Αριθμητική Ανάλυση

Διδάσκων: *Καθηγητής* Ν. Μισυρλής

ΕΚΠΑ

22 Νοεμβρίου 2018

Επαναληπτικές Μέθοδοι για την επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ είναι μη ιδιάζων πίνακας και $\mathbf{x},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Επαναληπτικές Μέθοδοι

Οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται όταν ο πίνακας **A** είναι :

- Μεγάλης τάξης ($\sim 10^3 - 10^6$)
- Αραιός
- Συγκεκριμένης δομής

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{Gx} + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \tau\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})$$

Ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A})}_{\mathbf{G}_\tau}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\tau\mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_\tau}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\mathbf{G}_\tau}_{\text{επαναλ. πίνακας}} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_\tau$$

Γραμμική στατική Επαναληπτική μέθοδος 1ου βαθμού

Για $\tau = \mathbf{1}$

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots \tag{1}$$

όπου

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} \quad \text{και} \quad \mathbf{c} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}$$

$\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$ αυθαίρετο,

$$\mathbf{x}^{(1)},\ \mathbf{x}^{(2)},\ \mathbf{x}^{(3)},\ \ldots$$

Σύγκλιση της Επαναληπτικής Μεθόδου

Θεώρημα 4.1.1

Η επαναληπτική μέθοδος

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots$$

συγκλίνει αν και μόνον αν

$$\rho(\mathbf{G}) < 1 \tag{2}$$

όπου

$$\rho(\mathbf{G}) = \max_{\mathbf{i}} |\lambda_{\mathbf{i}}|, \quad \text{η φασματική ακτίνα}$$

$$\lambda_{\mathbf{i}} \qquad \text{ιδιοτιμές του } \mathbf{G}$$

Απόδειξη

Έστω $\mathbf{x}$ το όριο της ακολουθίας $\mathbf{x}^{(k)}$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$ και
$\mathbf{e}^{(k)}$ το διάνυσμα του σφάλματος στην $\mathbf{k}$ επανάληψη

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$$

Αφού

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

προκύπτει ότι

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}}_{\mathbf{e}^{(k+1)}} = \mathbf{G}\underbrace{\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\right)}_{\mathbf{e}^{(k)}}$$

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{G}\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{G}^{2}\mathbf{e}^{(k-1)} = \cdots = \mathbf{G}^{k+1}\mathbf{e}^{(0)}$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{G}^{k}\mathbf{e}^{(0)} \tag{3}$$

Άρα $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{0}$ ή λόγω της (3) αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\mathbf{G}^{k}\mathbf{e}^{(0)}\right) = \mathbf{0}$ για κάθε αυθαίρετο $\mathbf{e}^{(0)}$.

..Απόδειξη

Συνεπώς από προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $\lim_{k\to\infty} \mathbf{G}^k = \mathbf{0}$ είναι η $\rho(\mathbf{G}) < 1$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\rho(\mathbf{G}) < 1$, τότε ο $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ είναι μη ιδιάζων και το σύστημα $(\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{x} = \mathbf{k}$ έχει μία και μοναδική λύση.

Αν όμως $\rho(\mathbf{G}) < 1$ τότε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{G}^k = \mathbf{0}$ ή $\lim_{k\to\infty} \| \mathbf{G}^k \| = \mathbf{0}$.

Επειδή $\| \mathbf{G}^k \mathbf{e}^{(0)} \| \leq \| \mathbf{G}^k \| \| \mathbf{e}^{(0)} \|$ συνεπάγεται ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbf{G}^k \mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{0}$, οπότε από την (3) προκύπτει ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{0}$ ή $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, δηλαδή ότι η ε.μ. (1) συγκλίνει.

Σύγκλιση της ε.μ.

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη :

$$\rho(\mathbf{G}) < 1$$

- Ικανή συνθήκη :

$$||G||_{\alpha} < 1$$

Κριτήριο διακοπής της σύγκλισης

k επανάληψη $\qquad\qquad$ $k+1$ επανάληψη

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(k+1)}$$

$$||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}||_\alpha < \epsilon\,, \qquad \epsilon = \frac{1}{2}10^{-d}$$

ή

$$\frac{||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}||_\alpha}{||\mathbf{x}^{(k+1)}||_\alpha} < \epsilon\,, \qquad \epsilon = \frac{1}{2}10^{-d}$$

όπου $\alpha = 1$ ή 2 ή ∞.

Ταχύτητα σύγκλισης μιας επαναληπτικής μεθόδου

- Στην πράξη εκτός από την εξασφάλιση της σύγκλισης μιας ε.μ., μας ενδιαφέρει η ταχύτητα με την οποία συγκλίνει η μέθοδος που χρησιμοποιούμε. Με άλλα λόγια επιθυμούμε να μελετήσουμε την ταχύτητα με την οποία $e^{(k)} \to 0$ για $k \to \infty$.
- Από την (3) έχουμε ότι αν $x^{(0)} \neq x$, τότε

$$\frac{\| e^{(k)} \|}{\| e^{(0)} \|} \leq \| G^k \| . \tag{4}$$

- Έτσι η $\| G^k \|$ δίνει το μέγεθος με το οποίο η *norm* του σφάλματος έχει ελαπωθεί σε ένα κλάσμα έστω ϱ της $\| e^{(0)} \|$.
- Η ελάπωση αυτή μπορεί να επιτευχθεί αν διαλέξουμε το k έτσι ώστε

$$\| G^k \| \leq \varrho. \tag{5}$$

Μέση ταχύτητα σύγλισης

- Για όλα λοιπόν τα αρκετά μεγάλα k ώστε

$$\| G^k \| \leq 1$$

η παραπάνω ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$k \geq \left\lceil \frac{-\log \varrho}{-\frac{1}{k} \log \|G^k\|} \right\rceil \tag{6}$$

όπου $\lceil \xi \rceil$ συμβολίζει τον ελάχιστο ακέραιο μεγαλύτερο του ξ.

- Η (6) δίνει τον ελάχιστο αριθμό επαναλήψεων για τη σύγκλιση της (1) Παρατηρούμε ότι ο αριθμός αυτός είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την ποσότητα $(-\frac{1}{k} log \|G^k\|)$.
- Έτσι οδηγούμαστε στον ορισμό της *μέσης ταχύτητας* σύγκλισης που είναι η ποσότητα

$$R_k(G) = -\frac{1}{k} log \| G^k \| . \tag{7}$$

Ασυμπτωτική ταχύτητα σύγλισης

- Ορίζουμε ως *ασυμπτωτική ταχύτητα* σύγκλισης ή *ταχύτητα σύγκλισης*, την ποσότητα

$$R(G) = \lim_{k\to\infty} R_k(G) = -log\rho(G) \tag{8}$$

καθόσον μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\rho(G) = \lim_{k\to\infty}(\| G^k \|^{\frac{1}{k}}).$$

- Για μια (όχι και τόσο καλή) προσέγγιση του αριθμού των επαναλήψεων που χρειάζεται η (1) για να συγκλίνει χρησιμοποιείται, σύμφωνα με την (6), ο τύπος

$$k \simeq \frac{-log\rho}{R(G)}. \tag{9}$$

Συμπέρασμα

- Από τον ανωτέρω τύπο και την (8) συμπεραίνουμε ότι όσο μικρότερη είναι η φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα G τόσο ταχύτερα θα συγκλίνει ασυμπτωτικά η επαναληπτική μέθοδος.
- Ωστόσο για να εκτιμήσουμε την αποτελεσματικότητα μιας επαναληπτικής μεθόδου θα πρέπει να λαβουμε υπόψη τόσο την ταχύτητα σύγκλισής της όσο και την υπολογιστική πολυπλοκότητα που απαιτεί η κάθε επανάληψη.

Βασική διάσπαση του πίνακα **A**

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C_L} - \mathbf{C_U}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \cdot & \\ & \text{\huge 0} & & & \cdot \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C_L} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ -a_{21} & 0 & & \text{\huge 0} & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Βασική διάσπαση του πίνακα $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C_L} - \mathbf{C_U}$$

$$\mathbf{C_L} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ -a_{21} & 0 & & \text{\Large 0} & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C_U} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{2n} \\ & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{3n} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Χρήσιμες μορφές πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα στους τύπους των επαναληπτικών μεθόδων

$$(D\,x)_i = a_{ii}x_i \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$(C_L\,x)_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$(C_U\,x)_i = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Θέτουμε

$$L = D^{-1}C_L$$

και

$$U = D^{-1}C_U$$

τότε έχουμε

Χρήσιμες μορφές πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα στους τύπους των επαναληπτικών μεθόδων

Θέτουμε

$$L = D^{-1} C_L$$

και

$$U = D^{-1} C_U$$

τότε έχουμε

$$(D^{-1}x)_i = \frac{1}{a_{ii}} x_i \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$(L\,x)_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$(U\,x)_i = -\sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Βασικές Επαναληπτικές Μέθοδοι

Ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{10}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A})}_{\mathbf{G}_\tau}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\tau \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_\tau} \tag{11}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\mathbf{G}_\tau}_{\text{επαναλ. πίνακας}} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_\tau$$

Επαναληπτική μέθοδος Επιταχυντική Jacobi (Jacobi Overrelaxation (JOR))

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{12}$$

Αν στην (12) διαλέξουμε τον $\mathbf{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{R} = \mathbf{D}$ τότε προκύπτει

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})}_{\mathcal{B}_\tau}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\tau \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_\tau} \tag{13}$$

ή

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{B}_\tau \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_\tau, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{14}$$

Αναλύοντας περισσότερο την (14) λαμβάνουμε

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = [(1 - \tau)\mathbf{I} + \tau \mathcal{B}]\mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{c}, \tag{15}$$

όπου

$$\mathcal{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_L, \quad \mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_U \quad \text{και} \quad \mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}. \tag{16}$$

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi(J)

Αν $\tau = 1$ τότε προκύπτει η ε.μ **Jacobi** η οποία γράφεται:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{m} = 0, 1, 2, \cdots$$

όπου

$$\mathcal{B} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{C_L} - \mathbf{C_U}) = \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C_L}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C_U}}_{\mathbf{U}} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

είναι ο επαναληπτικός πίνακας της ε.μ. **Jacobi**.

Σύγκλιση της ε.μ. (J)

Ικανή και αναγκαία συνθήκη :

$$\rho(\mathcal{B}) < 1$$

Ικανή συνθήκη :

Επειδή

$$\rho(\mathcal{B}) \leq ||\mathcal{B}||_\infty = \max_{i=1(1)n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n}}_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

Η ε.μ. **(J)** συγκλίνει αν ισχύει

$$\max_{i=1(1)n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n}}_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{|a_{ii}|} \underbrace{\sum_{j=1}^{n}}_{j \neq i} |a_{ij}| < 1 , \qquad \text{για κάθε } i$$

Σύγκλιση της ε.μ. (J)

Αυστηρά διαγωνίως υπερτερών πίνακας

αν ισχύει

$$|\mathbf{a_{ii}}| > \underbrace{\sum_{j=1}^{\mathbf{n}}}_{\mathbf{j \neq i}} |\mathbf{a_{ij}}| \,, \qquad \text{για κάθε } \mathbf{i}$$

τότε ο πίνακας **A** λέγεται αυστηρά διαγωνίως υπερτερών (α.δ.υ) .

Αρα αν ο **A** είναι α.δ.υ. τότε ισχύει

$$\rho(\mathcal{B}) \leq ||\mathcal{B}||_{\infty} < \mathbf{1}$$

δηλ. η ε.μ. **J** συγκλίνει.

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi(J)

Υπό μορφή πινάκων :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k)} \\ x_i^{(k)} \\ x_{i+1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k+1)} \\ x_i^{(k+1)} \\ x_{i+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(k+1)}$$

Υπό μορφή συνιστωσών :

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}\,, \qquad i = 1(1)n$$

Επαναληπτική μέθοδος (J)

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}$$

Να δειχθεί ότι η μέθοδος του *Jacobi* συγκλίνει και να βρεθούν οι τρείς πρώτες επαναλήψεις, αν $x^{(0)} = (1, 0, 1)$.

Λύση

Ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου *Jacobi* είναι ο

$$B = I - D^{-1}A = L + U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Επαναληπτική μέθοδος (J)

Επίσης $\| B \|_1 = \| B \|_\infty = 1$. Οι ιδιοτιμές του B είναι 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και -$\frac{\sqrt{2}}{2}$, επομένως $\rho(B) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}), \qquad\qquad k = 0, 1, 2 \ldots \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}). \end{aligned}$$

Για $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$, δηλαδή για $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 1$ έχουμε

$\mathbf{k = 0}$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επαναληπτική μέθοδος (J)

k = 1

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

k = 2

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$
$$x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(x_1^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$
$$x_3^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$$

Αλγόριθμος της ε.μ Jacobi(J)

1. Διάβασε **n**, ϵ, **maxiter**
2. Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε

   Διάβασε $\mathbf{x0_i}$

   Διάβασε $\mathbf{b_i}$

   για $\mathbf{j} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε

   Διάβασε $\mathbf{a_{ij}}$
3. $\mathbf{itcount} = \mathbf{0}$
4. Οσο ισχύει $\mathbf{itcount} \leq \mathbf{maxiter}$ επανάλαβε

   4.1 Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε

   $$\mathbf{x1_i} = -\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{i-1}} \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{ii}}}\mathbf{x0_j} - \sum_{\mathbf{j=i+1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{ii}}}\mathbf{x0_j} + \frac{\mathbf{b_i}}{\mathbf{a_{ii}}}$$

   4.2 $\mathbf{itcount} = \mathbf{itcount} + \mathbf{1}$

   4.3 Αν $||\mathbf{x1} - \mathbf{x0}||_\infty < \epsilon$ τότε

   Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε

   Τύπωσε $\mathbf{x1_i}$

   Τέλος.

   4.4 Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε

   $\mathbf{x0_i} = \mathbf{x1_i}$
5. Τύπωσε("Οχι σύγκλιση μετά από *maxiter* επαναλήψεις")
6. Τέλος

Υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου της ε.μ (J)

4.1 Για $\mathbf{i = 1(1)n}$ επανάλαβε

$$\mathbf{x1_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x0_j + \frac{b_i}{a_{ii}}}$$

- **A** πυκνός

Στην κάθε επανάληψη απαιτούνται

Διαιρέσεις : $[(\mathbf{i-1}) + (\mathbf{n-i}) + \mathbf{1}] * \mathbf{n} = \mathbf{n^2}$

Πολλαπλασιασμοί : $[(\mathbf{i-1}) + (\mathbf{n-i})] * \mathbf{n} = \mathbf{n(n-1)}$

Προσθαφαιρέσεις : $\mathbf{n(n-1)}$

Αν υποθέσουμε ότι απαιτούνται **k** επαναλήψεις για τη σύγκλιση της μεθόδου J, τότε έχουμε συνολικά :

Διαιρέσεις : $\mathbf{kn^2}$

Πολλαπλασιασμοί : $\mathbf{kn(n-1) = kn^2 - kn}$

Προσθαφαιρέσεις : $\mathbf{kn(n-1) = kn^2 - kn}$

Επαναληπτική μέθοδος Επιταχυντική Gauss-Seidel (EGS)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{17}$$

Αν διαλέξουμε τον **R** έτσι ώστε

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{C_L} \tag{18}$$

τότε προκύπτει

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}) \tag{19}$$

ή

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{L}_{\tau,1}\mathbf{x}^{(k)} + \tau(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{c} \tag{20}$$

όπου

$$\mathcal{L}_{\tau,1} = \mathbf{I} - \tau(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \quad \text{και} \quad \mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}. \tag{21}$$

Εκφράζοντας τον $\mathcal{L}_{\tau,1}$ σε όρους των **L** και **U** έχουμε

$$\mathcal{L}_{\tau,1} = \mathbf{I} - \tau(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{L} - \mathbf{U}) = (1 - \tau)\mathbf{I} + \tau(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}. \tag{22}$$

Οπότε έχουμε

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1 - \tau)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + (\tau - 1)\,\mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{c}. \tag{23}$$

Η ανωτέρω μέθοδος καλείται **Επιταχυντική Gauss-Seidel(EGS)** και για $\tau = 1$ προκύπτει η γνωστή μέθοδος **Gauss-Seidel(GS)**

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Υπό μορφή πινάκων :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}}_{\mathcal{L}_1}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{k} = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{k} = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k)} \\ x_i^{(k)} \\ x_{i+1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k+1)} \\ x_i^{(k+1)} \\ x_{i+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(k+1)}$$

Υπό μορφή συνιστωσών :

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)n$$

Σύγκλιση της ε.μ. Gauss-Seidel

Ικανή και αναγκαία συνθήκη :

$$\rho(\mathcal{L}_1) < 1$$

Ικανή συνθήκη :

Αν ο **A** είναι α.δ.υ. τότε ισχύει

$$||\mathcal{L}_1||_\infty < 1$$

δηλ. η ε.μ. GS συγκλίνει.

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel(GS)

Για $\tau = 1$ προκύπτει ο τύπος της ϵ.μ GS

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \tag{24}$$

όπου $c = D^{-1}b$.

Επαν. μέθοδοι **EGS** και **GS** υπό μορφή συνιστωσών

- **EGS**

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \hat{\mathbf{a}}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} + (1-\tau)\mathbf{x}_i^{(k)} + (\tau-1)\Big(\sum_{j=1}^{i-1} \hat{\mathbf{a}}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k)}\Big) + \tau\Big(\sum_{j=i+1}^{\nu} \hat{\mathbf{a}}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k)}\Big) + \tau\hat{\mathbf{b}}_i, \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}(\mathbf{1})\mathbf{n} \tag{25}$$

- **GS** για $\tau = 1$ προκύπτει

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \hat{\mathbf{a}}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{\nu} \hat{\mathbf{a}}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k)} + \hat{\mathbf{b}}_i, \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}(\mathbf{1})\mathbf{n}. \tag{26}$$

όπου $\hat{\mathbf{a}}_{ij} = -\dfrac{\mathbf{a}_{ij}}{\mathbf{a}_{ii}}$ και $\hat{\mathbf{b}}_i = \dfrac{\mathbf{b}_i}{\mathbf{a}_{ii}}$.

Παρατηρήσεις

- Για την ύπαρξη των δύο ανωτέρω μεθόδων θα πρέπει να υπάρχει ο $(\mathbf{D}-\mathbf{C_L})^{-1}$ ή $\mathbf{det}(\mathbf{D}-\mathbf{C_L}) = \mathbf{detD} \neq \mathbf{0}$ πράγμα που ισχύει αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι διάφορα του μηδενός.
- *Παρατηρούμε ότι στις ε.μ.* **EGS** *και* **GS** *οι αριθμητικές πράξεις επηρεάζονται αν εναλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων του συστήματός μας.*

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}$$

Να δειχθεί ότι η μέθοδος του GS συγκλίνει και να βρεθούν οι τρείς πρώτες επαναλήψεις, αν $\mathbf{x}^{(0)} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Λύση

Ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου GS είναι ο

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Από τη σχέση $(I - L)X = I$ υπολογίζεται εύκολα ο $(I - L)^{-1}$. Επομένως

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_1$ είναι οι $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1/2}$ επομένως $\rho(\mathcal{L}_1) = 1/2 < 1$ που αποδεικνύει ότι η GS συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι $\rho(\mathcal{L}_1) = [\rho(\mathcal{B})]^2$ για το παρόν παράδειγμα.

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2 \ldots \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k+1)}). \end{aligned}$$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

Για $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$, δηλαδή για $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 1$, έχουμε

k = 0

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}) = \frac{7}{8}$$

k = 1

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}) = \frac{7}{8}$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{8} + \frac{7}{8}) = \frac{7}{8}$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{7}{8}) = \frac{15}{16}$$

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

k = 2

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{7}{8}) = \frac{15}{16}$$
$$x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(x_1^{(3)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{2}(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}) = \frac{15}{16}$$
$$x_3^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(3)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{15}{16}) = \frac{31}{32}.$$

Παρατήρηση

Η μέθοδος GS συγκλίνει πολύ γρηγορότερα από τη μέθοδο Jacobi προς την ακριβή λύση $(1, 1, 1)^T$ του συστήματος. Αυτό αναμενόταν αφού $R(\mathcal{L}_1) = 2R(B)$.

Αλγόριθμος της ε.μ Gauss-Seidel(GS)

1. Διάβασε **n**, ϵ, **maxiter**
2. Για $\mathbf{i} = \mathbf{1}(\mathbf{1})\mathbf{n}$ επανάλαβε

   για $\mathbf{j} = \mathbf{1}(\mathbf{1})\mathbf{n}$ επανάλαβε

      Διάβασε $\mathbf{a_{ij}}$

   Διάβασε $\mathbf{b_i}$

   Διάβασε $\mathbf{x0_i}$
3. $\mathbf{itcount} = \mathbf{0}$
4. Οσο ισχύει $\mathbf{itcount} \leq \mathbf{maxiter}$ επανάλαβε

   4.1 Για $\mathbf{i} = \mathbf{1}(\mathbf{1})\mathbf{n}$ επανάλαβε

   $$\mathbf{x1_i} = -\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{i-1}} \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{ii}}}\mathbf{x1_j} - \sum_{\mathbf{j=i+1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{ii}}}\mathbf{x0_j} + \frac{\mathbf{b_i}}{\mathbf{a_{ii}}}$$

   4.2 $\mathbf{itcount} = \mathbf{itcount} + \mathbf{1}$

   4.3 Αν $||\mathbf{x1} - \mathbf{x0}||_\infty < \epsilon$ τότε

      Για $\mathbf{i} = \mathbf{1}(\mathbf{1})\mathbf{n}$ επανάλαβε

         Τύπωσε $\mathbf{x1_i}$

      Τέλος.

   4.4 Για $\mathbf{i} = \mathbf{1}(\mathbf{1})\mathbf{n}$ επανάλαβε

      $\mathbf{x0_i} = \mathbf{x1_i}$
5. Τύπωσε("Οχι σύγκλιση μετά από **maxiter** επαναλήψεις")
6. Τέλος

Επαναληπτική Επιταχυντική μέθοδος της Διαδοχικής Υπερμείωσης (Extrapolated Successive Overrelaxation (ESOR))

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{27}$$

Είναι δυνατόν να βρεθούν δύο άλλες μέθοδοι αν εισάγουμε μία παράμετρο στη μορφή του **R**. Έτσι αν θέσουμε

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} - \omega \mathbf{C_L} \tag{28}$$

στην (27), όπου ω είναι ένας πραγματικός αριθμός του οποίου ο ρόλος στη φάση αυτή είναι να διαταράξει τον **R** έτσι ώστε να προσεγγίζει καλύτερα τον A τότε έχουμε

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{29}$$

ή

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{L}_{\tau,\omega}\mathbf{x}^{(k)} + \tau(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1}\mathbf{c} \tag{30}$$

όπου

$$\mathcal{L}_{\tau,\omega} = \mathbf{I} - \tau(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}. \tag{31}$$

Επαναληπτική Επιταχυντική μέθοδος της Διαδοχικής Υπερμείωσης (Extrapolated Successive Overrelaxation (ESOR))

Προκειμένου να βρούμε την εξίσωση των συνιστωσών η (29) μπορεί να γραφτεί σαν

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\tau)\mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + (\tau-\omega)\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{c} \tag{32}$$

οπότε έχουμε

$$x_i^{(k+1)} = (1-\tau)x_i^{(k)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} x_j^{(k+1)} + (\tau-\omega) \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} x_j^{(k)} + \tau \sum_{j=i+1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j^{(k)} + \tau \hat{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{33}$$

Κατά την υλοποίηση της *ESOR* είναι δυνατόν να γίνει εξοικονόμηση των υπολογισμών αν αποθηκευτεί η ποσότητα $Lx^{(k)}$ προκειμένου να χρησιμοποιηθεί στην επόμενη επανάληψη.

Επαναληπτική μέθοδος της Διαδοχικής Υπερμείωσης (Successive Overrelaxation (SOR))

Αν θέσουμε $\tau = \omega$ στην *ESOR* λαμβάνουμε τη δημοφιλή *Successive Overrelaxation*(*SOR*) μέθοδο, η οποία δίνεται διαδοχικά από τους τύπους

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}) \tag{34}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega \mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{c} \tag{35}$$

όπου

$$\mathcal{L}_\omega = \mathbf{I} - \omega(\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}. \tag{36}$$

ή

$$\mathcal{L}_\omega = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{L})^{-1}\left[(1 - \omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{U}\right]$$

είναι ο επαναληπτικός πίνακας της ε.μ. **SOR**.

Επαναληπτική μέθοδος (Successive Overrelaxation (SOR))

Επίσης η *SOR* γράφεται και σαν

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{I} + \omega \mathbf{U}]\mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{I} - \omega \mathbf{L})^{-1}\mathbf{c} \tag{37}$$

ή

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)} + \omega[\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}]. \tag{38}$$

Παρατηρήστε ότι η ποσότητα της αγκύλης είναι η *GS* μέθοδος, συνεπώς η (38) λαμβάνει τη μορφή

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{x}_{GS}^{(k+1)} \tag{39}$$

όπου $x_{GS}^{(k+1)}$ συμβολίζει την $k+1$ επανάληψη της *GS* μεθόδου. Η (39) υπήρξε η αφετηρία της ανακάλυψης της *SOR* μεθόδου. Τέλος, υπό μορφή συνιστωσών η *SOR* δίνεται από τους τύπους

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}_i^{(k)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} \hat{\mathbf{a}}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} + \omega \sum_{j=i+1}^{n} \hat{\mathbf{a}}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k)} + \omega \hat{\mathbf{b}}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{40}$$

Σύγκλιση της ε.μ. SOR

Αν λ_i είναι οι ιδιοτιμές του $\mathcal{L}_\omega$, τότε

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Αλλά

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \det\left\{(I - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega U\right]\right\}$$

$$\det\left\{(I - \omega L)^{-1}\right\} \cdot \det\left\{(1-\omega)I + \omega U\right\}$$

$$= 1 \cdot (1-\omega)^n = (1-\omega)^n$$

$$[\rho(\mathcal{L}_\omega)]^n \geq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |\prod_{i=1}^{n} \lambda_i| = |(1-\omega)^n| = |1-\omega|^n$$

Αρα

$$|1-\omega| \leq \rho(\mathcal{L}_\omega)$$

Σύγκλιση της ε.μ. SOR

Για να συγκλίνει η ε.μ. **SOR** θα πρέπει να ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$$

Αρα

$$|1 - \omega| < 1$$

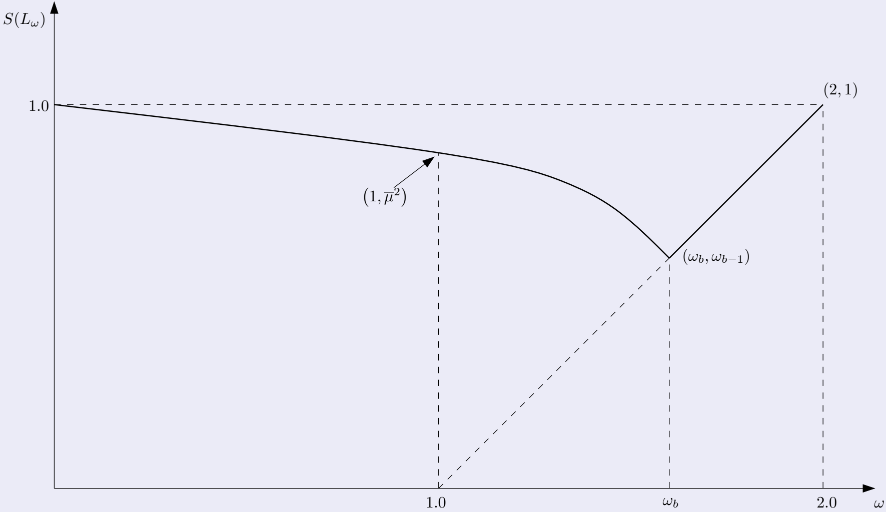
ή

$$0 < \omega < 2$$

Επομένως, αν η ε.μ. **SOR** συγκλίνει τότε $0 < \omega < 2$.

Η βέλτιστη τιμή ω_b της παραμέτρου ω προσδιορίζεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η φασματική ακτίνα $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ του επαναληπτικού πίνακα της ε.μ. **SOR**.
Η μελέτη της $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ σαν συνάρτηση της ω φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Μελέτη της φασματικής ακτίνας $\rho(\mathcal{L}_\omega)$



$$\omega_{\mathbf{b}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(\mathbf{B})^2}}, \qquad \rho(\mathcal{L}_{\omega_{\mathbf{b}}}) = \omega_{\mathbf{b}} - 1$$

Επαναληπτική μέθοδος **SOR**

- **Υπό μορφή πινάκων**

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega x_{GS}^{(k+1)}\,, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

ή

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + c)\,, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

- **Υπό μορφή συντεταγμένων**

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\Big(-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}\Big)$$

$$i = 1(1)n$$

Επαναληπτική μέθοδος SOR

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}$$

Να δειχθεί ότι η μέθοδος του SOR συγκλίνει και να βρεθούν οι τρείς πρώτες επαναλήψεις, αν $\mathbf{x}^{(0)} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Λύση

Η μέθοδος *SOR* δίνεται από το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα :

$$x^{(k+1)} = (1 - \omega)x^{(k)} + \omega x_{GS}^{(k+1)},$$

όπου $x_{GS}^{(k+1)}$ είναι το επαναληπτικό διάνυσμα που προκύπτει από την εφαρμογή της Gauss-Seidel μεθόδου. Επομένως, για το τριδιαγώνιο σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος, η SOR παράγει το επαναληπτικό σχήμα :

Επαναληπτική μέθοδος SOR

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\frac{1}{2}(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}), \qquad\qquad k = 0, 1, 2\ldots \\
x_3^{(k+1)} &= (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega\frac{1}{2}(1 + x_2^{(k+1)}).
\end{aligned}
$$

Η βέλτιστη τιμή του ω δίνεται από τον τύπο (Θεώρημα 1.4.16)

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}$$

ή

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} \simeq 1.1716.$$

ενώ

$$\rho(\omega_b) = \omega_b - 1 \simeq 0.1716.$$

Επαναληπτική μέθοδος SOR

Λαμβάνοντας, $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$, δηλαδή, $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 1$ έχουμε για $\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$$x_1^{(1)} = (1 - \frac{4}{2+\sqrt{2}}) \cdot 1 + \frac{2}{2+\sqrt{2}}(1+0) = 1 - \frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \simeq 0.4142$$

$$x_2^{(1)} = (1 - \frac{4}{2+\sqrt{2}}) \cdot 0 + \frac{2}{2+\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + 1) = \frac{4(1+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2} \simeq 0.8984$$

$$x_3^{(1)} = (1 - \frac{4}{2+\sqrt{2}}) \cdot 1 + \frac{2}{2+\sqrt{2}}(1 + \frac{4(1+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2}) = 1 - \frac{4}{(2+\sqrt{2})^3} \simeq 0.8995$$

Αλγόριθμος της ε.μ SOR

1. Διάβασε $\mathbf{n}$, ω, ϵ, **maxiter**
2. Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε
   για $\mathbf{j} = \mathbf{1(1)n+1}$ επανάλαβε
   Διάβασε $\mathbf{a_{ij}}$
   Διάβασε $\mathbf{x0_i}$
3. **itcount** $= \mathbf{0}$
4. Οσο ισχύει **itcount** $\leq$ **maxiter** επανάλαβε
   4.1 Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε
   $$\mathbf{x1_i} = (\mathbf{1} - \omega)\mathbf{x0_i} +$$
   $$+\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{ii}}}\mathbf{x1_j} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{ii}}}\mathbf{x0_j} + \frac{\mathbf{b_i}}{\mathbf{a_{ii}}}\right)$$
   4.2 **itcount** $=$ **itcount** $+ \mathbf{1}$
   4.3 Αν $||\mathbf{x1} - \mathbf{x0}||_\infty < \epsilon$ τότε
   Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε
   Τύπωσε $\mathbf{x1_i}$
   Τέλος.
   4.4 Για $\mathbf{i} = \mathbf{1(1)n}$ επανάλαβε
   $\mathbf{x0_i} = \mathbf{x1_i}$
5. Τύπωσε("Οχι σύγκλιση μετά από **maxiter** επαναλήψεις")
6. Τέλος

Άσκηση

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\alpha \\ 2-2\alpha \\ 2-\alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

2.1 Να βρεθεί **ικανή** και **αναγκαία** συνθήκη έτσι ώστε η ε.μ. **(GS)** να συγκλίνει.

2.2 Να δοθούν οι εξισώσεις υπο μορφή συνιστωσών της επαναληπτικής μεθόδου **Gauss-Seidel(GS)** για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

2.3 Για $\alpha = 1$ και $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{x}^{(2)}$ της ε.μ.

- **α)** **GS**
- **β)** **SOR** για $\omega = 1/2$.

Λύση

Είναι: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2-\alpha \\ 2-2\alpha \\ 2-\alpha \end{bmatrix}$

Η βασική διάσπαση του **A** είναι

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C_L} - \mathbf{C_U}$$

όπου

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C_L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C_U} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση

ή

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

όπου

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C_L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C_U} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1 Επαναληπτικός πίνακας της ε.μ GS

Ο επαναληπτικός πίνακας της ε.μ GS είναι ο

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$$

Είναι :

$$\mathbf{I} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha/2 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός του $(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & 0 & 0 \\ \mathbf{y_1} & \mathbf{y_2} & 0 \\ \mathbf{z_1} & \mathbf{z_2} & \mathbf{z_3} \end{bmatrix}$

$(\mathbf{I} - \mathbf{L})(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} = \mathbf{I}$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{L})(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}=\mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -\alpha/2 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & 0 & 0 \\ \mathbf{y_1} & \mathbf{y_2} & 0 \\ \mathbf{z_1} & \mathbf{z_2} & \mathbf{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & 0 & 0 \\ (-\alpha/2)\mathbf{x_1}+\mathbf{y_1} & \mathbf{y_2} & 0 \\ (-\alpha/2)\mathbf{y_1}+\mathbf{z_1} & (-\alpha/2)\mathbf{y_2}+\mathbf{z_2} & \mathbf{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x_1}=\mathbf{1} \\ &\mathbf{y_1}=\alpha/2, \qquad \mathbf{y_2}=1 \\ &\mathbf{z_1}=\alpha^2/4, \qquad \mathbf{z_2}=\alpha/2, \qquad \mathbf{z_3}=1 \end{aligned}$$

Άρα

$$(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 1 & 0 \\ \alpha^2/4 & \alpha/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ 0 & \alpha^2/4 & \alpha/2 \\ 0 & \alpha^3/8 & \alpha^2/4 \end{bmatrix}$$

Ικανή και **αναγκαία** συνθήκη σύγλισης της ε.μ. **GS**

Η ε.μ **GS** συγλίνει $\iff \quad \rho(\mathcal{L}_1) < \mathbf{1}$

Εύρεση των ιδιοτιμών του $\mathcal{L}_1$

$$\mathbf{det}(\mathcal{L}_1 - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \iff \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha/2 & 0 \\ 0 & \alpha^2/4 - \lambda & \alpha/2 \\ 0 & \alpha^3/8 & \alpha^2/4 - \lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Εύρεση των ιδιοτιμών του $\mathcal{L}_1$

$$\mathbf{det}(\mathcal{L}_1 - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \iff \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha/\mathbf{2} & 0 \\ 0 & \alpha^2/4 - \lambda & \alpha/2 \\ 0 & \alpha^3/8 & \alpha^2/4 - \lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

ρίζες : $\lambda = 0,\ 0,\ \alpha^2/2$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης της ε.μ. **GS**

- Αν $\alpha = 0$ τότε $\rho(\mathcal{L}_1) = 0 < 1,$ οπότε η ε.μ. **GS** συγλίνει.
- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\rho(\mathcal{L}_1) = |\alpha^2/2|$, οπότε πρέπει :

$$|\alpha^2/2| < 1 \iff -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$$

΄Αρα $\alpha \in (-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$.

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel (GS)

- Υπό μορφή πινάκων :

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} = (\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots$$

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots$$

- Υπό μορφή συνιστωσών :

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)3$$

2.2 Οι εξισώσεις υπο μορφή συνιστωσών της ε.μ. **GS** για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος είναι οι :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{\alpha}{2} x_2^{(k)} + \frac{2-\alpha}{2} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{\alpha}{2} x_1^{(k+1)} + \frac{\alpha}{2} x_3^{(m)} + \frac{2-2\alpha}{2} \qquad , \qquad k = 0, 1, 2 \cdots \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{\alpha}{2} x_2^{(k+1)} + \frac{2-\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

2.3 Υπολογισμός της προσεγγιστικής τιμής $\mathbf{x}^{(2)}$

Για $\alpha = 1$ η ε.μ. GS δίνεται από το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}), \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k+1)}).
\end{aligned}
$$

Για $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})^T$, δηλαδή για $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 1$, έχουμε

για $k = 0$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2} \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4} \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}) = \frac{7}{8}.
\end{aligned}
$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}) = \frac{7}{8}$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{8} + \frac{7}{8}) = \frac{7}{8}$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{7}{8}) = \frac{15}{16}$$

$k = 2$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{7}{8}) = \frac{15}{16}$$
$$x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(x_1^{(3)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{2}(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}) = \frac{15}{16}$$
$$x_3^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(3)}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{15}{16}) = \frac{31}{32}.$$

β) ε.μ SOR

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\frac{1}{2}(2-\alpha \quad +\alpha x_2^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\frac{1}{2}(2-2\alpha \quad +\alpha x_1^{(k+1)} \quad +\alpha x_3^{(k)}) \quad , \qquad k=0,1,2,\cdots \\
x_3^{(k+1)} &= (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega\frac{1}{2}(2-\alpha \quad +\alpha x_2^{(k+1)})
\end{aligned}
$$

Για $\alpha = 1$ και $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = [1,\ 0,\ 1]^T$
και για $\omega = 1/2$ έχουμε :

<u>$k = 0$</u>

<u>$i = 1$</u>

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_1^{(0)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}(1+0) = \frac{3}{4}$$

<u>$i = 2$</u>

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{2}x_2^{(0)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(0 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}(3/4+1) = \frac{7}{16}$$

<u>$i = 3$</u>

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(0)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}(1+7/16) = \frac{55}{64}$$

$k = 1$

$\underline{i = 1}$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}x_1^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(1 + 7/16) = \frac{47}{64}$$

$\underline{i = 2}$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}x_2^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(0 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{4}(47/64 + 55/64) = \frac{158}{256}$$

$\underline{i = 3}$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}x_3^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{53}{64} + \frac{1}{4}(1 + 158/256) = \frac{854}{1024}$$