$$

ή

$$-\frac{r}{2}U_{i-1,j+1} + (1+r)U_{i,j+1} - \frac{r}{2}U_{i+1,j+1}$$
$$= \frac{r}{2}U_{i-1,j} + (1-r)U_{i,j} + \frac{r}{2}U_{i+1,j}. \tag{27}$$

Μέθοδος των Crank - Nicolson



Μέθοδος του Douglas

Για μεγαλύτερη ακρίβεια

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12}\delta_x^2} \tag{28}$$

Η (24) λόγω της (28) γίνεται

$$[1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_x^2]U_{i,j+1} = [1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_x^2]U_{ij} \tag{29}$$

με τοπικό σφάλμα αποκοπής $O(k^3 + kh^4)$.

Περίπτωση Self-Adjoint

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}) \tag{30}$$

$$u_{i,j+1} = exp(kL)u_{ij}$$

$$exp(-\frac{1}{2}kL)u_{i,j+1} = exp(\frac{1}{2}kL)u_{ij}$$

$$L = D(aD), \quad D \simeq \frac{1}{h}\delta_x$$

$$(1 - \frac{1}{2}kL)U_{i,j+1} = (1 + \frac{1}{2}kL)U_{ij}$$

ή

$$[1 - \frac{r}{2}\delta_x(a_{i,j+1}\delta_x)]U_{i,j+1} = [1 + \frac{r}{2}\delta_x(a_{ij}\delta_x)]U_{ij} \tag{31}$$

$$-\frac{r}{2}a_{i-1/2,j+1}U_{i-1,j+1} + [1 + \frac{r}{2}(a_{i+1/2,j+1} + a_{i-1/2,j+1})]U_{i,j+1} - \frac{r}{2}a_{i+1/2,j+1}U_{i+1,j+1}$$

$$= \frac{r}{2}a_{i-1/2,j}U_{i-1,j} + [1 + \frac{r}{2}(a_{i+1/2,j} + a_{i-1/2,j})]U_{i,j} + \frac{r}{2}a_{i+1/2,j}U_{i+1,j} \tag{32}$$

Γενίκευση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_{i,j+1} = exp(kL)u_{i,j}, \quad L \equiv D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

ή

$$u_{i,j+1} = exp(k\lambda L)u_{ij}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$exp(-\frac{1}{2}k\lambda L)u_{i,j+1} = exp(\frac{1}{2}k\lambda L)u_{ij}$$

$$(1 - \frac{1}{2}r\lambda\delta_x^2)U_{i,j+1} = (1 + \frac{1}{2}r\lambda\delta_x^2)U_{ij}$$

ή

$$-r\lambda U_{i-1,j+1} + (1 + 2r\lambda)U_{i,j+1} - r\lambda U_{i+1,j+1}$$
$$= r(1-\lambda)U_{i-1,j} + [1 - 2r(1-\lambda)]U_{i,j} + r(1-\lambda)U_{i+1,j} \tag{33}$$

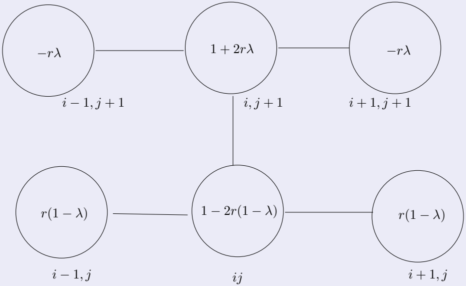
Μέθοδος O΄ Brian, Hyman και Kaplan

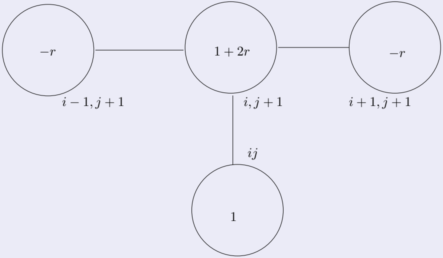
- Για $\lambda = 1$ η (33) γίνεται

$$-rU_{i-1,j+1} + (1+2r)U_{i,j+1} - rU_{i+1,j+1} = U_{ij} \tag{34}$$

- Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ η (33) παράγει τη μέθοδο των Crank - Nicolson
- Αν $\lambda = 0$, τότε προκύπτει η άμεση μέθοδος

Μέθοδος OΒrian, Hyman και Kaplan

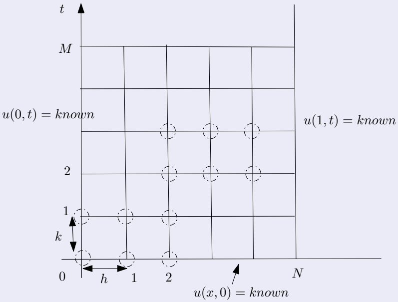




Παράδειγμα

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣ) (βλέπε Σχήμα)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Crank - Nicolson

$$h = \frac{1}{N}, \quad T = kM$$

Παράδειγμα

$$-\frac{r}{2}U_{i-1,j+1} + (1+r)U_{i,j+1} - \frac{r}{2}U_{i+1,j+1} =$$

$$= \underbrace{\frac{r}{2}U_{i-1,j} + (1-r)U_{ij} + \frac{r}{2}U_{i+1,j},}_{\equiv b_{ij}} \quad i = 1(1)N-1, j = 0(1)M \qquad (35)$$

$$(j=0) \quad -\frac{r}{2}U_{i-1,1} + (1+r)U_{i,1} - \frac{r}{2}U_{i+1,1} = b_{i,0}, \quad i = 1(1)N-1$$

$$\begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \mathbf{0} \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\frac{r}{2} \\ & \mathbf{0} & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{N-2,j+1} \\ U_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,j} + \frac{r}{2}U_{0,j+1} \\ b_{2,j} \\ b_{3,j} \\ \vdots \\ b_{N-2,j} \\ b_{N-1,j} + \frac{r}{2}U_{N,j+1} \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό των $U_{i,j+1}$ απαιτείται η λύση του τριδιαγώνιου συστήματος (33). Το σύστημα αυτό λύνεται με μία άμεση μέθοδο.

Συμβατότητα (Consistency)

- Αν $h, \quad k \to 0$, τότε τα σφάλματα αποκοπής $\to 0$
- Το μοντέλο των πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει την επιθυμητή ΜΔΕ και όχι κάποια άλλη ΜΔΕ

Σφάλμα αποκοπής της κλασικής αμέσου μεθόδου

$$\Sigma.A = \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{12}kh^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots$$

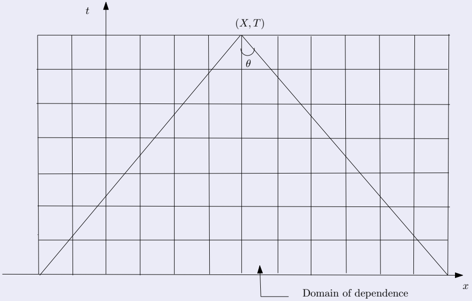
άρα αν $h, k \to 0$, τότε και $\Sigma.A \to 0$

Σύγκλιση

$$u(X,T) - U(X,T) \to 0 \tag{36}$$

αν $h, k \to 0$ και $i, j \to \infty$
με $ih = X$ και $jk = T$ σταθερά και

$$k = rh^2 \tag{37}$$



Σύγκλιση (συν.)

$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{k} = \tan^{-1}\frac{1}{rh}$$

$$h \to 0, \quad r = \text{σταθερό} \quad \theta \to \frac{\pi}{2}$$

$$\text{χωρίο εξάρτησης} \to 0 \leq t \leq T$$

Συνεπώς το πεδίο εξάρτησης της αμέσου μεθόδου συγκλίνει σε αυτό της ΜΔΕ αν ισχύει η $r = kh^2 \quad (r = kh^a, a > 1)$. Για τις εμμέσους μεθόδους είναι φανερό ότι το πεδίο εξάρτησης συμπίπτει με εκείνο της ΜΔΕ.

Σύγκλιση της αμέσου μεθόδου

Από την (23) έχουμε ότι

$$e_{i,j+1} = (1-2r)e_{i,j} + r(e_{i+1,j} + e_{i-1,j}) + O(k^2 + kh^2) \tag{38}$$

Αν

$$\boxed{0 < r \leq \tfrac{1}{2}} \tag{39}$$

τότε

$$|e_{i,j+1}| \leq (1-2r)|e_{i,j}| + r|e_{i+1,j}| + r|e_{i-1,j}| + A(k^2 + kh^2).$$

Έστω E_j το μέγιστο απόλυτο σφάλμα κατά μήκος της j χρονο - γραμμής, τότε

$$E_{j+1} \leq (1-2r)E_j + rE_j + rE_j + A(k^2 + kh^2)$$

$$\text{ή} \;\; E_{j+1} \leq E_j + A(k^2 + kh^2) \leq E_{j-1} + 2A(k^2 + kh^2) \leq \cdots$$

$$\text{ή} \;\; E_{j+1} \leq E_0 + jA(k^2 + kh^2), \quad E_0 = 0$$

$$E_{j+1} \leq jkA(k + h^2) = TA(k + h^2) \to 0$$

αν $h, k \to 0$ για σταθερά X, T.

Ευστάθεια

Να βρεθούν συνθήκες τέτοιες ώστε η $U_{ij} - \tilde{U}_{ij}$ να είναι φραγμένη αν $j \to \infty$ και k σταθερό.

Η μέθοδος του von Neumann για την κλασική άμεση μέθοδο

$$E(x) = \sum_j A_j e^{i\beta_j x}$$

$|\beta_j| = \text{συχνότητες}$. Έστω

$$E(x,t) \simeq e^{at} \cdot e^{i\beta x} \tag{40}$$

όπου $a = a(\beta)$ μιγαδικό. Για να μην αυξάνει το αρχικό σφάλμα θα πρέπει για $x \to \infty$, λόγω της (40)

$$|e^{at}| \leq 1$$

για όλα τα a, ή

$$|e^{ak}| \leq 1. \tag{41}$$

Ευστάθεια

Για την κλασική άμεση μέθοδο έχουμε

$$Nh = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t = 0 \quad E(ph) = E_{p0} \quad (p = 0, \cdots, N)$$

$$E_{p0} = \sum_{p=0}^{N} A_p e^{i\beta_j ph} \tag{42}$$

$$E_{p,q+1} = (1 - 2r)E_{pq} + r(E_{p+1,q} + E_{p-1,q}) \tag{43}$$

Θέτουμε

$$E_{pq} = e^{i\beta ph} \cdot e^{at}$$

ή

$$E_{pq} = e^{i\beta ph} \cdot \xi^q, \quad \xi = e^{ak} \tag{44}$$

Ευστάθεια (συν.)

Οπότε η (43) γράφεται

$$e^{i\beta ph}\cdot\xi^{q+1}=(1-2r)e^{i\beta ph}\cdot\xi^{q}+r(e^{i\beta(p+1)h}\cdot\xi^{q}+e^{i\beta(p-1)h}\cdot\xi^{q})$$

ή

$$\xi=(1-2r)+r(e^{i\beta h}+e^{-i\beta h})$$
$$=1-2r(1-\cos\beta h)=1-4r\sin^2\frac{\beta h}{2}$$

Αλλά, λόγω των (41) και (44) έχουμε $|\xi|\le 1$

Συνεπώς

$$|1-4r\sin^2\frac{\beta h}{2}|\le 1$$

$$\text{ή}\quad \boxed{0<r\le\tfrac{1}{2}} \tag{45}$$

Μέθοδος των πινάκων

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1-2r)U_{ij} + rU_{i+1,j}$$

με $\quad U_{0,j} = U_{N,j} = 0, \quad Nh = 1 \quad$ οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{N-1,j} \end{bmatrix}$$

$$\text{ή} \quad U_{j+1} = AU_j$$

$$\text{ή} \quad U_{j+1} = AU_j = A \cdot AU_{j-1} = \cdots = A^{j+1}U_0.$$

$$E = U - \tilde{U}$$

τότε

$$E_j = U_j - \tilde{U}_j = A^j(U_0 - \tilde{U}_0) = A^j E_0$$

$$\text{ή} \quad \|E_j\| \leq \|A^j\| \cdot \|E_0\| \leq \|A\|^j \cdot \|E_0\|$$

Μέθοδος των πινάκων (συν.)

$$\text{Αν} \quad \overbrace{\max_s |\lambda_s|}^{\text{ιδιοτιμές του A}} = S(A) \leq \|A\| < 1 \quad \text{τότε} \quad \lim_{j\to\infty} \|E_j\| = 0$$

Αλλά

$$A = I + rT_{N-1}, \quad T_{N-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \Large 0 \\ 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ \Large 0 & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

με

$$\lambda(T_{N-1}) = \lambda\{b, a, c\} = a + 2(\sqrt{bc}\cos(s\pi/N)), \quad s = 1, 2, \cdots, N-1$$

$$\text{άρα} \quad \lambda_s = -4\sin^2\frac{s\pi}{2N} \quad s = 1, 2, \cdots, N-1$$

$$\text{και} \quad |1 - 4r\sin^2\frac{s\pi}{2N}| < 1$$

$$\text{ή} \quad \boxed{0 < r \leq \tfrac{1}{2}} \tag{46}$$

Το θεώρημα ισοδυναμίας του Lax

Για ένα ¨καλά τοποθετημένο¨ πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών τιμών που χρησιμοποιεί μια παραβολική εξίσωση και για ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών που είναι συμβατό, τότε η ευστάθεια είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για σύγκλιση.

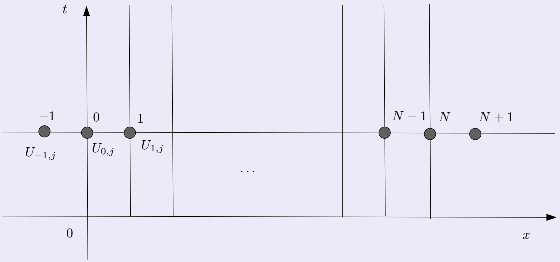
Συνοριακές συνθήκες με παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad x = 0, \quad t \ge 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u \quad x = 1, \quad t \ge 0 \tag{48}$$



Συνοριακές συνθήκες με παραγώγους(συν.)

$$\text{Από την (47) έχουμε} \quad \frac{U_{1,j} - U_{-1,j}}{2h} = U_{0,j} \tag{49}$$

$$\text{Από την (48) έχουμε} \quad \frac{U_{N+1,j} - U_{N-1,j}}{2h} = -U_{N,j} \tag{50}$$

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1-2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j} \tag{51}$$

Για $x = 0 \quad (i = 0)$ η (51) δίνει $\quad U_{0,j+1} = rU_{-1,j} + (1-2r)U_{0,j} + rU_{1,j}$
Απαλείφοντας το $U_{-1,j}$ από τις (49), (51)

$$U_{0,j+1} = [1 - 2r(1+h)]U_{0,j} + 2rU_{1,j}.$$

Όμοια για την άλλη συνοριακή συνθήκη. Από (46) και (47) έχουμε
$x = 1 \quad (i = N)$

$$U_{N,j+1} = rU_{N-1,j} + (1-2r)U_{N,j} + rU_{N+1,j}$$

και απαλείφοντας το $U_{N+1,j} \quad \rightarrow U_{N,j+1} = [1 - 2r(1+h)]U_{N,j} + 2rU_{N-1,j}.$

Παράδειγμα

Αν τα άκρα μιας θερμικά απομονωμένης ράβδου κρατούνται σε επαφή με πάγο και αν η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας δίνεται από την σχέση

1. $u = 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
2. $u = 2(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

Ζητείται να επιλυθεί αριθμητικά η παραβολική Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u = 0, \quad \text{για } x = 0, \quad x = 1, \quad 0 \leq t \leq 0.1 \quad$ (συνοριακές συνθήκες)
2. $$\left.\begin{array}{ll} u = 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u = 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{array} , t = 0 \right\} \text{ (αρχικές συνθήκες)}$$

Παράδειγμα (συν.)

Περίπτωση Ι:

$$\text{Έστω} \quad \left.\begin{array}{l} h = \frac{1}{10} \\ k = \frac{1}{1000} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{10}$$

Άρα

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10}(U_{i-1,j} + 8U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

άρα το υπολογιστικό μόριο είναι

Παράδειγμα (συν.)

Αν το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία $x = \frac{1}{2}$, τότε εργαζόμαστε μόνο για $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Με εφαρμογή της εξίσωσης () προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων

	$(i=0)$ $x=0$	$(i=1)$ 0.1	$(i=2)$ 0.2	$(i=3)$ 0.3	$(i=4)$ 0.4	$(i=5)$ 0.5	$(i=6)$ 0.6
$t = 0.000$	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000
0.001	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600	0.8000
0.002	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280	0.7960
0.003	0	0.2000	0.4000	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.01	0	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867	0.7281
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.02	0	0.1938	0.3781	0.5373	0.6486	0.6891	0.6486

Παράδειγμα (συν.)

Η αναλυτική λύση της Μ.Δ.Ε είναι η

$$u = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi}{2} \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

	Πεπ. Διαφορές	Αναλυτική	Διαφορά
	$x = 0.3$	$x = 0.3$	
$t = 0.005$	0.5971	0.5966	0.0005
$t = 0.01$	0.5822	0.5799	0.0023
$t = 0.02$	0.5376	0.5334	0.0039
$t = 0.10$	0.2472	0.2444	0.0028

Άρα η άμεση μέθοδος είναι ικανοποιητικά ακριβής.

Παράδειγμα (συν.)

Για $x = 0.5$ η ακρίβεια της αρ. λύσης δεν είναι τόσο καλή, γιατί υπάρχει ασυνέχεια στην αρχική τιμή $\frac{\partial u}{\partial x}$ από $+2$ έως -2 στο σημείο αυτό.

	Αρ. Λύση Πεπερ. Διαφ. $x = 0.5$	Αναλυτική Λύση $x = 0.5$	Διαφορά
$t = 0.005$	0.8597	0.8404	0.0193
$t = 0.01$	0.7867	0.7743	0.0124
$t = 0.02$	0.6891	0.6809	0.0082
$t = 0.10$	0.3056	0.3021	0.0035

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της ασυνέχειας ελαπώνεται όταν καθώς το t αυξάνει.

Αποδεικνύεται αναλυτικά ότι όταν οι συνοριακές τιμές είναι σταθερές το αποτέλεσμα των ασυνεχειών στις αρχικές τιμές και στις αρχικές παραγώγους στη λύση μιας παραβολικής εξίσωσης ελαπώνεται καθώς ο χρόνος t αυξάνει.

Παράδειγμα (συν.)

Περίπτωση II:

$$\text{Έστω} \quad \left.\begin{array}{l} h = \frac{1}{10} \\ k = \frac{5}{1000} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{k}{h^2} = 0.5$$

άρα $\quad U_{i,j+1} = \frac{1}{2}(U_{i-1,j} + U_{i+1,j})\quad$ και η αριθμητική λύση δίνεται στον παρακάτω Πίνακα

	$(i=0)$ $x=0$	$(i=1)$ 0.1	$(i=2)$ 0.2	$(i=3)$ 0.3	$(i=4)$ 0.4	$(i=5)$ 0.5	$(i=6)$ 0.6
$t=0.000$	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000
0.005	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.8000	0.8000
0.010	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7000	0.8000	0.7000
0.015	0	0.2000	0.4000	0.5500	0.7000	0.7000	0.7000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.100	0	0.0949	0.1717	0.2484	0.2778	0.7000	0.2778

Παράδειγμα (συν.)

	Αρ. Λύση Πεπερ. Διαφ. $x = 0.5$	Αναλυτική Λύση $x = 0.5$	Διαφορά
$t = 0.005$	0.6000	0.5966	0.0034
$t = 0.01$	0.6000	0.5799	0.0201
$t = 0.02$	0.5500	0.5534	0.0166
$t = 0.10$	0.2484	0.2444	0.0040

Παρατηρούμε ότι η λύση δεν είναι τόσο καλή προσέγγιση της λύσης της Μ.Δ.Ε όσο η προηγούμενη, είναι όμως αρκετά ικανοποιητική για τα περισσότερα τεχνολογικά προβλήματα.

Παράδειγμα (συν.)

Περίπτωση III:

$$\text{Έστω} \quad \left.\begin{array}{l} h = \frac{1}{10} \\ k = \frac{1}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{k}{h^2} = 1$$

Άρα $\quad U_{i,j+1} = U_{i-1,j} + U_{i+1,j} \quad$ και η αριθμητική λύση της Μ.Δ.Ε δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$(i=0)$ $x=0$	$(i=1)$ 0.1	$(i=2)$ 0.2	$(i=3)$ 0.3	$(i=4)$ 0.4	$(i=5)$ 0.5	$(i=6)$ 0.6
0.00	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8
0.01	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.6	0.8
0.02	0	0.2	0.4	0.6	0.4	1.0	0.4
0.03	0	0.2	0.4	0.2	1.2	−0.2	1.2
0.4	0	0.2	0.0	1.4	−1.2	2.6	−1.2

Αν θεωρηθεί σαν λύση η παραπάνω, τότε προφανώς δεν έχει κανένα νόημα, αν και είναι φυσικά η σωστή λύση όσον αφορά τις δεδομένες αρχικές και οριακές συνθήκες.

Παράδειγμα (συν.)

Οι παραπάνω περιπτώσεις I, II και III δείχνουν ότι η τιμή του λόγου $r = \frac{k}{n^2}$ παίζει σημαντικό ρόλο και αποδεικνύεται ότι για την άμεση αυτή μέθοδο πρέπει

$$0 < r \leq \frac{1}{2}$$

Διδιάστατες Παραβολικές Εξισώσεις

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \tag{52}$$

$$L \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x_1, x_2, t)\frac{\partial}{\partial x_i}) - c(x_1, x_2, t) \tag{53}$$

$$i)a_1, a_2 > 0, \quad ii)c \geq 0$$

$$X = ih, \quad Y = jh, \quad T = nk$$

$$u_{ij}^{(n+1)} = exp(kL)u_{ij}^{(n)} \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{2}{h}\sin h^{-1}\frac{\delta_{x_1}}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{2}{h}\sin h^{-1}\frac{\delta_{x_2}}{2}$$

όπου

$$\delta_{x_1} u_{ij}^{(n)} = u_{i+1/2,j}^{(n)} - u_{i-1/2,j}^{(n)}$$

$$\delta_{x_2} u_{ij}^{(n)} = u_{i,j+1/2}^{(n)} - u_{i,j-1/2}^{(n)}$$

Άμεσες Μέθοδοι

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \equiv D_1^2 + D_2^2 \tag{55}$$

όπου $\quad D_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad$ και $\quad D_2^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

$$\text{από την (55) έχουμε} \quad u_{ij}^{(n+1)} = exp(kD_1^2)exp(kD_2^2)u_{ij}^{(n)} \tag{56}$$

$$D_1^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_{x_1}^2 - \frac{1}{12}\delta_{x_1}^4 + \frac{1}{90}\delta_{x_1}^6 - \cdots) \tag{56$'$}$$

$$D_2^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_{x_2}^2 - \frac{1}{12}\delta_{x_2}^4 + \frac{1}{90}\delta_{x_2}^6 - \cdots) \tag{56$''$}$$

από τις (56),(56)$'$,(56)$''$ έχουμε

$$u_{ij}^{(n+1)} = [1 + r\delta_{x_1}^2 + \frac{1}{2}r(r - \frac{1}{6})\delta_{x_1}^4 + \cdots][1 + r\delta_{x_2}^2 + \frac{1}{2}r(r - \frac{1}{6})\delta_{x_2}^4 + \cdots]u_{ij}^{(n)} \tag{57}$$

$$r = k/h^2.$$

ʹΑμεσες Μέθοδοι

από την (57) έχουμε $$u_{ij}^{(n+1)} = [1 + r(\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2)]u_{ij}^{(n)} + O(k^2 + kh^2) \quad (58)$$

ή $$u_{ij}^{(n+1)} = (1 + r\delta_{x_1}^2)(1 + r\delta_{x_2}^2)u_{ij}^{(n)} + O(k^2 + kh^2) \quad (59)$$

Self-Adjoint $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}(a_1(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(a_2(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_2})$$

$$L \equiv D_1(a_1 D_1) + D_2(a_2 D_2)$$

$$u_{ij}^{(n+1)} = exp(kD_1(a_1 D_1))exp(kD_2(a_2 D_2))u_{ij}^{(n)} \quad (60)$$

Άμεσες Μέθοδοι

Αν $D_1(a_1 D_1) \simeq \frac{1}{h^2}\delta_{x_1}(a_1\delta_{x_1})$ και $D_2(a_2 D_2) \simeq \frac{1}{h^2}\delta_{x_2}(a_2\delta_{x_2})$
όπου

$$\delta_{x_1}(a_1\delta_{x_1})U_{ij}^{(n)} = a_{1,i+1/2,j}^{(n)}(U_{i+1,j}^{(n)} - U_{i-1,j}^{(n)}) - a_{1,i-1/2,j}^{(n)}(U_{ij}^{(n)} - U_{i-1,j}^{(n)})$$

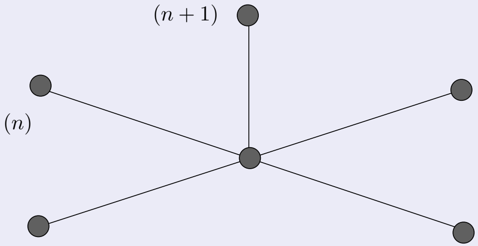
και

$$\delta_{x_2}(a_2\delta_{x_2})U_{ij}^{(n)} = a_{2,i,j+1/2}^{(n)}(U_{i,j+1}^{(n)} - U_{i,j-1}^{(n)}) - a_{2,i,j-1/2}^{(n)}(U_{ij}^{(n)} - U_{i,j-1}^{(n)})$$

τότε η (60) δίνει

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(n+1)} = [1 - r\{a_{1,i+1/2,j}^{(n)} + a_{1,i-1/2,j}^{(n)} + a_{2,i,j-1/2}^{(n)} + a_{2,i,j+1/2}^{(n)}\}] \\ U_{ij}^{(n)} + ra_{1,i+1/2,j}^{(n)}U_{i+1,j}^{(n)} + ra_{1,i-1/2,j}^{(n)}U_{i-1,j}^{(n)} + ra_{2,i,j-1/2}^{(n)}U_{i,j-1}^{(n)} \\ +ra_{2,i,j+1/2}^{(n)}U_{i,j+1}^{(n)} + O(k^2 + kh^2). \end{aligned} \tag{61}$$

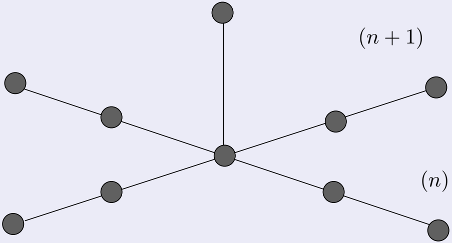
Άμεσες Μέθοδοι



Άμεσες Μέθοδοι

Ανάλογα

$$U_{ij}^{(n+1)} = [1 + r\delta_{x_1}(a_1\delta_{x_1})][1 + r\delta_{x_2}(a_2\delta_{x_2})]U_{ij}^{(n)} \quad (62)$$



Ευστάθεια

$$e^{\alpha t} e^{i\beta x_1} e^{i\gamma x_2} \tag{63}$$

όπου β, γ αυθαίρετοι πραγματικοί και α μιγαδικός.
Το αρχικό σφάλμα $(t = 0)$ $e^{i\beta x_1} e^{i\gamma x_2}$ δεν αυξάνεται με το χρόνο αν

$$\left|e^{\alpha k}\right| \leq 1 \quad \text{για όλα τα} \quad \alpha \tag{64}$$

$$\text{Από τις (59),(64) έχουμε } \xi = e^{\alpha k} = 1 - 4r(\sin^2 \frac{\beta h}{2} + \sin^2 \frac{\gamma h}{2}).$$

Για ευστάθεια $|\xi| \leq 1$ ή

$$r \leq \frac{1}{2(\sin^2 \frac{\beta h}{2} + \sin^2 \frac{\gamma h}{2})} \tag{65}$$

ή

$$r \leq 1/4.$$

Έμμεσες Μέθοδοι Εναλλασόμενων Διευθύνσεων (ADI)

$$u_{ij}^{(n+1)} = exp(kL)u_{ij}^{(n)} \tag{66}$$

$$L \equiv D_1^2 + D_2^2 \tag{67}$$

$$exp[-\frac{1}{2}k(D_1^2 + D_2^2)]u_{ij}^{(n+1)} = exp[\frac{1}{2}k(D_1^2 + D_2^2)]u_{ij}^{(n)} \tag{68}$$

όπου $D_1^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_{x_1}^2 - \frac{1}{12}\delta_{x_1}^4 + \frac{1}{90}\delta_{x_1}^6 - \cdots),\ D_2^2 = \frac{1}{h^2}(\delta_{x_2}^2 - \frac{1}{12}\delta_{x_2}^4 + \frac{1}{90}\delta_{x_2}^6 - \cdots)$

Από την (68) έχουμε

$$exp(-\frac{1}{2}r\delta_{x_1}^2)exp(-\frac{1}{2}r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = exp(\frac{1}{2}r\delta_{x_1}^2)exp(\frac{1}{2}r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}$$

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1 + \frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1 + \frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)} + O(k^3 + kh^3). \tag{69}$$

Η (69) είναι ανάλογη της Crank-Nicolson

$$(1-\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1+\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)\underbrace{(1-\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)^{-1}(1+\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}}_{U_{ij}^{(n+1/2)}}$$

$$(1-\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} = (1+\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}$$

και

$$(1-\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1+\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} \tag{70}$$

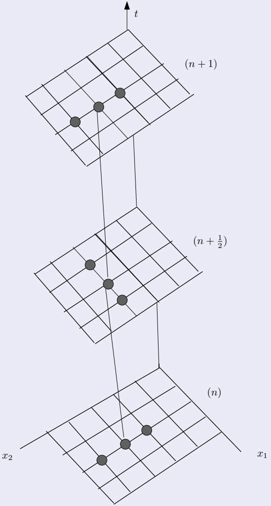
Η (70) είναι γνωστή σαν η μέθοδος των Peaceman-Rachford (PR).
Εφαρμόζοντας τους τελεστές των κεντρικών διαφορών λαμβάνουμε

$$-\frac{r}{2}U_{i-1,j}^{(n+1/2)} + (1+r)U_{ij}^{(n+1/2)} - \frac{r}{2}U_{i+1,j}^{(n+1/2)} = \frac{r}{2}U_{i,j-1}^{(n)} + (1-r)U_{ij}^{(n)} + \frac{r}{2}U_{i,j+1}^{(n)}$$

και

$$-\frac{r}{2}U_{i,j-1}^{(n+1)}+(1+r)U_{ij}^{(n+1)}-\frac{r}{2}U_{i,j+1}^{(n+1)} = \frac{r}{2}U_{i-1,j}^{(n+1/2)}+(1-r)U_{ij}^{(n+1/2)}+\frac{r}{2}U_{i+1,j}^{(n+1/2)}. \tag{71}$$

Έμμεσες Μέθοδοι Εναλλασόμενων Διευθύνσεων (ADI)



Έμμεσες Μέθοδοι Εναλλασόμενων Διευθύνσεων (ADI)

Θέτοντας

$$D_1^2 = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\delta_{x_1}^2}{1 + \frac{1}{12}\delta_{x_1}^2}$$

$$D_2^2 = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\delta_{x_1}^2}{1 + \frac{1}{12}\delta_{x_2}^2}$$

και αναπτύσσοντας η (68) δίνει

$$[1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2][1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]u_{ij}^{(n+1)}$$

$$= [1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2][1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]u_{ij}^{(n)} + O(k^3 + kh^4) \qquad (72)$$

$$\text{ή} \;\; [1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2]U_{ij}^{(n+1/2)} = [1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]U_{ij}^{(n)} \qquad (73)$$

$$\text{και} \;\; [1 - \frac{1}{2}(r - \frac{1}{6})\delta_{x_2}^2]U_{ij}^{(n+1)} = [1 + \frac{1}{2}(r + \frac{1}{6})\delta_{x_1}^2]U_{ij}^{(n+1/2)}$$

Η (73) είναι γνωστή σαν η μέθοδος των Mitchell και Fairweather (MF).

´Αλλες μέθοδοι

$$(1-\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = \underbrace{(1+\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1-\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)^{-1}(1+\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}}_{U_{ij}^{(n+1/2)}}$$

οπότε

$$(1-\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} = (1+\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1+\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}$$

$$(1-\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = U_{ij}^{(n+1/2)} \quad \text{D'Yakonov} \tag{74}$$

από την (70) έχουμε $(1-\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2)(1-\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = (1+\frac{r}{4}^2\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)}$

οπότε

$$(1-r\delta_{x_1}^2)U_{ij}^{(n+1/2)} = (1+r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n)} \quad \text{Douglas}$$

$$(1-r\delta_{x_2}^2)U_{ij}^{(n+1)} = U_{ij}^{(n+1/2)} + r\delta_{x_2}^2U_{ij}^{(n)} \quad \text{Rachford} \tag{75}$$

Απαλείφοντας την $U_{ij}^{(n+1/2)}$, παρατηρούμε ότι όλες οι ανωτέρω ADI μέθοδοι είναι ειδικές περιπτώσεις της

$$(1 - a\delta_{x_1}^2)(1 - a\delta_{x_2}^2)U^{(n+1)} = [1 + b(\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2) + c\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2]U^{(n)} \tag{76}$$

για συγκεκριμένες τιμές των a, b και c.
Η εξίσωση σφάλματος της (76) είναι η

$$(1 - a\delta_{x_1}^2)(1 - a\delta_{x_2}^2)E_{pq}^{(n+1)} = [1 + b(\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2) + c\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2]E_{pq}^{(n)}. \tag{77}$$

Θέτοντας

$$E_{ij}^{(n)} = e^{\alpha nk} \cdot e^{i\beta ph} \cdot e^{i\gamma qh}$$

$$\text{Από την (77) έχουμε } \xi = e^{\alpha k} = \frac{1 - b(S_\beta^2 + S_\gamma^2) + cS_\beta^2 S_\gamma^2}{(1 + aS_\beta^2)(1 + aS_\gamma^2)}, \tag{78}$$

$$\text{όπου } S_\beta^2 = 4\sin^2\frac{\beta x_1}{2}, \quad S_\gamma^2 = 4\sin^2\frac{\gamma x_2}{2}. \tag{79}$$

Ευστάθεια των ADI Μεθόδων

Για ευστάθεια απαιτείται

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

οπότε η (78) δίνει

$$-(a-b)(S_\beta^2 + S_\gamma^2) - (a^2 + c)S_\beta^2 S_\gamma^2 \leq 2$$

και

$$-(a+b)(S_\beta^2 + S_\gamma^2) - (a^2 - c)S_\beta^2 S_\gamma^2 \leq 0$$

οι οποίες εύκολα αποδεικνύεται ότι ικανοποιούνται για τις ADI μεθόδους για $0 \leq S_\beta^2, S_\gamma^2 \leq 4$. Συνεπώς όλες οι ADI μέθοδοι είναι ευσταθείς για $r > 0$.

Άσκηση 1

Υπολογίσατε με την άμεσο μέθοδο την Λ.Π.Δ της Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

με αρχικές συνθήκες $\quad u = 1 \quad \text{όταν} \;\; t = 0,\; 0 < x < 1$

και συνοριακές συνθήκες $\quad u = 0, \quad \text{για} \;\; x = 0 \;\; \text{και} \;\; x = 1, t \geq 0.$

Αναλυτική λύση της είναι η

$$u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t} \sin(2n+1)\pi x$$

Θέσατε

$$h = 0.1, \quad r = 0.1 \quad (\text{οπότε} k = rh^2 = 0.001)$$

και βρείτε την ακρίβεια της λύσης για $t = 0.0001(0.001)0.2$

Συγκρίνατε τις λύσεις στο $x = 0.1$ για μικρές τιμές του t.

Σχολιάσατε τα συμπεράσματά σας.

Άσκηση 1 - Λύση

$r = 0.1$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10}(U_{i-1,j} + 8U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη συμμετρία της λύσης σε σχέση με το $x = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$h = 0.1, \quad r = 0.1 \quad (k = rh^2 = 0.001)$$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10}(U_{i-1,j} + 8U_{ij} + U_{i+1,j})$$

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
(Λ.Π.Δ)0.000	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
(Α.Λ)0.000	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
⋮	⋮					
(Λ.Π.Δ)0.001	0	0.9000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
(Α.Λ)0.001	0	0.9047	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
⋮	⋮					

Άσκηση 1 - Λύση(συν.)

(Λ.Π.Δ)0.002	0	0.8200	0.9900	1.0000	1.0000	1.0000
(Α.Λ)0.002	0	0.8862	0.9984	1.0000	1.0000	1.0000
⋮	⋮					
(Λ.Π.Δ)0.005	0	0.6561	0.9335	0.9927	0.9996	1.0000
(Α.Λ)0.005	0	0.6827	0.9545	0.9973	0.9999	1.0000
⋮	⋮					
(Λ.Π.Δ)0.010	0	0.5113	0.8283	0.9566	0.9919	0.9979
(Α.Λ)0.010	0	0.5205	0.8427	0.9661	0.9953	0.9992
⋮	⋮					
(Λ.Π.Δ)0.200	0	0.0546	0.1038	0.1428	0.1679	0.1766
(Α.Λ)0.200	0	0.0547	0.1040	0.1431	0.1682	0.1769

Υπάρχει ασυνέχεια στην περιοχή του σημείου (0,0) και γιάυτό δεν έχουμε καλή ακρίβεια στο $x = 0$ για μικρές τιμές του t. Αυτό όμως τείνει να εξαφανισθεί καθώς το t αυξάνει, πράγμα το οποίο είναι χαρακτηριστικό στις παραβολικές εξισώσεις.

Άσκηση 2

Εφαρμόσατε την μέθοδο των Crank-Nikolson για τον υπολογισμό της αριθμητικής λύσης της Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

1. $u = 0 \quad \text{όταν} \; x = 0, \; x = 1, \; t \geq 0$
2. $u = 2x \quad \text{όταν} \; 0 \geq x \geq \frac{1}{2}, \; t = 0$
3. $u = 2(1 - x) \quad \text{όταν} \; \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \; t = 0$

Άσκηση 2 - Λύση

Έστω

$$h = \frac{1}{10} \quad \text{και} \quad r = 1$$

Αφού

$$r = \frac{k}{h^2} \Rightarrow k = rh^2 = \frac{1}{100}$$

Ο τύπος (1) της μεθόδου Crank-Nikolson δίνει

$$-U_{i-1,j+1} + 4U_{i,j+1} - U_{i+1,j+1} = U_{i-1,j} + U_{i+1,j}$$

Άσκηση 2 - Λύση(συν.)

Αν εφαρμόσουμε το υπολογιστικό μόριο της μεθόδου για την πρώτη χρονογραμμή έχουμε

Για $j = 0$

$$
\begin{array}{lll}
i = 1 & -0 + 4u_1 - u_2 & = 0 + 0.4 \\
i = 2 & -u_1 + 4u_2 - u_3 & = 0.2 + 0.6 \\
i = 3 & -u_2 + 4u_3 - u_4 & = 0.4 + 0.8 \\
i = 4 & -u_3 + 4u_4 - u_5 & = 0.6 + 1.0 \\
i = 5 & -2u_4 + u_5 & = 0.8 + 0.8
\end{array}
$$

ή

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & & & \\
-1 & 4 & 1 & & \\
 & -1 & 4 & -1 & \\
 & & -1 & 4 & -1 \\
 & & & -2 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix}
$$

Άσκηση 2 - Λύση(συν.)

Η λύση του ανωτέρω 5×5 συστήματος είναι

$$u = \begin{bmatrix} 0.1984 \\ 0.3956 \\ 0.5834 \\ 0.7381 \\ 0.7691 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Εφαρμόστε τη μέθοδο των Crank-Nikolson για τον υπολογισμό της αριθμητικής λύσης της Μ.Δ.Ε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

με αρχικές συνθήκες $u = \sin \pi x, \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$

και συνοριακές συνθήκες $u = 0 \text{ για } x = 0, \quad x = 1, \quad t > 0$

Αξιολογήστε την αναλυτική λύση και υπολογίστε το αριθμητικό σφάλμα στην αριθμητική λύση.

Άσκηση 3 - Λύση

Η λύση για $x = 0(0.1)0.5$, $r = 1$ δίνεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
(Λ.Π.Δ)0.01	0	0.2802	0.5329	0.7335	0.8623	0.9067
(Α.Λ)0.01	0	0.2800	0.5325	0.7330	0.8617	0.9060
(Λ.Π.Δ)0.02	0	0.2540	0.4832	0.6651	0.7818	0.8221
(Α.Λ)0.02	0	0.2537	0.4825	0.6641	0.7807	0.8209
(Λ.Π.Δ)0.10	0	0.1160	0.2207	0.3037	0.3571	0.3754
(Α.Λ)0.10	0	0.1152	0.2191	0.3015	0.3545	0.3727

	Αρ. Λύση Πεπερ. Διαφ. $x = 0.5$	Αναλυτική Λύση $x = 0.5$	Ποσοστιαίο Λάθος
$t = 0.01$	0.9067	0.9067	0.08
$t = 0.02$	0.8221	0.8209	0.015
$t = 0.10$	0.3754	0.3727	0.72

Άσκηση 4

Η συνάρτηση u ικανοποιεί την

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

και οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h_1(u - v_1), \quad x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -h_2(u - v_2), \quad x = 1,$$

όπου h_1, h_2, v_1, v_2 θετικοί αριθμοί.

Άσκηση 4 (συν.)

- Αν οι συνοριακές συνθήκες προσεγγίζονται από κεντρικές διαφορές αποδείξτε ότι μια αναλυτική λύση είναι

$$
\begin{aligned}
u_{0,j+1} &= \{1 - 2r(1 + h_1\delta x)\}u_{0,j} + 2ru_{1,j} + 2rh_1 v_1 \delta x, \\
u_{i,j+1} &= ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}, \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1), \\
u_{N,j+1} &= 2ru_{N-1,j} + \{1 - 2r(1 + h_2\delta x)\}u_{N,j} + 2rh_2 v_2 \delta x,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
N\delta x = 1
$$

$$
r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}.
$$

Άσκηση 4 (συν.)

- Αν οι συνοριακές συνθήκες προσεγγίζονται από προς τα εμπρός διαφορές στο $x = 0$ και από προς τα πίσω διαφορές στο $x = 1$, αποδείξτε ότι μια άλλη λύση είναι

$$
\begin{aligned}
u_{i,j} &= \{1 - 2r + r/(1 + h_1\delta x)\}u_{1,j} + ru_{2,j} + rh_1 v_1 \delta x/(1 + h_1\delta x),\\
u_{0,j} &= (u_{i,j+1} + h_1 v_1 \delta x)/(1 + h_1 \delta x),\\
u_{i,j+1} &= ru_{i-1,j} + (1 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j},\ (i = 2, 3, \ldots, N - 2)\\
u_{N-1,j+1} &= \{1 - 2r + r/(1 + h_2\delta x)\}u_{N-1,j} + ru_{N-2,j} +\\
&\qquad + rh_2 v_2 \delta x/(1 + h_2 \delta x),\\
u_{N,j+1} &= (u_{n-1,j+1} + h_2 v_2 \delta x)/(1 + h_2 \delta x).
\end{aligned}
$$

Άσκηση 5

Ομοιογενής ράβδος θερμικά απομονωμένη έχει αρχική θερμοκρασία τη στιγμή $t = 0$ 0^o C. Το ένα της άκρο είναι θερμικά απομονωμένο, ενώ το άλλο θερμαίνεται με σταθερό ρυθμό. Είναι γνωστό ότι οι θερμοκρασία στα διάφορα σημεία της ράβδου, δίνεται από την λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; (0 < x < \frac{1}{2}),$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$u = 0 \text{ όταν } t = 0 \, (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ στο } x = 0, \; t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f \text{ στο } x = \frac{1}{2}, \; t > 0$$

Άσκηση 5 (συν.)

Λύστε αριθμητικά το πρόβλημα με $f = 1$ χρησιμοποιώντας

1. μια άμεση μέθοδο με $h = 0.1$ και $r = \frac{1}{4}$,
2. μια έμμεση μέθοδο με $h = 0.1$ και $r = 1$.

Άσκηση 5 - Λύση

Η λύση που προκύπτει από την άμεση μέθοδο, της οποίας οι εξισώσεις είναι

$$
\begin{aligned}
u_{0,j+1} &= \frac{1}{2}(u_{0,j} + u_{1,j}),\\
u_{i,j+1} &= \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j})\ (i = 1, 2, 3, 4),\\
u_{5,j+1} &= \frac{1}{2}(u_{4,j} + u_{5,j} + 0.1)
\end{aligned}
$$

φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.01	0.0000	0.0000	0.0008	0.0078	0.0367	0.1094
0.02	0.0009	0.0027	0.0103	0.0313	0.0767	0.1571
0.03	0.0062	0.0104	0.0248	0.0554	0.1095	0.1934
0.05	0.0291	0.0364	0.0594	0.1007	0.1636	0.2509
0.10	0.1169	0.1265	0.1556	0.2044	0.2735	0.3631
0.50	0.9150	0.9250	0.9550	1.0050	1.0750	1.1650
1.00	1.9167	1.9250	1.9550	2.0050	2.0750	2.1650

Άσκηση 5 - Λύση (συν.)

Η λύση με τη μέθοδο Crank-Nicolson είναι

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.01	0.0003	0.0006	0.0022	0.0083	0.0309	0.1155
0.02	0.0023	0.0039	0.0108	0.0302	0.0770	0.1540
0.03	0.0077	0.0115	0.0252	0.0552	0.1080	0.1925
0.05	0.0301	0.0373	0.0597	0.1004	0.1627	0.2499
0.10	0.1172	0.1268	0.1557	0.2043	0.2732	0.3628
0.50	0.9150	0.9250	0.9550	1.0050	1.0750	1.1650
1.00	1.9150	1.9250	1.9550	2.0050	2.0750	2.1650

Άσκηση 5 - Λύση (συν.)

Η αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$u = 2t + \frac{1}{2}\left\{\frac{12x^2-1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t}\cos 2n\pi x\right\}$$

$$= 2\sqrt{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ierfc\frac{(2n+1-2x)}{4\sqrt{t}} + ierfc\frac{(2n+1+2x)}{4\sqrt{t}}\right\},$$

και παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα

t	$x=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0075	0.0000	0.0000	0.0006	0.0053	0.0286	0.0977
0.01	0.0000	0.0002	0.0017	0.0101	0.0399	0.1128
0.03	0.0074	0.0117	0.0264	0.0573	0.1115	0.1954
0.05	0.0307	0.0381	0.0610	0.1023	0.1653	0.2526
0.10	0.1186	0.1282	0.1573	0.2061	0.2751	0.3647
0.50	0.9167	0.9267	0.9567	1.0067	1.0767	1.1667
1.00	1.9167	1.9267	1.9567	2.0067	2.0767	2.1667

Άσκηση 5 - Λύση (συν.)

t	Αναλυτική Λύση $x = 0.3$	Άμεση Λύση $x = 0.3$	Ποσοστιαίο Λάθος	Crank-Nicolson Λύση $x = 0.3$	Ποσοστιαίο Λάθος
0.0075	0.0053	0.0031	−41.5		
0.01	0.0101	0.0078	−22.8	0.0083	−17.8
0.05	0.1023	0.1007	−1.56	0.1004	−1.85
0.10	0.2061	0.2044	−0.82	0.2043	−0.87
0.50	1.0067	1.0050	−0.17	1.0050	−0.17
1.00	2.0067	2.0050	−0.08	2.0050	−0.08

´Ασκηση 5 - Λύση (συν.)

Οι λύσεις των πεπερασμένων διαφορών είναι αρκετά ακριβείς για μεγάλες τιμές του t.

Το αποτέλεσμα του εκθετικού μέρους της αναλυτικής λύσης είναι αμελητέο για $t > 0.1$.

Η διαφορά μεταξύ της αναλυτικής λύσης και της λύσης των πεπερασμένω διαφορών για $t > 0.1$ είναι

$$0.0017 = \frac{0.01}{6} = \frac{(h)^2}{6}.$$

Άσκηση 6

Η θερμοκρασία ψύξης u ενός νάυλον νήματος που είναι τυλιγμένο σε ένα περιστρεφόμενο μασούρι δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, \ (0 \leq r \leq 1),$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$u = 1, \quad t = 0 \quad \forall r,$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = 0$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial r} = -F(t), \quad r = 1,$$

όπου α μια σταθερά και $F(t)$ μια εμπειρική συνάρτηση του t.

Άσκηση 6 (συν.)

Για $r_i = i\delta r,\ n\delta r = 1,\ t_j = j\delta t$, και δεδομένου ότι οι συνοριακές συνθήκες αναπαρίστανται από προσεγγίσεις κεντρικών διαφορών (represented by central-difference approximations), δείξτε ότι η αριθμητική λύση του προβλήματος με τη μέθοδο Crank-Nicolson είναι

$$\alpha\frac{(u_{0,j+1} - u_{0,j})}{\delta t} = \frac{2}{(\delta r)^2}(u_{1,j+1} - u_{0,j+1} + u_{1,j} - u_{0,j})$$

$$\begin{aligned}\alpha\frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{\delta t} &= \frac{1}{2(\delta r)^2}\{(1 + \frac{1}{2i})u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + \\ &+ (1 - \frac{1}{2i})u_{i-1,j+1}(1 + \frac{1}{2i})u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + (1 - \frac{1}{2i})u_{i-1,j}\} \\ &(i = 1, 2, \cdots, n-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\frac{(u_{n,j+1} - u_{n,j})}{\delta t} &= \frac{1}{(\delta r)^2}\{(1 + \frac{1}{2i})u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + \\ &+ (1 - \frac{1}{2i})u_{i-1,j+1} + (1 + \frac{1}{2i})u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + (1 - \frac{1}{2i})u_{i-1,j}\}\end{aligned}$$

Άσκηση 7

Λύστε την εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$u = 1,\ 0 \leq x \leq 1\ t = 0,$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u,\ x = 0\ \forall t,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u,\ x = 1\ \forall t.$$

Άσκηση 7 - Λύση

Για $r = \frac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
u_{0,j+1} &= \frac{1}{2}(0.9u_{0,j} + u_{1,j}), \\
u_{i,j+1} &= \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\ (i = 1, 2, 3, 4))
\end{aligned}
$$

και χρησιμοποιώντας την συμμετρία στο $x = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$u_{5,j=1} = \frac{1}{4}(2u_{4,j} + 2u_{5,j}).$$

Για $t = r(h)^2 = 1/400$ (στο τέλος της πρώτης χρονοσφραγίδας) οι τιμές του u είναι

$$
\begin{aligned}
u_{0,1} &= \frac{1}{2}(0.9 + 1) = 0.95, \\
u_{1,1} &= \frac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1 = u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = u_{5,1}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 7 - Λύση

Στο τέλος της δεύτερης χρονοσφραγίδας είναι

$$
\begin{aligned}
u_{0,2} &= \frac{1}{2}(0.9 \times 0.95 + 1) = 0.9275, \\
u_{1,2} &= \frac{1}{4}(0.95 + 2 + 1) = 0.9875, \\
u_{2,2} &= \frac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1 = u_{3,2} = u_{4,2} = u_{5,2}
\end{aligned}
$$

Όμοια υπολογίζονται και για τις υπόλοιπες χρονοσφραγίδες και αναπαρίστανται στον παρακάτω πίνακα.

Άσκηση 7 - Λύση

t	$i = 0$ $x = 0$	1 0.1	2 0.2	3 0.3	4 0.4	5 0.5
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0025	0.9500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.9275	0.9875	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0075	0.9111	0.9756	0.9969	1.0000	1.0000	1.0000
0.0100	0.8978	0.9648	0.9923	0.9992	1.0000	1.0000
0.0125	0.8864	0.9549	0.9872	0.9977	0.9998	1.0000
0.0150	0.8764	0.9459	0.9818	0.9956	0.9993	0.9999
0.0175	0.8673	0.9375	0.9762	0.9931	0.9985	0.9996
0.0200	0.8590	0.9296	0.9708	0.9902	0.9974	0.9991
...						
...						
0.1000	0.7175	0.7829	0.8345	0.8718	0.8942	0.9017
0.2500	0.5542	0.6048	0.6452	0.6745	0.6923	0.6983
0.5000	0.3612	0.3942	0.4205	0.4396	0.4512	0.4551
1.0000	0.1534	0.1674	0.1786	0.1867	0.1917	0.1933

Άσκηση 7 - Λύση

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες είναι

$$u = 4\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{sec\alpha_n}{(3+4\alpha_n^2)}e^{-4\alpha_n{}^2t}\cos 2\alpha_n(x-\frac{1}{2})\} \quad (0 < x < 1),$$

όπου α_n είναι οι θετικές ρίζες της

$$\alpha\tan\alpha = \frac{1}{2}.$$

Η αναλυτική λύση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Άσκηση 7 - Λύση

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0025	0.9460	0.9951	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.9250	0.9841	0.9984	0.9999	1.0000	1.0000
0.0075	0.9093	0.9730	0.9950	0.9994	1.0000	1.0000
0.0100	0.8965	0.9627	0.9905	0.9984	0.9998	1.0000
0.0125	0.8854	0.9532	0.9855	0.9967	0.9994	0.9999
0.0150	0.8755	0.9444	0.9802	0.9945	0.9988	0.9996
0.0175	0.8668	0.9362	0.9748	0.9919	0.9979	0.9992
0.0200	0.8585	0.9286	0.9695	0.9891	0.9967	0.9985
...						
...						
0.1000	0.7176	0.7828	0.8342	0.8713	0.8936	0.9010
0.2500	0.5546	0.6052	0.6454	0.6747	0.6924	0.6984
0.5000	0.3619	0.3949	0.4212	0.4403	0.4519	0.4558
1.0000	0.1542	0.1682	0.1794	0.1875	0.1925	0.1941

Άσκηση 7 - Λύση

	Αρ. Λύση Πεπερ. Διαφ. $x = 0.2$	Αναλυτική Λύση $x = 0.2$	Ποσοστιαίο Λάθος
$t = 0.005$	1.0000	0.9984	0.16
$t = 0.050$	0.9126	0.9120	0.07
$t = 0.010$	0.8345	0.8342	0.04
$t = 0.250$	0.6452	0.6454	-0.03
$t = 0.500$	0.4205	0.4212	-0.16
$t = 1.000$	0.1786	0.1794	-0.45

Η λύση των πεπερασμένων διαφορών είναι αρκετά ακριβής για τις μικρές τιμές του r.

Άσκηση 8

Λύστε τη προηγούμενη άσκηση χρησιμοποιώντας μια άμεση μέθοδο και εφαρμόζοντας μια προς τα εμπρός διαφορά για την συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$.

Άσκηση 8 - Λύση

Για $i = 1$

$$u_{1,j+1} = u_{i,j} + r\big(u_{0,j} - 2u_{1,j} + u_{2,j}\big).$$

Η συνοριική συνθήκη στο $x = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u$, σε μορφή προς τα εμπρος διαφοράς είναι

$$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\delta x} = u_{0,j},$$

συνεπώς

$$u_{0,j} = u_{1,j}/(1 + h).$$

και

$$u_{1,j+1} = \left(1 - 2r + \frac{r}{1+h}\right) u_{1,j} + ru_{2,j}.$$

Άσκηση 8 - Λύση (συν.)

Για $r = \frac{1}{4}$ και $h = 0.1$

$$
\begin{aligned}
u_{1,j+1} &= \frac{8}{11}u_{1,j} + \frac{1}{4}u_{2,j}, \\
u_{0,j+1} &= \frac{10}{11}u_{1,j+1} \\
u_{i,j+1} &= \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \ (i = 2, 3, 4), \\
u_{5,j+1} &= \frac{1}{4}(2u_{4,j} + 2u_{5,j}) \text{ λόγω συμμετρίας}
\end{aligned}
$$

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων με αρχική τιμή του $u = 1$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Άσκηση 8 - Λύση (συν.)

t	$x = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0025	0.8884	0.9773	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.8734	0.9607	0.9943	1.0000	1.0000	1.0000
0.0075	0.8612	0.9473	0.9873	0.9986	1.0000	1.0000
0.0100	0.8507	0.9358	0.9801	0.9961	0.9996	1.0000
0.0125	0.8415	0.9256	0.9730	0.9930	0.9989	0.9998
0.0150	0.8331	0.9164	0.9662	0.9895	0.9976	0.9993
0.0175	0.8255	0.9080	0.9596	0.9857	0.9960	0.9985
0.0200	0.8184	0.9003	0.9532	0.9817	0.9941	0.9973
...						
...						
0.1000	0.6869	0.7556	0.8102	0.8498	0.8738	0.8818
0.2500	0.5206	0.5727	0.6444	0.6444	0.6628	0.6689
0.5000	0.3283	0.3611	0.4063	0.4063	0.4063	0.4218
1.0000	0.1305	0.1435	0.1540	0.1615	0.1661	0.1677

Άσκηση 8 - Λύση (συν.)

	Αρ. Λύση Πεπερ. Διαφ.	Αναλυτική Λύση	Ποσοστιαίο Λάθος
	$x = 0.2$	$x = 0.2$	
$t = 0.005$	0.9943	0.9984	-0.4
$t = 0.050$	0.8912	0.9120	-2.3
$t = 0.010$	0.8102	0.8342	-2.9
$t = 0.250$	0.6142	0.6454	-4.8
$t = 0.500$	0.3873	0.4212	-8.0
$t = 1.000$	0.1540	0.1794	-14.2

Παρ΄ολο που αυτή η λύση δεν είναι τόσο ακριβής όσο η προηγούμενη, είναι ικανοποιητικά καλή για πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Άσκηση 9

Λύστε την άσκηση 6 με τη μέθοδο Crank-Nicolson

Άσκηση 9 - Λύση

Αυτή η μέθοδος αναπαριστά την

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ως

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\{\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{(h)^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(h)^2}\},$$

η οποία γράφεται

$$-ru_{i-1,j+1}+(2+2r)u_{i,j+1}-ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j+1} = ru_{i-1,j}+(2-2r)u_{i,j}+u_{i+1,j}. \quad \text{(I)}$$

Άσκηση 9 - Λύση (συν.)

Η συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$ ως κεντρική διαφορά γράφεται

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = u_{0,j},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$u_{-1,j} = u_{1,j} - 2hu_{0,j}$$
$$u_{-1,j+1} = u_{1,j+1} - 2hu_{0,j+1}$$

Οι δυο τελευταίες εξισώσεις μας επιτρέπουν να απαλείψουμε τους όρους $u_{-1,j}$ και $u_{-1,j+1}$ από την εξίσωση που προκύπτει θέτοντας $i = 0$ στην I.
Η συνοριακή συνθήκη στο $x = 1$ υπολογίζεται με όμοιο τρόπο, αν και σε αυτό το πρόβλημα είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί η συμμετρία στο $x = \frac{1}{2}$, π.χ. $u_{6,j} = u_{4,j}$.

Άσκηση 9 - Λύση (συν.)

Για $r = 1$ και $h = 0.1$

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1u_{0,j+1} - u_{1,j+1} &= -0 \cdot 1u_{0,j} + u_{1,j},\\
-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} &= u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\ (i = 1, 2, 3, 4),\\
-u_{4,j+1} + 2u_{5,j+1} &= u_{4,j}.
\end{aligned}$$

Για την πρώτη χρονοσφραγίδα γίνονται

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1u_0 - u_1 &= 0.9,\\
-u_0 + 4u_1 - u_2 &= 2.0,\\
-u_1 + 4u_2 - u_3 &= 2.0,\\
-u_2 + 4u_3 - u_4 &= 2.0,\\
-u_3 + 4u_4 - u_5 &= 2.0,\\
-u_4 + 2u_5 &= 1.0.
\end{aligned}$$

'Ασκηση 9 - Λύση (συν.)

Η λύση φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα

t	$i = 0$	1	2	3	4	5
0.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.01	0.8908	0.9707	0.9922	0.9979	0.9994	0.9997
0.02	0.8624	0.9293	0.9720	0.9900	0.9964	0.9979
...						
...						
0.10	0.7179	0.7834	0.8349	0.8720	0.8944	0.9018
0.25	0.5547	0.6054	0.6458	0.6751	0.6929	0.6989
0.50	0.3618	0.3949	0.4212	0.4404	0.4520	0.4559
1.00	0.1540	0.1680	0.1793	0.1874	0.1923	0.1940

ʹΑσκηση 9 - Λύση (συν.)

	Αρ. Λύση Πεπερ. Διαφ. $x = 0.2$	Αναλυτική Λύση $x = 0.2$	Ποσοστιαίο Λάθος
$t = 0.01$	0.9922	0.9905	0.17
$t = 0.05$	0.9131	0.9120	0.12
$t = 0.10$	0.8349	0.8342	0.08
$t = 0.25$	0.6458	0.6454	0.06
$t = 0.50$	0.4212	0.4212	0.00
$t = 1.00$	0.1793	0.1794	-0.06