



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΙΣΥΡΑΗΣ

ΑΘΗΝΑ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	4
1.1	Αδιάσπαστοι, Διαγώνια υπέρτεροι, p -κυκλικοί πίνακες και γραφήματα . . .	4
1.1.1	Αδιάσπαστοι πίνακες	4
1.1.2	Διαγώνια υπέρτεροι πίνακες	6
1.1.3	p -κυκλικοί πίνακες	7
1.1.4	Η Κόκκινη-Μαύρη Διάταξη	18
1.1.5	Μαρκοβιανές Αλυσίδες	19
2	Επαναληπτικές Μέθοδοι	20
2.1	Γενικά	20
2.2	Η SOR επαναληπτική μέθοδος	21
2.2.1	Η συναρτησιακή σχέση - Σύγκλιση	22
2.2.2	Προσδιορισμός βέλτιστων παραμέτρων	25
3	Ιστορική αναδρομή και Πρόσφατη έρευνα	28
	Αναφορές	30

1 Εισαγωγή

Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να γίνει είτε με άμεσες είτε με επαναληπτικές μεθόδους. Όταν όμως το γραμμικό σύστημα είναι μεγάλο και αραιό, οι επαναληπτικές μέθοδοι γίνονται ιδιαίτερα ελκυστικές, επειδή απαιτούν λιγότερη μνήμη και λιγότερες αριθμητικές πράξεις από τις άμεσους μεθόδους. Μια μεγάλη κατηγορία τέτοιων συστημάτων προκύπτει από τη διακριτοποίηση Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το ελάχιστο προκαταρκτικό υλικό που αναφέρεται κυρίως στις χαρακτηριστικές ιδιότητες του συστήματος

$$Au = b, \quad (1)$$

που προκύπτει από τη διακριτοποίηση μιας ΜΔΕ. Στο παραπάνω σύστημα ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι δικυκλικός. Οι κυριότερες αναφορές για το ακολουθούμενο υλικό υπήρξαν τα διαχρονικά βιβλία του Young [Young] και του Varga [Var1].

1.1 Αδιάσπαστοι, Διαγώνια υπέρτεροι, p -κυκλικοί πίνακες και γραφήματα

Μια ειδική κατηγορία πινάκων είναι αυτή των p -κυκλικών [Var1]. Υπάρχουν πολλές εφαρμογές, οι οποίες καταλήγουν στην επίλυση γραμμικών συστημάτων των οποίων ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων είναι p -κυκλικός. Για παράδειγμα, η διακριτοποίηση των δεύτερης τάξης ελλειπτικών ή παραβολικών ΜΔΕ είτε με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είτε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καταλήγει στην επίλυση ενός συστήματος, όπου ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι p -κυκλικός με $p = 2$ [Var1]. Όμοια, μεγάλης τάξης προβλήματα ελαχίστων τετραγώνων καταλήγουν σε συστήματα όπου ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων είναι p -κυκλικός με $p = 3$. Επίσης, η μελέτη των Μαρκοβιανών αλυσίδων (Markov chains) [Stewart94] κατά την προσομοίωση των δικτύων ουρών (queuing network) [BonDaSte91] καταλήγει σε συστήματα όπου ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων είναι p -κυκλικός με $p \geq 2$.

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται διάφοροι ορισμοί και θεωρήματα χωρίς αποδείξεις, από τη θεωρία πινάκων τα οποία αποτελούν βασικές γνώσεις απαραίτητες για τη μελέτη των επαναληπτικών μεθόδων. Μια βιβλιογραφία σχετική με την γενική θεωρία πινάκων είναι η ακόλουθη [Bellman70], [BirkMac198], [DonAd08], [HornJohnson], [Faddeev63]. Μια σημαντική κατηγορία πινάκων που προκύπτει από την διακριτοποίηση των ΜΔΕ είναι οι αδιάσπαστοι και οι ασθενά διαγώνιοι υπέρτεροι. Ο όρος "αδιάσπαστος" πρωτοεισήχθη από τον Frobenius το 1912 [F12]. Αν κάποιος πίνακας ανήκει σε αυτές τις δύο κατηγορίες τότε είναι μη ιδιάζων (βλ. Θεώρημα 1.8, σελ. 23 [Var1], Θεώρημα 5.3, σελ. 40 [Young]), πράγμα που εξασφαλίζει τη μοναδικότητα λύσης του συστήματος, αποφεύγοντας έτσι το κριτήριο της ορίζουσας.

1.1.1 Αδιάσπαστοι πίνακες

Ορισμός 1.1. Για $n \geq 2$, ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λέγεται διασπασίμος (reducible) αν υπάρχει ένας $n \times n$ μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

όπου A_{11} είναι ένας $r \times r$ υποπίνακας και A_{22} είναι ένας $(n - r) \times (n - r)$ υποπίνακας, με $1 \leq r < n$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος μεταθετικός πίνακας τότε ο A λέγεται αδιάσπαστος (*irreducible*).

Ένας εναλλακτικός ορισμός για αδιάσπαστους πίνακες, ο οποίος δόθηκε το 1949 από τον Geiringer [Geiringer49] και αναφέρεται επίσης από τον Young [Young] είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 1.2. Ένας πίνακας A τάξης n είναι αδιάσπαστος (*irreducible*) αν $n = 1$ ή αν $n > 1$ και για οποιαδήποτε δεδομένα μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα S και T του συνόλου W των πρώτων n θετικών ακεραίων αριθμών τέτοια ώστε $S \cup T = W$, υπάρχει $i \in S$ και $j \in T$ τέτοια ώστε $a_{ij} \neq 0$.

Η έννοια της διάσπασης είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς το αρχικό σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί στο $Au = k$, όπου $A = PAP^T$ είναι της μορφής (2). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 &= k_1 \\ A_{22}u_2 &= k_2 \end{aligned} \tag{3}$$

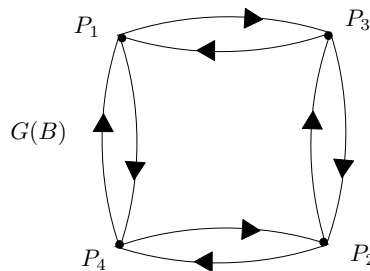
οπότε το αρχικό σύστημα υποβιβάζεται σε δύο μικρότερης τάξης συστήματα, τα οποία διατηρούν μεταξύ τους τη σχέση των εξισώσεων με τους αγνώστους και μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα από το αρχικό σύστημα.

Ένας εναλλακτικός και εύκολος τρόπος για να ελέγξουμε αν ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος δίνεται με τη βοήθεια της θεωρίας των γραφημάτων [König50], [Berge58]. Η γραφοθεωρητική ερμηνεία της έννοιας της αδιασπασιμότητας είναι η ακόλουθη. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, θεωρούμε τα διακεκριμένα σημεία P_1, P_2, \dots, P_n του επιπέδου που λέγονται κόμβοι, και κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα του A , σχεδιάζοντας ένα τόξο από το P_i προς το P_j για κάθε $a_{ij} \neq 0$. Αν $a_{ii} \neq 0$, τότε απλά σχεδιάζουμε ένα κυκλικό τόξο που περιέχει το P_i . Αυτός ο τρόπος σύνδεσης των κόμβων δηλώνει την ύπαρξη ενός μονοπατιού $P_i \rightarrow P_j$ από τον κόμβο P_i στον κόμβο P_j . Εργαζόμενοι με αυτόν τον τρόπο, κάθε πίνακας A τάξης n μπορεί να συσχετισθεί με ένα πεπερασμένο κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

έχει το κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 1

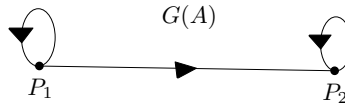


Σχήμα 1: Ισχυρά συνεκτικό γράφημα του πίνακα B της (4).

ενώ ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

έχει το κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 2



Σχήμα 2: Μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα του πίνακα A της (5).

Ορισμός 1.3. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος κόμβων (P_i, P_j) , υπάρχει ένα μονοπάτι από τον P_i στον P_j και από τον P_j στον P_i . Δηλαδή, οι κόμβοι P_i και P_j βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο.

Το μήκος ενός μονοπατιού είναι ίσο με το πλήθος των ακμών του. Για παράδειγμα το γράφημα του σχήματος 1 είναι ισχυρά συνεκτικό, γιατί για κάθε ζεύγος κόμβων υπάρχει ένα μονοπάτι, ενώ το γράφημα του σχήματος 2 δεν είναι ισχυρά συνεκτικό διότι δεν υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο P_2 προς τον κόμβο P_1 .

Θα λέμε ότι ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος στην πράξη όταν ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 1.1. [Var1] Ένας μιγαδικός πίνακας A τάξης n είναι αδιάσπαστος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα του $G(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό.

Να σημειωθεί ότι όταν ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος, όλα τα εκτός της διαγωνίου του στοιχεία σε κάθε γραμμή ή στήλη του πίνακα δεν είναι μηδενικά.

1.1.2 Διαγώνια υπέρτεροι πίνακες

Μια άλλη σημαντική κλάση πινάκων που είναι εξίσου χρήσιμη περιλαμβάνει εκείνους τους πίνακες που είναι διαγώνια υπέρτεροι.

Ορισμός 1.4. Ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται διαγώνια υπέρτερος αν

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (6)$$

για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Επιπλέον, ο πίνακας A καλείται αυστηρά διαγώνια υπέρτερος αν

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (7)$$

για όλα τα $1 \leq i \leq n$.

Ο πίνακας A καλείται ασθενά διαγώνια υπέρτερος αν ο A είναι διαγώνια υπέρτερος με την (7) να ισχύει για ένα τουλάχιστον i . Όμοια, ο πίνακας A καλείται αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερος αν ο A είναι αδιάσπαστος και διαγώνια υπέρτερος με την (7) να ισχύει για ένα τουλάχιστον i , δηλαδή αν είναι αδιάσπαστος και ασθενά διαγώνια υπέρτερος.

Επειδή είναι αρκετά δύσκολο να διαπιστωθεί αν $\det A \neq 0$ προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο A είναι μη ιδιάζων, γι' αυτό συνήθως καταφεύγουμε στο κριτήριο που δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2. [Var1] Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας αυστηρά ή αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερος μιγαδικός πίνακας. Τότε ο πίνακας A είναι μη ιδιάζων. Αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι επίσης και θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε οι ιδιοτιμές λ_i του A ικανοποιούν την

$$\operatorname{Re} \lambda_i > 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Να σημειωθεί ότι το πρώτο μέρος του ανωτέρω θεωρήματος αναφέρεται και από τον Young ενώ έχει αποδειχθεί ανεξάρτητα από πολλούς ερευνητές. Το δεύτερο μέρος, το οποίο δηλώνει ότι όλα τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του A είναι θετικά, έχει αποδειχθεί το 1949 από τον Taussky [T49]. Στην περίπτωση του αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερου πίνακα ισχύει επίσης ότι και όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι διάφορα του μηδενός [Young]. Δεδομένου ότι ένας Ερμιτιανός πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές προκύπτει εύκολα, σαν άμεσο συμπέρασμα του ανωτέρω θεωρήματος, η ακόλουθη ικανή συνθήκη για να είναι ένας πίνακας θετικά ορισμένος.

Πόρισμα 1.1. [Var1], [Young] Αν ο $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ένας Ερμιτιανός αυστηρά διαγώνια υπέρτερος ή αδιάσπαστα διαγώνια υπέρτερος πίνακας με θετικά και πραγματικά διαγώνια στοιχεία, τότε ο A είναι θετικά ορισμένος.

1.1.3 p -κυκλικοί πίνακες

Στην περίπτωση των μη αρνητικών και αδιάσπαστων τετραγωνικών πινάκων και όταν υπάρχουν ιδιοτιμές του πίνακα A ίσες με $\rho(A)$ προκύπτουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα που οφείλονται στον Frobenius [F12].

Ορισμός 1.5. Έστω $A \geq 0$ ένας αδιάσπαστος $n \times n$ πίνακας και k το πλήθος των ιδιοτιμών του A με μέτρο $\rho(A)$. Αν $k = 1$, τότε ο A λέγεται πρωτεύων. Αν $k > 1$, τότε ο A λέγεται κυκλικός με δείκτη k .

Ορισμός 1.6. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ασθενά κυκλικός με δείκτη $k (> 1)$ αν υπάρχει ένας μεταθετικός $n \times n$ πίνακας P τέτοιος ώστε ο PAP^T να είναι της μορφής

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A_{1,k} \\ A_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

όπου οι μηδενικοί διαγώνιοι υποπίνακες είναι τετραγωνικοί.

Η (8) είναι η κανονική μορφή ενός $n \times n$ πίνακα $A \geq 0$, ο οποίος είναι κυκλικός με δείκτη $k (> 1)$.

Όπως και στα προηγούμενα, τα γραφήματα αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για την αναπαράσταση της έννοιας ενός κυκλικού πίνακα με δείκτη k . Το ακόλουθο θεώρημα παρουσιάζει μια απλή γραφική μέθοδο για τον προσδιορισμό της κυκλικότητας ενός μη αρνητικού και αδιάσπαστου πίνακα.

Θεώρημα 1.3. Έστω $A = (a_{ij}) \geq 0$ ένας αδιάσπαστος $n \times n$ πίνακας και $G(A)$ το κατευθυνόμενο γράφημά του. Για κάθε κόμβο P_i του $G(A)$, θεωρούμε όλα τα κλειστά μονοπάτια (κύκλους) που συνδέουν το P_i με τον εαυτό του. Αν S_i είναι το σύνολο όλων των μηκών m_i αυτών των κλειστών μονοπατιών και k_i είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) των μηκών, δηλαδή

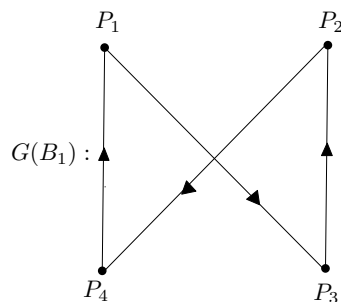
$$k_i = \text{ΜΚΔ}_{m_i \in S_i} \{m_i\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

τότε ο πίνακας A είναι πρωτεύων αν $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ όπου $k = 1$ και είναι κυκλικός με δείκτη k όταν $k > 1$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον μη αρνητικό πίνακα

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ο οποίος έχει κατευθυνόμενο γράφημα (βλ. σχήμα 3)



Σχήμα 3: Το κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα B_1 της (9). Ο B_1 είναι κυκλικός πίνακας με δείκτη 4

ενώ ο πίνακας

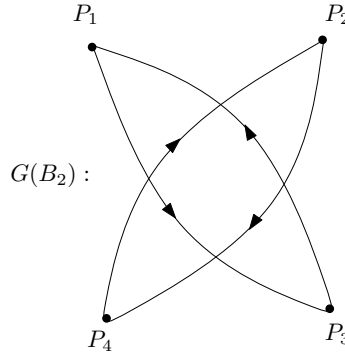
$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

έχει κατευθυνόμενο γράφημα (βλ. σχήμα 4).

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.3, παρατηρούμε ότι για το γράφημα $G(B_1)$ ισχύει ότι

$$k_1 = \text{ΜΚΔ}\{4, 8, 12, \dots\} = 4,$$

οπότε ο πίνακας B_1 είναι κυκλικός με δείκτη 4, ενώ το γράφημα $G(B_2)$ είναι μη συνεκτικό διότι δεν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει τους κόμβους P_1, P_3 με τους κόμβους P_2, P_4



Σχήμα 4: Το κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα B_2 της (10). Ο B_2 είναι μη κυκλικός πίνακας

και αντίστροφα, με αποτέλεσμα ο πίνακας B_2 να είναι μη κυκλικός. Με βάση το θεώρημα 1.3, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.7. Αν G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό και πεπερασμένο κατευθυνόμενο γράφημα, τότε το G είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη $k > 1$, ή ένα πρωτεύων γράφημα αν ο Μέγιστος Κοινός Διαρέτης όλων των μηκών των κύκλων του είναι, αντίστοιχα, $k > 1$ ή $k = 1$.

Έστω το γραμμικό σύστημα (1), όπου ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, ο οποίος έχει διαμερισθεί στην ακόλουθη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

όπου κάθε διαγώνιος υποπίνακας $A_{i,i}$ ($1 \leq i \leq N$) είναι τετραγωνικός. Θεωρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών A αναλύεται ως ακολούθως

$$A = D - C_L - C_U, \quad (12)$$

όπου D είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι τα ίδια με τα διαγώνια στοιχεία του A και οι πίνακες $-C_L, -C_U$ είναι τα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του A , αντίστοιχα. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι διαγώνιοι υποπίνακες $A_{i,i}$, $1 \leq i \leq N$ είναι μη ιδιάζοντες έτσι ώστε ο D να είναι μη ιδιάζων, όπου $D = \text{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \dots, A_{N,N})$, τότε υπάρχει ο D^{-1} και ο $n \times n$ πίνακας B , ο οποίος ορίζεται από τη σχέση

$$B = I - D^{-1}A \quad (13)$$

και είναι ο κατά ομάδες Jacobi πίνακας του A που αντιστοιχεί στη διαμέριση (11) του A . Καθώς όλοι οι κατά ομάδες διαγώνιοι υποπίνακες του B είναι εξ' ορισμού μηδενικοί, μια ισοδύναμη μορφή του κατά ομάδες πίνακα Jacobi είναι η

$$B = L + U \quad (14)$$

όπου $L = D^{-1}C_L$ και $U = D^{-1}C_U$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ακόλουθοι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{bmatrix}, p \geq 2 \quad (15)$$

και

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & & & \mathbf{0} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & A_{N-1,N} \\ \mathbf{0} & & & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Ο A_2 είναι ένας κατά ομάδες τριδιαγώνιος πίνακας. Οι διαμερισμένοι πίνακες Jacobi που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις των A_1 και A_2 έχουν, αντίστοιχα, τη μορφή

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_{1,p} \\ B_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

και

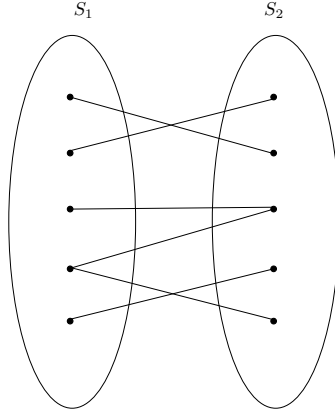
$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} & & & \mathbf{0} \\ B_{2,1} & 0 & B_{2,3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B_{N-1,N} \\ \mathbf{0} & & & B_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

όπου η διαμέριση των πινάκων B_1 και B_2 σχετίζεται κατ' αντιστοιχία με τη διαμέριση των πινάκων A_1 και A_2 . Οι πίνακες B_1 και B_2 έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6, ο πίνακας B_1 είναι ασθενά κυκλικός με δείκτη p . Επίσης και ο B_2 με κατάλληλη μετάθεση των ομάδων του είναι ασθενά κυκλικός με δείκτη $p = 2$. Τα ανωτέρω οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.8. Αν ο κατά ομάδες πίνακας Jacobi B της (13) του πίνακα A της (11) είναι ασθενά κυκλικός με δείκτη p (≥ 2), τότε ο A είναι p -κυκλικός, σε σχέση με τη διαμέριση (11).

Ας σημειωθεί ότι αν οι διαγώνιοι υποπίνακες $A_{i,i}$ της (11) είναι 1×1 πίνακες, τότε ο πίνακας Jacobi είναι ασθενά δικυκλικός και κατά συνέπεια, λόγω του ορισμού 1.8 προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι δικυκλικός. Ισοδύναμα, θα λέμε ότι ο πίνακας A έχει την ιδιότητα A . [Young].

Το γράφημα ενός πίνακα με την ιδιότητα A αναπαρίσταται με ένα διμερές (bipartite) γράφημα (βλ. σχήμα 5) [Saad]. Σε ένα τέτοιο γράφημα οι κορυφές του χωρίζονται σε



Σχήμα 5: Η ιδιότητα A παριστάνεται με ένα διμερές γράφημα.

δύο σύνολα με τέτοιο τρόπο ώστε αν αυτές ανήκουν στο ίδιο σύνολο να μην υπάρχει ακμή που να τις συνδέει μεταξύ τους. Στο γράφημα αυτό δεν αποτυπώνονται οι ακμές που αντιστοιχούν στα διαγώνια στοιχεία του πίνακα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ένας πίνακας με την ιδιότητα A μπορεί να μετατραπεί σε ένα δικυκλικό πίνακα της μορφής

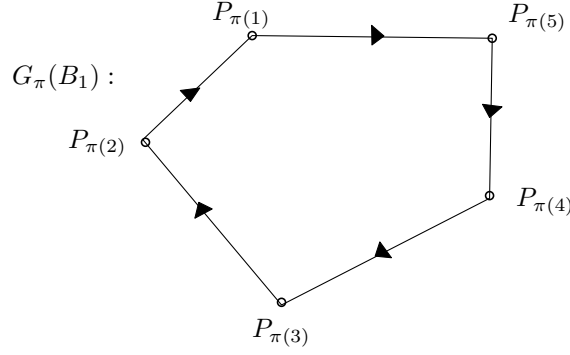
$$\begin{pmatrix} D_1 & -F \\ -E & D_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

όπου D_1, D_2 είναι διαγώνιοι πίνακες. Η ανωτέρω δομή του πίνακα προκύπτει αν τοποθετηθούν όλοι οι άγνωστοι από το 1 ως το n_1 , όπου $n_1 = |S_1|$, έτσι ώστε να ανήκουν στο σύνολο S_1 και οι υπόλοιποι από το $n_1 + 1$ ως το n να ανήκουν στο σύνολο S_2 . Επίσης, το ότι ο πίνακας A της (11) είναι δικυκλικός χωρίς περιορισμούς στη διάταξη των διαγωνίων υποπινάκων $A_{i,i}$ προκύπτει από την ιδιότητα A^π των Arms, Gates και Zondek [Young]. Αξίζει να σημειωθεί ότι επιλέγοντας το $N=2$ στην (11), ο πίνακας B της (13) είναι της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} \\ B_{2,1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

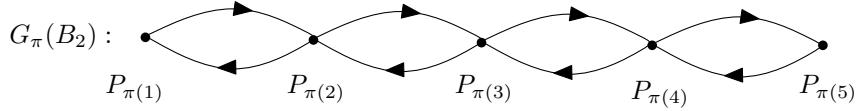
δηλαδή είναι ένας ασθενά κυκλικός πίνακας με δείκτη 2. Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε διαμέριση του πίνακα A της (11) με $N=2$, για την οποία οι διαγώνιοι υποπίνακες είναι μη ιδιάζοντες, είναι τέτοια ώστε ο πίνακας A να είναι δικυκλικός. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας B της (20) έχει την ίδια δομή με τον πίνακα A της (19) με τη διαφορά ότι οι διαγώνιοι υποπίνακες D_1, D_2 έχουν αντικατασταθεί από μηδενικούς υποπίνακες [Saad]. Στη συνέχεια περιγράφεται μια χρήσιμη μέθοδος για να διαπιστωθεί αν ένας πίνακας A της μορφής (11) είναι p -κυκλικός ή αν ένας πίνακας B της μορφής (13) είναι ασθενά κυκλικός με δείκτη p με τη βοήθεια της θεωρίας των γραφημάτων.

Ο τρόπος σχεδίασης του κατά ομάδες κατευθυνόμενου γραφήματος $G_\pi(B)$ ενός $n \times n$ πίνακα B είναι ο ίδιος με αυτόν που αναφέρθηκε πρωτύτερα με τη διαφορά ότι τώρα αντί να έχουμε n κόμβους, έχουμε N κόμβους $P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(N)}$, όπου N είναι ο αριθμός των διαγωνίων υποπινάκων του διαμερισμένου πίνακα της (11). Επομένως, αν ο υποπίνακας B_{ij} του διαμερισμένου πίνακα B έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο, τότε συνδέουμε τον κόμβο $P_{\pi(i)}$ με τον κόμβο $P_{\pi(j)}$ δημιουργώντας ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από τον $P_{\pi(i)}$ στον $P_{\pi(j)}$. Για παράδειγμα, το κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα $G_\pi(B_1)$ του πίνακα B_1 της (17) για $p = 5$ δίνεται από το σχήμα 6.



Σχήμα 6: Κυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με δείκτη $p = 5$ του πίνακα B_1 .

Όμοια, το κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα B_2 της (18) είναι το $G_\pi(B_2)$ για $p = 2$ (βλ. σχήμα 7)



Σχήμα 7: Κυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με δείκτη $p = 2$ του πίνακα B_2 .

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για όλα τα παραπάνω ισχύει η υπόθεση ότι όλοι οι υποπίνακες $B_{i,j}$ των (17) και (18) έχουν ένα τουλάχιστον μη μηδενικό στοιχείο. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των μηκών των κύκλων του πρώτου κατά ομάδες κατευθυνόμενου γραφήματος είναι $p = 5$ και κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον ορισμό 1.7 το πρώτο κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη 5. Όμοια, το δεύτερο κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα, είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη 2. Η ανωτέρω χρήση των κατά ομάδες κατευθυνόμενων γραφημάτων μας επιτρέπει να περιγράψουμε τους p -κυκλικούς πίνακες με γεωμετρικούς όρους. Μια χρήσιμη μέθοδος για να διαπιστωθεί αν ένας πίνακας είναι p -κυκλικός δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.4. Έστω ότι το κατά ομάδες (block) κατευθυνόμενο γράφημα του διαμερισμένου πίνακα Jacobi B της (13) είναι ισχυρά συνεκτικό. Τότε ο πίνακας A της (11) είναι p -κυκλικός αν το κατά ομάδες (block) κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα B είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη p .

Το ανωτέρω θεώρημα στο οποίο συσχετίζονται τα κατά ομάδες κατευθυνόμενα γραφήματα με τους p -κυκλικούς πίνακες είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τη διάγνωση της ιδιότητας του συνεπώς διατεταγμένου στους πίνακες που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Ορισμός 1.9. Αν ο πίνακας A της (11) είναι p -κυκλικός, τότε ο A είναι συνεπώς διατεταγμένος (consistently ordered) αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$B(a) = aL + a^{-(p-1)}U \quad (21)$$

που προκύπτει από τον κατά ομάδες πίνακα Jacobi B της (14) είναι ανεξάρτητες του a , για $a \neq 0$. Κατά συνέπεια και ο πίνακας B είναι συνεπώς διατεταγμένος. Σε οποιαδήποτε άλιθη περίπτωση οι πίνακες A και B είναι μη συνεπώς διατεταγμένοι.

Για το παράδειγμα του πίνακα A_1 της (15), έχουμε σύμφωνα με την (21), ότι

$$B_1(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-(p-1)}B_{1,p} \\ aB_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & aB_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & aB_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

και με απλούς πολλαπλασιασμούς πινάκων έχουμε ότι $B_1^p(a) = B_1^p$ για όλα τα $a \neq 0$, δηλαδή, οι ιδιοτιμές του $B_1(a)$ είναι ανεξάρτητες του a . Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας A_1 είναι συνεπώς διατεταγμένος.

Για το παράδειγμα του πίνακα A_2 της (16) έχουμε, θεωρώντας τη διαμέριση του x , σε σχέση με τη διαμέριση (18), ότι

$$B_2(a)x = \lambda x \quad (23)$$

όπου $x \neq 0$. Η (23) λόγω της (18) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$aB_{j,j-1}X_{j-1} + \frac{1}{a}B_{j,j+1}X_{j+1} = \lambda X_j, \quad 1 \leq j \leq N \quad (24)$$

όπου $B_{1,0}$ και $B_{N,N+1}$ είναι μηδενικοί πίνακες. Για $Z_j = \frac{1}{a^{j-1}}X_j$, $1 \leq j \leq N$, η (24) λαμβάνει τη μορφή

$$B_{j,j-1}Z_{j-1} + B_{j,j+1}Z_{j+1} = \lambda Z_j, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (25)$$

Συνεπώς, κάθε ιδιοτιμή λ του $B_2(a)$ είναι για $a \neq 0$, ιδιοτιμή και του B_2 αποδεικνύοντας έτσι ότι ο πίνακας A_2 είναι ένας δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας. Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο.

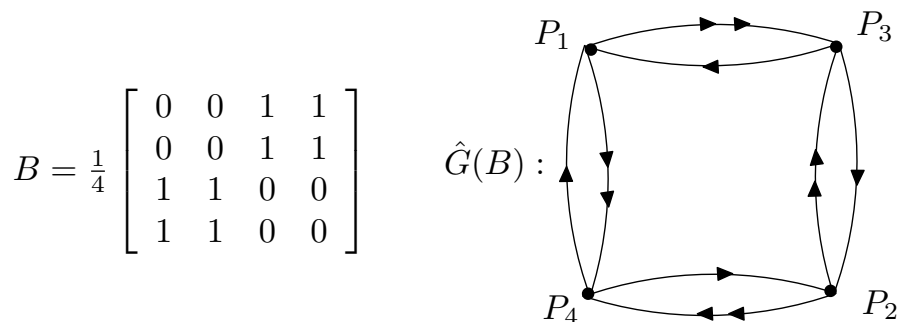
Συμπέρασμα: Κάθε κατά ομάδες τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής (16), με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες, είναι ένας δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας.

Δεδομένου ότι όλοι οι p -κυκλικοί πίνακες A δεν είναι συνεπώς διατεταγμένοι, δεν είναι δύσκολο να βρεθεί ένας $n \times n$ μεταθετικός πίνακας P ο οποίος να μεταθέτει τα στοιχεία του A κατά ομάδες έτσι ώστε ο PAP^T να είναι p -κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος. Γενικά, από τον ορισμό 1.6, προκύπτει ότι υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας P ο οποίος να μεταθέτει τα κατά ομάδες στοιχεία του πίνακα Jacobi έτσι ώστε ο PBP^T να είναι ασθενά κυκλικός με δείκτη p και της μορφής (17) και άρα να είναι συνεπώς διατεταγμένος. Να σημειωθεί ότι οι μεταθετικοί πίνακες P , οι οποίοι οδηγούν σε διάταξη με συνέπεια, δεν είναι μοναδικοί.

Αξίζει να τονιστεί ότι η γνώση των ιδιοτήτων του p -κυκλικού και του συνεπώς διατεταγμένου πίνακα διευκολύνει ιδιαίτερα στη θεωρητική ανάλυση της SOR επαναληπτικής μεθόδου.

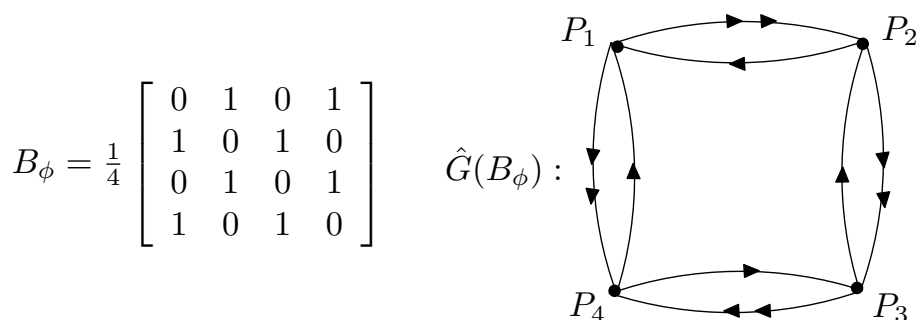
Μια γραφοθεωρητική ερμηνεία της έννοιας των συνεπώς διατεταγμένων κυκλικών πινάκων με δείκτη 2, είναι η ακόλουθη. Αν δοθεί ο πίνακας $B = (b_{ij})$, τότε κατασκευάζεται το κατευθυνόμενο γράφημα $\hat{G}(B)$ τύπου 2 του B με τέτοιο τρόπο ώστε αν $b_{ij} \neq 0$, τότε το μονοπάτι από τον κόμβο P_i προς τον κόμβο P_j να συμβολίζεται με ένα διπλής κατεύθυνσης

τόξο (βλ. σχήμα 8) μόνο αν $j > i$ και λέγεται "μείζον" μονοπάτι, διαφορετικά να συμβολίζεται με ένα μονής κατεύθυνσης τόξο και λέγεται "ελάσσον" μονοπάτι. Ο πίνακας B θα λέγεται συνεπώς διατεταγμένος αν και μόνο αν κάθε κύκλος του κατευθυνόμενου γραφήματός του έχει ίσο πλήθος από "μείζονα" και "ελάσσονα" μονοπάτια. Για παράδειγμα, στο σχήμα 8 ο πίνακας B είναι συνεπώς διατεταγμένος διότι το κατευθυνόμενο γράφημα του τύπου 2 έχει κύκλους με ίσο πλήθος από μείζονα και ελάσσονα μονοπάτια. Αν μετατεθούν



Σχήμα 8: Γράφημα συνεπώς διατεταγμένου πίνακα

οι δείκτες 2 και 3, συμβολίζουμε τον πίνακα με B_ϕ . Όπως βλέπουμε στο γράφημα του B_ϕ , υπάρχει ένα κλειστό μονοπάτι του κύκλου του με άνισο αριθμό μείζονων και ελασσόνων μονοπατιών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο πίνακας B_ϕ να είναι μη συνεπώς διατεταγμένος. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλη η γραφοθεωρητική αναπαράσταση των συνεπώς διατεταγ-



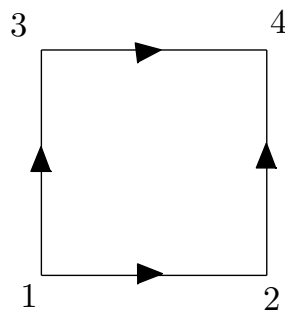
Σχήμα 9: Γράφημα μη συνεπώς διατεταγμένου πίνακα

μένων πινάκων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς με αυτή μπορούμε να παράγουμε εξισώσεις διαφορών από διαφορικές εξισώσεις.

Σύμφωνα με τον Young μπορεί να αποδειχθεί ότι ένας πίνακας είναι συνεπώς διατεταγμένος χωρίς να αποτελεί προϋπόθεση η γνώση των ιδιοτιμών του αλλά βρίσκοντας τα διατεταγμένα διανύσματα τα οποία χρησιμεύουν στην κατασκευή t διακριτών υποσυνόλων S_k του W [Young].

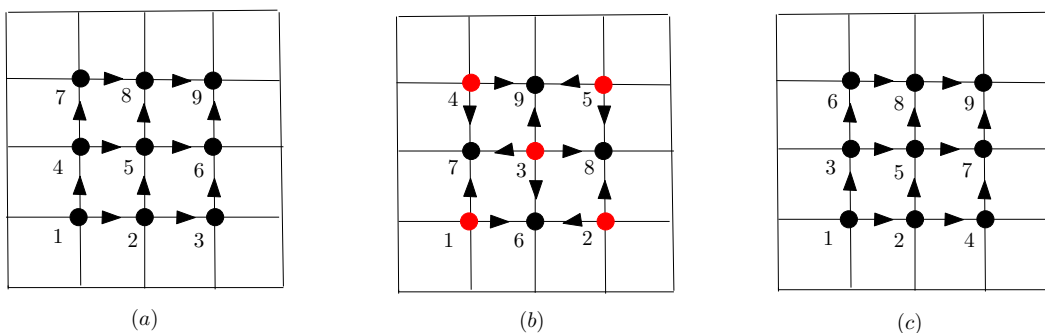
Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή των p -κυκλικών πινάκων, η διακριτοποίηση των δεύτερης τάξης ελλειπτικών ή παραβολικών ΜΔΕ είτε με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είτε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καταλήγει στην επίλυση ενός συστήματος, όπου ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι p -κυκλικός με $p = 2$ [Var1]. Στο πλέγμα N σημείων (βλ. §1.1.2), διατεταγμένων με κάποια αρίθμηση $1, 2, \dots, N$, μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια των γραφημάτων, αν ο πίνακας που προκύπτει

από τη διακριτοποίηση χρησιμοποιώντας το μόριο των 5 σημείων, είναι συνεπώς διατεταγμένος. Για να κατασκευαστεί το γράφημα, σχεδιάζονται τόξα που συνδέουν κάθε ζεύγος σημείων του πλέγματος με κατεύθυνση από τον κόμβο με τη μικρότερη αρίθμηση προς τον κόμβο με τη μεγαλύτερη αρίθμηση. Για κάθε κύκλο, που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τους κόμβους του πλέγματος, αν το πλήθος των τόξων με φορά ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού ισούται με το πλήθος των τόξων με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, τότε ο αντίστοιχος πίνακας είναι συνεπώς διατεταγμένος [Young]. Για παράδειγμα, για ένα σύνολο 4 σημείων του πλέγματος διατεταγμένων σε τετράγωνο, είναι αρκετό να έχουμε δύο τόξα με φορά ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού και δύο τόξα με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού. Πράγματι, παρατηρεί-



Σχήμα 10: Πλέγμα τεσσάρων σημείων

ται ότι ακολουθώντας τη φορά $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (βλ. σχήμα 10) έχουμε δύο τόξα με φορά ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού και δύο τόξα με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού. Επομένως ο πίνακας του συστήματος που προκύπτει από αυτά τα 4 σημεία του πλέγματος, είναι συνεπώς διατεταγμένος. Στο σχήμα 11 παρατηρείται ότι ο πίνακας που προκύπτει από την φυσική διάταξη, την κόκκινη μαύρη διάταξη και την κατά διαγωνίους διάταξη των σημείων του πλέγματος είναι επίσης συνεπώς διατεταγμένος.



Σχήμα 11: (a) Φυσική διάταξη (b) Κόκκινη μαύρη διάταξη (c) Κατά διαγωνίους διάταξη

Τα γραφήματα αποτελούν επίσης ένα ιδιαίτερα χρήσιμο βοήθημα στην εύρεση του εκθέτη k στις συναρτησιακές σχέσεις που συνδέουν τις ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα μιας επαναληπτικής μεθόδου με τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Jacobi, όταν ο πίνακας A της (11) είναι p -κυκλικός. Για παράδειγμα, η συναρτησιακή σχέση ιδιοτιμών της μη

συμμετρικής SSOR (USSOR) μεθόδου [LiVar] για p -κυκλικούς πίνακες δίνεται από την

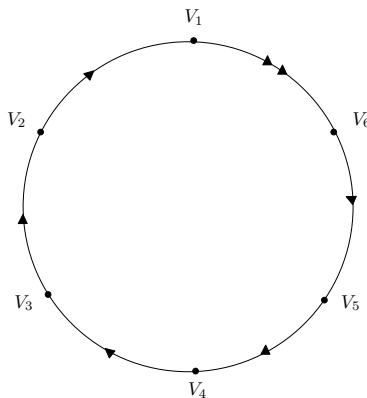
$$[\nu - (1 - \omega)(1 - \hat{\omega})]^p = \nu^k [\nu\omega + \hat{\omega} - \omega\hat{\omega}]^{|\zeta_L|^{-k}} [\nu\hat{\omega} + \omega - \omega\hat{\omega}]^{|\zeta_U|^{-k}} \cdot (\omega + \hat{\omega} - \omega\hat{\omega})^{2k} \mu^p$$

όπου με $|\zeta_L|, |\zeta_U|$ συμβολίζεται το πλήθος των μη μηδενικών κατά ομάδες υποπινάκων του B που βρίσκονται στους πίνακες L, U , αντίστοιχα και

$$k = \begin{cases} |\eta_L| + |\eta_U|, & \text{αν } p > 2 \\ 1, & \text{αν } p = 2 \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor, \quad (26)$$

όπου με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζεται το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού x και με $|\eta_L|, |\eta_U|$ συμβολίζεται το πλήθος των μη μηδενικών κατά ομάδες υποπινάκων που βρίσκονται στο κάτω και άνω τριγωνικό μέρος του πίνακα LU . Ισχύει επίσης ότι $|\zeta_L| \geq k$ και $|\zeta_U| \geq k$. Παρουσιάζεται στη συνέχεια η γραφοθεωρητική ερμηνεία του θετικού ακεραίου k της (26). Έστω ότι με $G_\pi[B]$ συμβολίζεται το κατευθυνόμενο γράφημα τύπου 2 του κατά ομάδες πίνακα B της (13). Αν δοθεί ο πίνακας B , τότε κατασκευάζεται το κατευθυνόμενο γράφημα $G_\pi[B]$ τύπου 2 του B , με p κορυφές V_1, V_2, \dots, V_p , με τέτοιο τρόπο ώστε αν $B_{ij} \neq 0$, τότε το μονοπάτι από την κορυφή V_i προς την κορυφή V_j να συμβολίζεται με ένα διπλής κατεύθυνσης τόξο μόνο αν $j > i$, διαφορετικά συμβολίζεται με ένα μονής κατεύθυνσης τόξο. Τότε, για κάθε κύκλο μήκους p , ο οποίος αποτελείται από μονής και/ή διπλής κατεύθυνσης τόξα, ο θετικός ακέραιος k της (26) είναι το πλήθος των φορών (κινούμενων στο κλειστό μονοπάτι) που ένα διπλής κατεύθυνσης τόξο ακολουθεί ένα μονής κατεύθυνσης τόξο. Για να γίνει αυτό καλύτερα κατανοητό, παραθέτουμε τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Έστω ο πίνακας Jacobi της (17). Το κατευθυνόμενο γράφημα του $G_\pi(B_1)$ δίνεται από το σχήμα 12. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο ένα διπλής κατεύθυνσης τόξο που ακολουθεί ένα μονής κατεύθυνσης και κατά συνέπεια είναι $k = 1$.

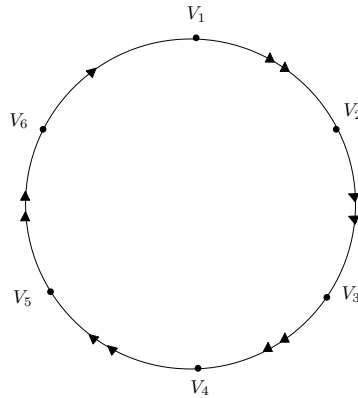


Σχήμα 12: Γράφημα του $G_\pi(B_1)$

Παράδειγμα 2: Για τον πίνακα

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{2,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & B_{p-1,p} \\ B_{p,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

το κατευθυνόμενο γράφημά του είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 13.



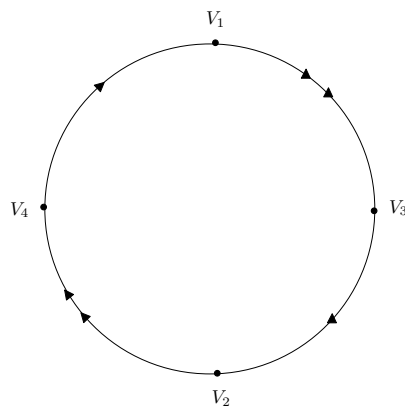
Σχήμα 13: Γράφημα του $G_\pi(B_2)$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο ένα διπλής κατεύθυνσης τόξο που ακολουθεί ένα μονής κατεύθυνσης και κατά συνέπεια είναι $k = 1$.

Παράδειγμα 3: Για τον πίνακα

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2,4} \\ 0 & B_{3,2} & 0 & 0 \\ B_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

το κατευθυνόμενο γράφημα του είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 14



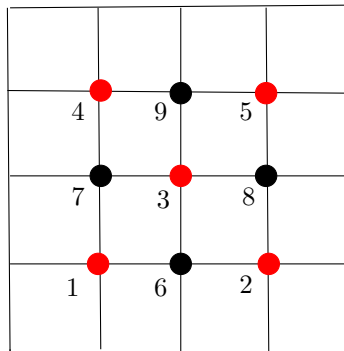
Σχήμα 14: Γράφημα του $G_\pi(B_3)$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο διπλής κατεύθυνσης τόξα που ακολουθούν δύο μονής κατεύθυνσης και κατά συνέπεια είναι $k = 2$.

Δύο μεγάλες κατηγορίες εφαρμογών, οι οποίες καταλήγουν στην επίλυση γραμμικών συστημάτων όπου ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος, είναι η αριθμητική επίλυση ΜΔΕ με την κόκκινη μαύρη διάταξη [AdamJor85], [AdamOrt82] η οποία είναι κατάλληλη για παράλληλη επεξεργασία και η ανάλυση Μαρκοβιανών αλυσίδων κατά την προσομοίωση των δικτύων ουρών [BonDaSte91], [Stewart94]. Στις επόμενες παραγράφους θα αναλύσουμε διεξοδικότερα αυτές τις δύο κατηγορίες.

1.1.4 Η Κόκκινη-Μαύρη Διάταξη

Οι ανάγκες για την επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας που εμφανίζονται σε επιστημονικές εφαρμογές του φυσικού κόσμου οδήγησαν στην αναζήτηση λύσεων χαμηλού υπολογιστικού κόστους και στη στροφή των υπολογισμών προς την παράλληλη επεξεργασία [Akl89], [CosTry95], [Evans82], [FrePhil92], [Foster94], [Jaja92], [KuGraGuKa94]. Για παράδειγμα, ένα κλασικό πρόβλημα είναι η πρόβλεψη του καιρού. Το πρόβλημα αυτό απαιτεί τη χρήση αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση συστημάτων ΜΔΕ. Η διακριτοποίηση οδηγεί στην κατασκευή ενός πλέγματος και χρησιμοποιώντας μια διάταξη των σημείων το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος (βλ. §1.2.1). Με την κόκκινη μαύρη (ΚΜ) διάταξη (βλ. σχήμα 15) υπολογίζονται πρώτα τα κόκκινα (περιττά) και μετά τα μαύρα (άρτια) σημεία [OrtVoi85], [Ortega87], επιτυγχάνοντας κατά αυτόν τον τρόπο ανεξαρτησία υπολογισμού των κόκκινων από τα μαύρα σημεία και αντίστροφα. Η κόκκινη μαύρη διάταξη των σημείων αποτέλεσε μια από τις πιο σημαντικές ιδέες στην οποία βασίστηκαν πάρα πολλές ερευνητικές εργασίες για την εισαγωγή της παραλληλίας στις επαναληπτικές μεθόδους [Adams82], [XieAd99]. Προκειμένου να εισαχθεί η παραλληλία όταν υπάρχουν μικτές μερικές παράγωγοι ($\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$) χρησιμοποιήθηκαν και άλλα χρώματα, όπως 4-χρώματα [AdamJor85], [Adams82], [OrtVoi85], [Ortega87], [?]. Σε αυτή τη διάταξη, σε αντίθεση με τη φυσική διάταξη που περιγράψαμε στην παράγραφο

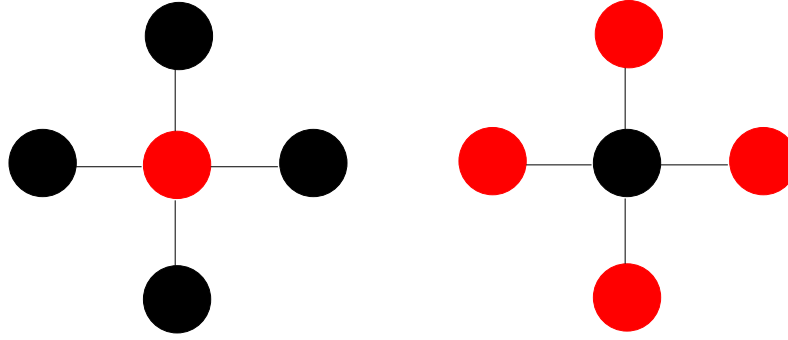


Σχήμα 15: Αρίθμηση σημείων του πλέγματος με κόκκινη-μαύρη διάταξη.

1.2.1, χρωματίζονται με κόκκινο και μαύρο τα σημεία του πλέγματος, έτσι ώστε

- Αν $i + j$ άρτιος, τότε το σημείο $u_{i,j}$ έχει κόκκινο χρώμα
- Αν $i + j$ περιττός, τότε το σημείο $u_{i,j}$ έχει μαύρο χρώμα

Έτσι, τα κόκκινα σημεία μπορούν να ενημερωθούν ανεξάρτητα από τα μαύρα σημεία και τα μαύρα σημεία μπορούν να ενημερωθούν ανεξάρτητα από τα κόκκινα σημεία για το μόνιο των 5 σημείων όπως φαίνεται στο Σχήμα 16. Όπως η φυσική διάταξη έτσι και η κόκκινη μαύρη διάταξη παράγει γραμμικά συστήματα των οποίων οι πίνακες συντελεστών είναι δικυκλικοί συνεπώς διατεταγμένοι, με αποτέλεσμα η ταχύτητα σύγκλισης της SOR μεθόδου να είναι η ίδια με εκείνη της φυσικής διάταξης. Επομένως, συγκρίνοντας τις διάφορες SOR επαναληπτικές μεθόδους απαιτείται το ίδιο πλήθος επαναλήψεων για τη σύγκλισή τους τόσο για τη φυσική όσο και για την κόκκινη μαύρη διάταξη. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η κόκκινη μαύρη διάταξη, ο πίνακας A έχει τη μορφή



Σχήμα 16: Μόριο 5 σημείων για τους κόκκινους και τους μαύρους κόμβους

[Young]

$$A = \begin{bmatrix} D_R & H \\ K & D_B \end{bmatrix} \quad (27)$$

όπου H είναι ένας $m \times r$ υποπίνακας, $K = H^T$ και D_R, D_B είναι $m \times m$ και $r \times r$ διαγώνιοι και μη ιδιάζοντες υποπίνακες, αντίστοιχα με $m + r = N$. Ο πίνακας αυτός έχει τη δομή του (20) δηλαδή είναι ένας δικυκλικός συνεπώς διατεταγμένος πίνακας.

1.1.5 Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Συνήθως, η συμπεριφορά ενός συστήματος είναι δυνατόν να περιγραφεί από το σύνολο των διαφορετικών καταστάσεων που μπορεί να περιέλθει το σύστημα δηλώνοντας και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη κατάσταση. Αν ο χρόνος που απαιτείται για τη μετάβαση του φυσικού συστήματος από μια κατάσταση σε μια άλλη κατάσταση ακολουθεί την εκθετική κατανομή, τότε το σύστημα μπορεί να περιγραφεί με μια Μαρκοβιανή διαδικασία.

Η πιο χαρακτηριστική ιδιότητα ενός Μαρκοβιανού μοντέλου είναι η Μαρκοβιανή Ιδιότητα. Η εξέλιξη δηλαδή του συστήματος, εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση του συστήματος και όχι από προηγούμενες καταστάσεις. Μια πιο ακριβής διατύπωση της Μαρκοβιανής Ιδιότητας είναι ότι όλη η πληροφορία για τον καθορισμό της αμέσως επόμενης κίνησης του μοντέλου υπάρχει στην τρέχουσα κατάσταση του συστήματος και δεν απαιτείται η γνώση της ιστορίας του συστήματος. Το σύνολο όλων των καταστάσεων του συστήματος, αποτελεί το χώρο καταστάσεων της διαδικασίας, ο οποίος είναι είτε διακριτός, είτε συνεχής.

Παραδείγματα συνεχούς χώρου καταστάσεων είναι το επίπεδο του νερού σε μια δεξαμενή ή η θερμοκρασία σε ένα πυρηνικό αντιδραστήρα, ενώ παράδειγμα διακριτού χώρου καταστάσεων είναι το πλήθος των πελατών που περιμένουν να εξυπηρετηθούν, σε σχέση με τον ρυθμό εξυπηρέτησής τους.

Αν ο χώρος καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι διακριτός, τότε λέγεται «Μαρκοβιανή Αλυσίδα». Υπάρχουν δύο κατηγορίες σε αυτή την περίπτωση. Οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες διακριτού χρόνου και οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες συνεχούς χρόνου. Επιπρόσθετα, οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες κάποιες φορές έχουν την ιδιότητα ότι αν ο ελάχιστος αριθμός μεταβολών που θα συμβεί, από τη στιγμή που ένα σύστημα αφήνει μια κατάσταση μέχρι να ξαναγυρίσει σε αυτή από οποιοδήποτε μονοπάτι, είναι πολλαπλάσιος ενός ακεραίου αριθμού $p > 1$, τότε αυτές λέγονται περιοδικές με περίοδο p ή p -κυκλικές με

περίοδο p . Οι Bouhoure, Dallery και Stewart [BonDaSte91] έδειξαν ότι οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες που προκύπτουν από μοντέλα δικτύων ουρών συχνά έχουν αυτή την ιδιότητα. Στη διακριτή περίπτωση το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί είναι το

$$\pi^T P = \pi^T, \quad \|\pi\|_1 = 1 \quad (28)$$

ή ισοδύναμα,

$$(I - P^T)\pi^T = 0, \quad \|\pi\|_1 = 1,$$

όπου το στοιχείο π_i είναι η πιθανότητα του να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση i , όταν αυτό είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Θέτοντας $A \equiv I - P^T$ και δεδομένου ότι ο P είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης με ανάστροφο της μορφής (17), το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει ένα πίνακα της μορφής (15) και ο αντίστοιχος πίνακας Jacobi είναι ο $B_1 = P^T$ [BerPle79], [CouSem86]. Επομένως, όλα τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής για δικυκλικούς πίνακες μπορούν να εφαρμοστούν σε δικυκλικές Μαρκοβιανές Αλυσίδες, απλά αντικαθιστώντας τον πίνακα Jacobi με τον P^T , [Leary92], [KonPleSte91], [HadjPleTR92], [HadjPle92].

2 Επαναληπτικές Μέθοδοι

Στην ακόλουθη παράγραφο παρουσιάζεται η βασική επαναληπτική μέθοδος Successive Overrelaxation (SOR) για την αριθμητική επίλυση μεγάλων γραμμικών συστημάτων. Επίσης, παρατίθενται ορισμοί και θεωρήματα για την εύρεση της συναρτησιακής σχέσης της SOR μεθόδου, για την σύγκλιση της και για τον προσδιορισμό των βέλτιστων παραμέτρων της.

2.1 Γενικά

Η χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών ή εκείνη των πεπερασμένων στοιχείων για τη διακριτοποίηση ΜΔΕ, οδηγεί στη λύση ενός μεγάλου, αραιού, γραμμικού συστήματος της μορφής

$$Au = b, \quad (29)$$

όπου ο A είναι ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας και u, b είναι διανύσματα n τάξης. Γενικά, οι επαναληπτικές μέθοδοι απαιτούν λιγότερη μνήμη και αριθμητικές πράξεις από τις αμέσους μεθόδους για μεγάλα συστήματα. Η γενική μορφή των μεθόδων αυτών είναι [For53]

$$u^{(k+1)} = Gu^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

όπου G είναι ο επαναληπτικός πίνακας και c ένα σταθερό διάνυσμα. Επίσης, η επαναληπτική μέθοδος (30) θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες απαιτήσεις:

1. Αν σε κάποια επανάληψη βρεθεί η λύση του (29), τότε οι επόμενες επαναλήψεις να παραμείνουν αμετάβλητες (συμβατότητα).
2. Αν η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζεται από την (30) συγκλίνει, τότε συγκλίνει στη λύση του (29) (αμοιβαία συμβατότητα).

2.2 Η SOR επαναληπτική μέθοδος

Μια τεχνική ιδιαίτερα αποτελεσματική στην τυποποίηση, ανάπτυξη και βελτίωση της αποδοτικότητας των επαναληπτικών μεθόδων είναι η τεχνική της προσυνθήκης (preconditioning). Ο όρος "προσυνθήκη" εισήχθη από τον Turing το 1948 και δήλωνε τη μετατροπή του αρχικού γραμμικού συστήματος σε ένα άλλο με την ίδια λύση, το οποίο όμως ήταν ευκολότερο να επιλυθεί. Το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της τεχνικής αυτής είναι η εύρεση του κατάλληλου πίνακα προσυνθήκης R (preconditioned matrix). Για να εφαρμόσουμε την τεχνική αυτή, πολλαπλασιάζουμε αρχικά το σύστημα (29) από αριστερά με τον πίνακα A^{-1} , οπότε έχουμε

$$u = A^{-1}b, \quad (31)$$

η οποία είναι η ακριβής λύση του συστήματος. Όμως η εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα δεν είναι δυνατή για πίνακες μεγάλης τάξης, για το λόγο αυτό προσπαθούμε να δημιουργήσουμε έναν πίνακα R που να προσεγγίζει τον A , να είναι μη ιδιάζων και ο αντίστροφός του να υπολογίζεται εύκολα.

Αναβάλλοντας προσωρινά την επιλογή του R , πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την (29) με τον R^{-1} , οπότε έχουμε

$$R^{-1}Au = R^{-1}b. \quad (32)$$

Από την (32) μπορούμε να ορίσουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau R^{-1}(b - Au^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

όπου $\tau \neq 0$ είναι μια πραγματική παράμετρος [Mis78], [MisEv1], $u = (u_1, u_2)$ και $b = (b_1, b_2)^T$, όπου u_1, b_1 είναι $n_1 \times 1$ διανύσματα και u_2, b_2 είναι $n_2 \times 1$ διανύσματα. Ο ρόλος της παραμέτρου τ είναι η ελαχιστοποίηση της φασματικής ακτίνας, δηλαδή της μέγιστης κατά μέτρο ιδιοτιμής του επαναληπτικού πίνακα της (33). Η παράμετρος αυτή καλείται *επιταχυντική παράμετρος*. Να σημειωθεί ότι όσο ο R προσεγγίζει καλύτερα τον A , τόσο η ταχύτητα σύγκλισης της (33) θα αυξάνεται (αν $R = A$, τότε λαμβάνουμε τη λύση αμέσως). Η (33) γράφεται υπό τη μορφή

$$u^{(k+1)} = G_\tau u^{(k)} + c_\tau, \quad (34)$$

με

$$G_\tau = I - \tau R^{-1}A \quad \text{και} \quad c_\tau = \tau R^{-1}b, \quad (35)$$

όπου ο G_τ είναι ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο πίνακας A έχει τη μορφή

$$A = D - C_L - C_U \quad (36)$$

όπου ο D είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι τα ίδια με τα διαγώνια στοιχεία του A και οι πίνακες $-C_L, -C_U$ είναι τα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του A , αντίστοιχα. Έστω ότι

$$R = D - \omega C_L \quad (37)$$

στην (33), όπου ω είναι ένας πραγματικός αριθμός του οποίου ο ρόλος στη φάση αυτή είναι να διαταράξει τον R έτσι ώστε να προσεγγίζει καλύτερα τον A . Γ' αυτή τη μορφή του R η (33), λόγω της (37), γίνεται

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau(I - \omega L)^{-1}D^{-1}(b - Au^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

η οποία είναι γνωστή σαν Extrapolated SOR (ESOR) μέθοδος. Αν θέσουμε $\tau = \omega$ στην ESOR μέθοδο λαμβάνουμε τη δημοφιλή SOR μέθοδο, η οποία δίνεται διαδοχικά από τους τύπους

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \omega(I - \omega L)^{-1}D^{-1}(b - Au^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

ή

$$u^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega u^{(k)} + \omega(I - \omega L)^{-1}c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

όπου

$$\mathcal{L}_\omega = I - \omega(I - \omega L)^{-1}D^{-1}A \quad (41)$$

ή

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}[(I - \omega L)I + \omega U] \quad (42)$$

είναι ο επαναληπτικός πίνακας της SOR μεθόδου.

2.2.1 Η συναρτησιακή σχέση - Σύγκλιση

Απαραίτητη υπόθεση για τη μελέτη σύγκλισης της SOR μεθόδου είναι η εύρεση της συναρτησιακής σχέσης που συνδέει τις ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα \mathcal{L}_ω της SOR μεθόδου με τις ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα B της μεθόδου Jacobi. Η μεγάλη σημασία για την εύρεση της συναρτησιακής σχέσης έγκειται, σύμφωνα με τον [Young], στο γεγονός ότι η ύπαρξή της αποτελεί τη βάση για τον ακριβή προσδιορισμό της αξίας του ω το οποίο ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα $\rho(\mathcal{L}_\omega)$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια θεωρήματα, συχνά χωρίς απόδειξη, χρήσιμα για τη συνέχεια.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η (8) είναι η κανονική μορφή ενός $n \times n$ πίνακα $A \geq 0$, ο οποίος είναι κυκλικός με δείκτη $k (> 1)$. Σύμφωνα με το [Var1] έχουμε ότι αν λ είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του A , τότε όλες οι ρίζες του $t^k - \lambda^k$ είναι επίσης ιδιοτιμές του A . Χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή στη γενική περίπτωση των ασθενά κυκλικών πινάκων, προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα το οποίο διατυπώθηκε το 1936 από τον Romanovsky [R36].

Θεώρημα 2.1. Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ ασθενά κυκλικός πίνακας με δείκτη $k > 1$. Τότε

$$\phi(t) = \det(tI - A) = t^m \prod_{i=1}^r (t^k - \sigma_i^k). \quad (43)$$

Συμβολίζουμε με σ_i μια μη μηδενική ιδιοτιμή του A .

Ένα ακόμα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου, το οποίο διατυπώθηκε από τον Kahan (1958), είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 2.2. Έστω B ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας με μηδενικά διαγώνια στοιχεία του οποίου γράφουμε στη μορφή (14). Αν ο επαναληπτικός πίνακας της SOR μεθόδου, δίνεται από την (42) τότε για όλα τα $\omega \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|, \quad (44)$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του \mathcal{L}_ω είναι κατά μέτρο ίσες με $|\omega - 1|$.

Απόδειξη. Έστω $\phi(\lambda) = \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του \mathcal{L}_ω . Αφού ο L είναι ένας αυστηρά κάτω τριγωνικός πίνακας, ο $I - \omega L$ είναι μη ιδιάζων και καθώς $\det(I - \omega L) = 1$, θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(\lambda) \\ &= \det(I - \omega L) \det(\lambda I - \mathcal{L}_\omega) \\ &= \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \omega \lambda L - \omega U\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Ο σταθερός όρος σ του $\phi(\lambda)$, δηλ. το γινόμενο των ιδιοτιμών του \mathcal{L}_ω , λαμβάνεται θέτοντας $\lambda = 0$ στην (45). Επομένως,

$$\sigma = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i(\omega)) = \det\{(\omega - 1)I - \omega U\} = (\omega - 1)^n. \quad (46)$$

Κατά συνέπεια,

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_i |\lambda_i(\omega)| \geq |\omega - 1|, \quad (47)$$

όπου η ισότητα ισχύει ίσως μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ είναι κατά μέτρο ίσες με $|\omega - 1|$, γεγονός το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη. \square

Αν στην γενική περίπτωση ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την πραγματική τιμή του ω η οποία ελαχιστοποιεί τη $\rho(\mathcal{L}_\omega)$, τότε το παραπάνω αποτέλεσμα του Kahan μας δείχνει ότι αρκεί να θεωρήσουμε το ανοιχτό διάστημα $0 < \omega < 2$ δηλ. να θεωρήσουμε τέτοιες τιμές του ω ώστε ο \mathcal{L}_ω να συγκλίνει. Το αποτέλεσμα αυτό για την SOR μέθοδο το βλέπουμε και στο ακόλουθο θεώρημα του Young

Θεώρημα 2.3. *Αν ο A είναι ένας συνεπώς διατεταγμένος πίνακας με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία τέτοια ώστε ο $B = I - (\text{diag} A)^{-1}A$ να έχει πραγματικές ιδιοτιμές, τότε $\rho(\mathcal{L}_\omega) = \tilde{\rho}(\mathcal{L}_\omega) < 1$ αν και μόνο αν*

$$0 < \omega < 2 \quad (48)$$

και

$$\rho(B) < 1. \quad (49)$$

Στη συνέχεια του ορισμού 1.9 της προηγούμενης ενότητας, παρουσιάζουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4. *Έστω $B = L + U$ ένας συνεπώς διατεταγμένος πίνακας, ασθενά κυκλικός με δείκτη p . Τότε, για κάθε μιγαδική σταθερά α , β , και γ ,*

$$\det\{\gamma I - \alpha L - \beta U\} = \det\{\gamma I - (\alpha^{p-1}\beta)^{1/p}(L + U)\}. \quad (50)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος είναι σχεδόν άμεση απόδειξη του ορισμού 1.9. Για κάθε μιγαδική σταθερά α , β , και γ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \det\{\gamma I - (\alpha L + \beta U)\} &= \prod_{i=1}^n (\gamma - \sigma_i) \\ &\quad \text{ή} \\ \det\{\gamma I - (\alpha^{p-1}\beta)^{1/p}(L + U)\} &= \prod_{i=1}^n (\gamma - \tau_i) \end{aligned} \quad (51)$$

όπου τα σ_i και τ_i είναι αντίστοιχα, ιδιοτιμές των πινάκων $\alpha L + \beta U$ και $(\alpha^{p-1}\beta)^{1/p}(L + U)$. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι τα σύνολα $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ και $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ ταυτίζονται.

Πράγματι, αν το α είτε το β είναι μηδέν, τότε ο πίνακας $\alpha L + \beta U$ είναι αυστηρά τριγωνικός, το οποίο σημαίνει ότι κάθε σ_i είναι μηδέν. Για αυτή την περίπτωση, αποδεικνύεται επίσης εύκολα, ότι και κάθε τ_i είναι μηδέν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι δύο ορίζουσες της (51) να είναι ίσες.

Αν, τα α και β είναι και τα δύο διαφορετικά από το μηδέν, τότε θέτουμε

$$(\alpha/\beta)^{1/p} \equiv \nu.$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\alpha L + \beta U = (\alpha^{p-1}\beta)^{1/p} \{\nu L + \nu^{-(p-1)}U\}. \quad (52)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $B = L + U$ είναι ένας συνεπώς διατεταγμένος ασθενά κυκλικός πίνακας με δείκτη p , μπορούμε να θέσουμε $\nu = 1$, και έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα σύνολα ιδιοτιμών $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ και $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ ξανά ταυτίζονται, γεγονός το οποίο αποδεικνύει ότι οι ορίζουσες της (51) είναι ξανά ίσες. Επομένως, η απόδειξή μας έχει ολοκληρωθεί. \square

Τέλος, προκειμένου να προσδιορίσουμε τη συναρτησιακή σχέση για την SOR μέθοδο, παρουσιάζουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5. Έστω ότι ο πίνακας A της (11) είναι ένας p -κυκλικός πίνακας συνεπώς διατεταγμένος με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες $A_{i,i}$, $1 \leq i \leq N$. Αν $\omega \neq 0$, λ είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα \mathcal{L}_ω της (42) και αν ο μ ικανοποιεί την

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1}\omega^p\mu^p, \quad (53)$$

τότε η μ είναι μια ιδιοτιμή του κατά ομάδες πίνακα Jacobi B της (13). Αντίστροφα, αν μ είναι μια ιδιοτιμή του B και το λ ικανοποιεί την (53), τότε το λ είναι μια ιδιοτιμή του \mathcal{L}_ω .

Απόδειξη. Οι ιδιοτιμές του \mathcal{L}_ω είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\det\{\lambda I - \mathcal{L}_\omega\} = 0, \quad (54)$$

αλλά καθώς ο $I - \omega L$ είναι μη ιδιάζων, σύμφωνα με το θεώρημα 2.2, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση (54) είναι ισοδύναμη με

$$\det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda\omega L - \omega U\} = 0. \quad (55)$$

Έστω

$$\phi(\lambda) \equiv \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda\omega L - \omega U\}. \quad (56)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4 και από την (56), έχουμε ότι

$$\phi(\lambda) = \det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda^{(p-1)/p}\omega B\}. \quad (57)$$

Αφού, από την υπόθεσή μας, έχουμε ότι ο πίνακας A είναι p -κυκλικός, θα ισχύει ότι και ο πίνακας B και κατά συνέπεια και ο $\lambda^{(p-1)/p}\omega B$, είναι ασθενά κυκλικός με δείκτη p . Επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1 του Romanovsky προκύπτει ότι

$$\phi(\lambda) = (\lambda + \omega - 1)^m \prod_{i=1}^r \{(\lambda + \omega - 1)^p - \lambda^{p-1}\omega^p\mu_i^p\}. \quad (58)$$

όπου τα μ_i είναι μη μηδενικά αν $r > 1$.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο του θεωρήματος, θεωρούμε ότι μ είναι μια ιδιοτιμή του κατά ομάδες πίνακα Jacobi B και ότι η λ ικανοποιεί την (53). Τότε, αποδεικνύεται εύκολα ότι ένας από τους παράγοντες της $\phi(\lambda)$ της (58) μηδενίζεται, αποδεικνύοντας έτσι ότι η λ είναι μια ιδιοτιμή του \mathcal{L}_ω . Αποδεικνύεται έτσι το αντίστροφο του θεωρήματος. Για να αποδείξουμε το ευθύ του θεωρήματος, θεωρούμε ότι $\omega \neq 0$ και ότι λ μια ιδιοτιμή του \mathcal{L}_ω , τέτοια ώστε τουλάχιστον ένας παράγοντας της (58) να μηδενίζεται. Αν $\mu \neq 0$ και η μ ικανοποιεί την (53), τότε $(\lambda + \omega - 1) \neq 0$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu_i^p, \quad (59)$$

για κάποια i , $1 \leq i \leq r$, όπου το μ_i δεν είναι μηδέν. Συνδυάζοντας την (59) με την (53), έχουμε ότι

$$\lambda^{p-1} \omega^p (\mu^p - \mu_i^p) = 0 \quad (60)$$

και επειδή τα λ και ω είναι μη μηδενικά, τότε $\mu^p = \mu_i^p$. Λαμβάνοντας p -οστές ρίζες, προκύπτει ότι

$$\mu = \mu_i \exp^{2\pi i r / p} \quad (61)$$

όπου r είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος που ικανοποιεί την $0 \leq r < p$. Όμως, λόγω του ότι ο πίνακας B είναι ασθενά κυκλικός, αποδεικνύεται εύκολα από το θεώρημα 2.1 του Romanovsky ότι η μ είναι επίσης μια ιδιοτιμή του B . Αποδεικνύεται έτσι το ευθύ του θεωρήματος.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη έχουμε ότι, αν $\omega \neq 0$, τότε το λ είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του \mathcal{L}_ω και το $\mu = 0$ ικανοποιεί την (53), τότε αρκεί να δείξουμε ότι η $\mu = 0$ αποτελεί μια ιδιοτιμή του B . Με αυτή όμως την υπόθεση αποδεικνύεται εύκολα από την (57) ότι $\phi(\lambda) = \det B = 0$, αποδεικνύοντας ότι το $\mu = 0$ είναι μια ιδιοτιμή του B , γεγονός το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε, χωρίς απόδειξη, ένα Λήμμα από τον Young [Young] για τον υπολογισμό των διαστημάτων σύγκλισης μιας επαναληπτικής μεθόδου, όταν γνωρίζουμε τη συναρτησιακή σχέση της μεθόδου αυτής.

Λήμμα 2.1. *Αν b και c είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε και οι δύο ρίζες του τριωνύμου*

$$x^2 - bx + c = 0 \quad (62)$$

είναι κατά μέτρο μικρότερες από το 1, αν και μόνο αν

$$|c| < 1, \quad |b| < 1 + c. \quad (63)$$

2.2.2 Προσδιορισμός βέλτιστων παραμέτρων

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα απλό γεωμετρικό τρόπο λύσης του προβλήματος προσδιορισμού της βέλτιστης παραμέτρου ω_b για την SOR μέθοδο, η οποία μεγιστοποιεί την ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης $R_\infty(\mathcal{L}_\omega)$, ή ισοδύναμα

$$\min_{\omega} \rho(\mathcal{L}_\omega) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}). \quad (64)$$

Ειδικότερα, αν οι ιδιοτιμές του B^p είναι πραγματικές και μη αρνητικές, είναι γνωστό ότι η ω_b για την οποία ισχύει η (64) είναι μοναδική και για την ακρίβεια είναι η μοναδική θετική πραγματική ρίζα (μικρότερη από $p/(p-1)$) της εξίσωσης

$$(\rho(B)\omega_b)^p = [p^p(p-1)^{1-p}] \cdot (\omega_b - 1), \quad (65)$$

όπου η $\rho(B)$ είναι η φασματική ακτίνα του αντίστοιχου κατά ομάδες πίνακα Jacobi.

Θεώρημα 2.6. Έστω ο πίνακας A της (11) είναι ένας συνεπώς διατεταγμένος p -κυκλικός πίνακας με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες $A_{(i,i)}$, $1 \leq i \leq N$. Αν όλες οι ιδιοτιμές p -τάξης του κατά ομάδες πίνακα Jacobi B είναι πραγματικές, μη αρνητικές και $0 \leq \rho(B) < 1$, τότε όταν το ω_b ορίζεται από την (65), έχουμε

1. $\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (\omega_b - 1)(p - 1)$
2. $\rho(\mathcal{L}_{\omega}) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_b})$, για κάθε $\omega \neq \omega_b$.

Επίσης, ο κατά ομάδες επαναληπτικός πίνακας \mathcal{L}_{ω} της SOR μεθόδου συγκλίνει για κάθε ω που βρίσκεται στο διάστημα $(0, p/p - 1)$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την απόδειξη του θεωρήματος για την ειδική περίπτωση όπου $p = 2$.

Απόδειξη. Για $p = 2$, η ω_b μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα σαν

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} = 1 + \left(\frac{\rho(B)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \right)^2. \quad (67)$$

Για λόγους απλότητας, θα επαληθεύσουμε ότι η παράμετρος ω_b της (67) δίνει πραγματικά τη λύση της (64) για την ειδική περίπτωση όπου $p = 2$.

Αν οι ιδιοτιμές του B^2 είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τότε γνωρίζουμε από τον ορισμό 1.8 ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές μ_i του B λαμβάνονται σε \pm ζεύγη, δηλαδή αν μ_i είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του B , τότε θα είναι και η $-\mu_i$. Επομένως ισχύει ότι

$$-\rho(B) \leq \mu_i \leq \rho(B) < 1 \quad (68)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.5, οι ιδιοτιμές λ του κατά ομάδες SOR πίνακα και οι ιδιοτιμές μ του κατά ομάδες πίνακα Jacobi σχετίζονται με την

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2, \quad (69)$$

οπότε από τη στιγμή που γνωρίζουμε τη συναρτησιακή σχέση μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη παράμετρο ω_b . Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες στην (69), λαμβάνουμε για $\omega \neq 0$ ότι

$$\frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} = \pm \lambda^{1/2} \mu. \quad (70)$$

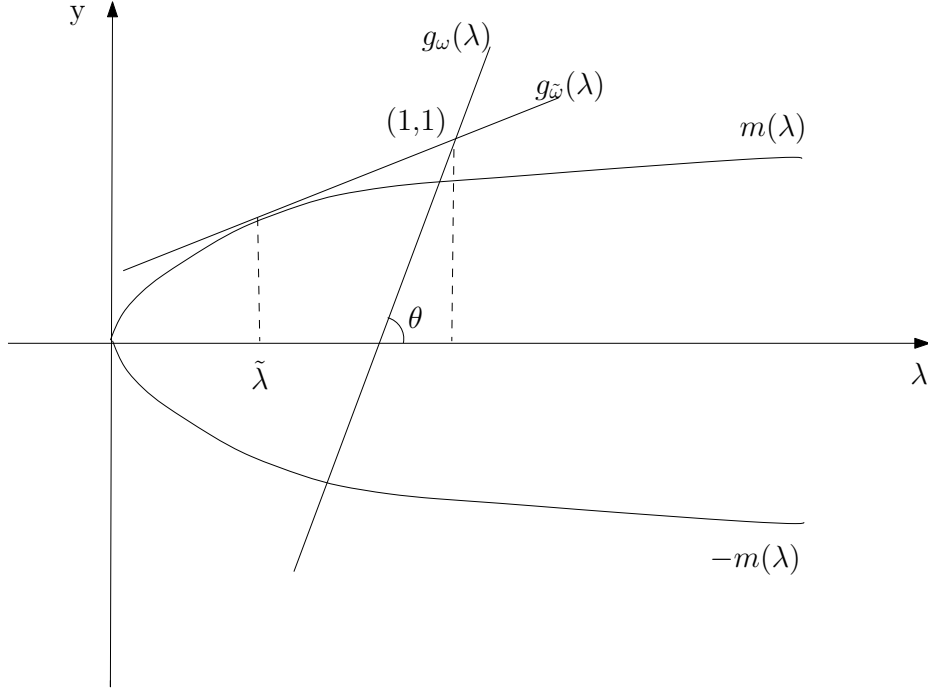
Στη συνέχεια ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_{\omega}(\lambda) = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega}, \omega \neq 0, \quad (71)$$

και

$$m(\lambda) = \lambda^{1/2} \mu, \quad 0 \leq \mu \leq \rho(B) < 1, \quad (72)$$

όπου η $g_{\omega}(\lambda)$ είναι μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και της οποίας η κλίση φθίνει όσο αυξάνει το ω . Ο λόγος για τον οποίο η κλίση φθίνει όσο αυξάνει το ω οφείλεται στο γεγονός ότι αφού για τη γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ της ευθείας και του άξονα $O\lambda$ έχουμε ότι $\tan \theta = 1/\omega$ θα ισχύει ότι όσο το ω θα μεγαλώνει, η γωνία θ θα μικραίνει. Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε εύκολα ότι η (70) μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά σαν το σημείο τομής των καμπύλων $g_{\omega}(\lambda)$ και $\pm m(\lambda)$, όπως φαίνεται



Σχήμα 17: Γραφική παράσταση των $g_\omega(\lambda)$, $g_{\tilde{\omega}}(\lambda)$ και $m(\lambda)$ στην περίπτωση που οι ρίζες της (69) είναι πραγματικές.

στο σχήμα 16. Αποδεικνύεται επίσης εύκολα ότι η μεγαλύτερη τετμημένη δηλαδή η φασματική ακτίνα που είναι η μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή των δύο σημείων τομής φθίνει όσο αυξάνει το ω μέχρι η ευθεία $g_\omega(\lambda)$ να εφάπτεται στην παραβολή $m(\lambda)$. Αυτό είναι λογικό να συμβαίνει γιατί αφού μικραίνει η γωνία κλίσης μικραίνει και η μεγαλύτερη τετμημένη όσο αυξάνει το ω . Αυτό συμβαίνει όταν

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (73)$$

και η τετμημένη $\tilde{\lambda} = \tilde{\omega} - 1$, όπου τα $\tilde{\omega}$ και $\tilde{\lambda}$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος της παραβολής και της εφαπτομένης της παραβολής (βλ. παράρτημα).

Για $\omega > \tilde{\omega}$, το οποίο συμβαίνει όταν η διακρίνουσα της (69) είναι αρνητική, έχουμε ότι η (69) έχει μιγαδικές συζυγείς ρίζες με μέτρο $\omega - 1$, το οποίο αυξάνει κατά μέτρο όσο αυξάνει το ω . Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι η φασματική ακτίνα είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς ω σε αυτό το διάστημα. Επομένως, για μια σταθερή τιμή μ του B , η τιμή του ω που ελαχιστοποιεί τη ρίζα της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής είναι η $\tilde{\omega}$, γιατί τη στιγμή που η φασματική ακτίνα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς ω για $0 < \omega < \tilde{\omega}$ και αύξουσα όταν $\tilde{\omega} < \omega < 2$ θα ισχύει ότι θα παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν $\omega = \tilde{\omega}$.

Συνεχίζοντας παρατηρούμε ότι η καμπύλη $\pm m(\lambda) = \pm \lambda^{1/2} \rho(B)$ είναι ένας φάκελος για όλες τις ευθείες $\pm \lambda^{1/2} \mu$, $0 \leq \mu \leq \rho(B)$ και δεδομένου ότι ισχύει η

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \max_{\mu} \{ \min_{\omega} (\mathcal{L}_{\omega}) \}, \quad (74)$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \omega_b - 1, \quad (75)$$

όπου το ω_b δίνεται από την (67).

Παράρτημα

Η εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής δίνεται από την

$$y - y_0 = m'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) \quad (76)$$

όπου

$$m'(\lambda_0) = \pm \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_0}} \quad (77)$$

Αφού η $g_\omega(\lambda)$ διέρχεται από το $(1, 1)$, το σημείο αυτό θα επαληθεύει την (76), οπότε από τις (76) και (77) προκύπτει ότι

$$1 - y_0 = \pm \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_0}}(1 - \lambda_0). \quad (78)$$

Ισχύει επίσης ότι

$$y_0 = \frac{\lambda_0 + \omega - 1}{\omega} \quad (79)$$

αφού η $g_\omega(\lambda)$ περιστρέφεται μέχρις ότου να περάσει από το σημείο επαφής. Λύνοντας το σύστημα των (78) και (79) βρίσκουμε το σημείο επαφής

$$(\lambda_0, y_0) = \left(\frac{\omega^2 \mu^2}{4}, \frac{\omega^2 \mu^2 + 4\omega - 4}{4\omega} \right). \quad (80)$$

Το σημείο αυτό θα επαληθεύει την παραβολή, οπότε από την (70) έχουμε ότι $y_0 = \pm\sqrt{\lambda_0}\mu$ και λόγω της (80) προκύπτει

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \quad \text{και} \quad \hat{\omega} = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (81)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{\omega} < \hat{\omega}, \quad (82)$$

όπου $0 < \tilde{\omega} < 2 < \hat{\omega}$. Επίσης επειδή η λ_0 , όπως δίνεται από την (80), είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς ω , θα ισχύει λόγω της (82) ότι $\lambda_0(\tilde{\omega}) < \lambda_0(\hat{\omega})$, δηλαδή $\lambda_0 = \lambda_0(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} - 1$.

3 Ιστορική αναδρομή και Πρόσφατη έρευνα

Οι πρώτες επαναληπτικές μέθοδοι που ανακαλύφθηκαν είναι η μέθοδος του Jacobi (1824) και αργότερα η μέθοδος των Gauss-Seidel (1848). Μετά από περίπου 100 χρόνια ανακαλύφθηκε η δημοφιλής Successive Overrelaxation (SOR) που αναφέραμε παραπάνω και 10 χρόνια αργότερα η συμμετρική εκδοχή της Symmetric Successive Overrelaxation (SSOR). Οι μέθοδοι αυτές εισάγουν μια παράμετρο ω της οποίας ο ρόλος είναι η ελαχιστοποίηση της φασματικής ακτίνας, της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής, του επαναληπτικού πίνακα. Το σημαντικό αποτέλεσμα της ανάλυσης της σύγκλισης της SOR ήταν η εύρεση της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου ω για την οποία η φασματική ακτίνα γίνεται ελάχιστη και κατά συνέπεια η ταχύτητα σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου γίνεται μέγιστη και καλύτερη κατά μία τάξη μεγέθους από την GS μέθοδο. Το αποτέλεσμα αυτό

βρέθηκε από τον [Young] (1952) και παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στη διατριβή του. Η όλη θεωρία αναπτύχθηκε για συστήματα των οποίων ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων είναι δικυκλικός. Ήδη, λοιπόν, από το 1952 ήταν γνωστό ότι η εισαγωγή παραμέτρων στις επαναληπτικές μεθόδους έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητας σύγκλισής τους. Ωστόσο, η έρευνα κατευθύνθηκε προς την ανάπτυξη άλλων επαναληπτικών μεθόδων που βασίζονταν στην ορθογωνιότητα διανυσμάτων για την επίλυση γενικότερων γραμμικών συστημάτων. Ένας εκπρόσωπος των μεθόδων αυτών είναι η μέθοδος Conjugate Gradient (CG).

Στην [LM1] μελετάται αρχικά η Preconditioned Simultaneous Displacement (PSD) μέθοδος, η οποία προτάθηκε το 1980 και αποτελεί γενίκευση της SSOR για την αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων των οποίων ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων είναι δικυκλικός. Για τη μελέτη της σύγκλισης της PSD μεθόδου ήταν απαραίτητη η εύρεση της συναρτησιακής σχέσης που συνδέει τις ιδιοτιμές του πίνακα προσυνθήκης της PSD μεθόδου με αυτές του επαναληπτικού πίνακα Jacobi. Ειδικότερα, προσδιορίστηκαν οι συνθήκες σύγκλισης και οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη ταχύτητα σύγκλισής της, στην περίπτωση όπου ο επαναληπτικός πίνακας Jacobi είναι ασθενώς κυκλικός και οι ιδιοτιμές του είναι είτε όλες πραγματικές "πραγματική περίπτωση" είτε όλες φανταστικές "φανταστική περίπτωση". Από τη μελέτη της σύγκλισης της PSD μεθόδου αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα σύγκλισής της είναι μεγαλύτερη από εκείνη της SSOR μεθόδου. Ειδικά στη "φανταστική περίπτωση" η σύγκλιση της βελτιώνεται κατά μια τάξη μεγέθους. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αρκετά ενθαρρυντικό για τη μελέτη της μεθόδου στην περίπτωση που ο πίνακας Jacobi έχει μιγαδικές ιδιοτιμές ("μιγαδική περίπτωση"). Σε μια προσπάθεια περαιτέρω αύξησης της ταχύτητας σύγκλισης της PSD μεθόδου, εισήχθησαν περισσότερες παράμετροι. Η νέα μέθοδος που δημιουργήθηκε ονομάστηκε Modified PSD (MPSD). Κάτω από τις ίδιες υποθέσεις μελετήθηκε η σύγκλιση της MPSD μεθόδου [LM2].

Το κύριο αποτέλεσμα της ανάλυσης αυτής είναι ότι η MPSD μέθοδος καθίσταται ισοδύναμη με την Modified SOR (MSOR) μέθοδο για τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων τους. Σε σύγκριση με την αντίστοιχη της Modified SSOR αποδεικνύεται ότι συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα. Επίσης, συγκρινόμενη με την κλασική SOR μέθοδο επιτυγχάνει μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης. Μάλιστα, στην περίπτωση που η μικρότερη κατά μέτρο ιδιοτιμή του πίνακα του Jacobi αυξάνεται, η ταχύτητα σύγκλισης της MPSD αυξάνεται ενώ της SOR παραμένει σταθερή.

Τα τελευταία χρόνια, πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα του σαγματικού σημείου το οποίο καταλήγει στην επίλυση ενός επαυξημένου γραμμικού συστήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα προβλήματα αυτά εμφανίζονται σε πολλές επιστημονικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, προβλήματα δυναμικής των ρευστών, προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς, προβλήματα ανακατασκευής εικόνας, προσεγγιστικά προβλήματα πεπερασμένων στοιχείων ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων κ.α. Οι πιο παλιές και γνωστές επαναληπτικές μέθοδοι που έχουν μελετηθεί για την αριθμητική επίλυση ενός επαυξημένου γραμμικού συστήματος είναι οι Uzawa και Preconditioned Uzawa μέθοδοι οι οποίες είναι ειδικές περιπτώσεις της SOR-like μεθόδου. Το 2005, μελετήθηκε η Generalized SOR (GSOR) μέθοδος, η οποία βελτίωσε την ταχύτητα σύγκλισης της SOR-like μεθόδου εισάγοντας μια επιπλέον παράμετρο.

Στην [LM3] μελετάται η ανάλυση σύγκλισης των Generalized Modified Extrapolated SOR (GMESOR) και Generalized Modified Preconditioned Simultaneous Displacement (GMPSD) μεθόδων για την αριθμητική επίλυση επαυξημένων γραμμικών συστημάτων. Για τη με-

λέτη σύγκλισης των μεθόδων αυτών ήταν απαραίτητη η εύρεση συναρτησιακών σχέσεων που συνδέουν τις ιδιοτιμές των επαναληπτικών πινάκων των μεθόδων αυτών με αυτές του ειδικού πίνακα J . Για την μελέτη τους έγινε η υπόθεση ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα J είναι πραγματικές και θετικές και βρέθηκαν ικανές συνθήκες σύγκλισης των δύο μεθόδων. Επιπλέον, παρουσιάζεται μια γεωμετρική προσέγγιση για τον προσδιορισμό των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων τους, η οποία στηρίζεται στην ανάλυση του [Var1] που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, έτσι ώστε οι μέθοδοι αυτές να αποκτούν τη βέλτιστη ταχύτητα σύγκλισης. Το κύριο αποτέλεσμα της ανάλυσης αυτής είναι ότι όλες αυτές οι μέθοδοι έχουν την ίδια ταχύτητα σύγκλισης και μικρότερη πολυπλοκότητα από την Preconditioned Conjugate Gradient (PCG) μέθοδο. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα είναι σημαντικό διότι αποδεικνύει ότι η εισαγωγή παραμέτρων σε μια επαναληπτική μέθοδο επιφέρει την ίδια αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης με την Conjugate Gradient (CG) μέθοδο.

Αναφορές

- [AdamJor85] L. Adams and H. Jordan, Is SOR color-blind? SIAM J. Sci. Statist. Comput., 7, pp 490-506, 1985.
- [AdamOrt82] L. Adams and J. Ortega, A multi-color SOR method for parallel computation, In Proc. 1982 Int. Conf. Par. Proc., pp 53-56, 1982.
- [Adams82] L. Adams, Iterative Algorithms for Large Sparse Linear Systems on Parallel Computers, PhD thesis, The University of Virginia Department of Applied Mathematics and Computer Science, 1982. Also published as NASA CR-166027, NASA Laugley Research Center.
- [Akl89] S. Akl, The Design and Analysis of Parallel Algorithms, Prentice-Hall, 1989.
- [Bellman70] R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [Berge58] C. Berge, Théorie des Graphes et ses Applications, Dunod, Paris, Vol. 275, pp. 25, 1958.
- [BerPle79] A. Berman and R. J. Plemmons. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press, New York, 1979.
- [BirkMacl98] G. Birkhoff and S. Maclane, A Survey of Modern Algebra, MacMillan, New York, 1998.
- [BonDaSte91] F. Bonhoure, Y. Dallery and W. Stewart, On the efficient use of periodicity properties for the efficient numerical solution of certain Markov chains, Université de Paris, France, MASI Tech. Rept. pp 91-40, 1991.
- [CosTry95] M. Cosnard and D. Trystram, Parallel Algorithms and Architectures, ICTP, London, 1995.
- [CouSem86] P. J. Courtois and P. Semal, Block iterative algorithms for stochastic matrices, Linear Algebra Appl., Vol. 70, pp 59-76, 1986.

- [DonAd08] Γ. Δονάτος και Μ. Αδάμ, Γραμμική Άλγεβρα, Θεωρία και Εφαρμογές, Gutenberg, 2008.
- [Evans82] D. Evans, *Parallel Processing Systems*, Cambridge University Press, 1982.
- [Faddeev63] D. K. Faddeev and V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*, Freeman, San Francisco, California, 1963.
- [For53] G. E. Forsythe, Solving linear algebraic equations can be interesting, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 59, pp. 299-329, 1953.
- [Foster94] I. Foster, *Design and Building Parallel Programs*, Addison-Wesley, 1994.
- [FrePhil92] T. Freeman and C. Phillips, *Parallel Numerical Algorithms*, Prentice Hall, 1992.
- [F12] G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, *S.-B. Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin, pp. 546-477, 1912.
- [Geiringer49] H. Geiringer, On the solution of systems of linear equations by certain iteration methods, *Reissner Anniversary Volume, Contributions to Applied Mechanics*, Ann Arbor, Michigan, pp. 365-393, 1949.
- [HadjPle92] A. Hadjidimos and R. J. Plemmons, Analysis of p-cyclic iterations for Markov chains, *Linear Algebra, Markov Chains and Queueing Models*, edited by C. Meyer and R. J. Plemmons, IMA Volumes on Applied Mathematics, Springer Verlag, Vol.48, 1992.
- [HadjPleTR92] A. Hadjidimos and R. J. Plemmons, A General theory of Optimal p-cyclic SOR, *CSD-TR-92-076*, 1992.
- [HornJohnson] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, USA, 1985.
- [Jaja92] J. Jaja, *An Introduction to Parallel Algorithms*, Addison-Wesley, 1992.
- [König50] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Chelsea Publishing Co., New York, Vol. 258, pp. 19-25, 1950.
- [KonPleSte91] K. Kontovasilis, R. J. Plemmons and W. J. Stewart, Block Cyclic SOR for Markov chains with p-cyclic infinitesimal generator, *Lin. Alg. and its Appl.*, 154-156:145-223, 1991.
- [KuGraGuKa94] V. Kumar, A. Grama, A. Gupta and G. Katypis, *Introduction to Parallel Computing: Design and Analysis of Algorithms*, Benjamin/Cummings, Callifornia, 1994.
- [Leary92] D. O'Leary, Iterative Methods for finding the stationary vector of Markov Chains, *Linear Algebra, Markov Chains and Queueing Models*, Edited by C. Meyer and R. J. Plemmons, IMA Volumes on Applied Mathematics, Springer Verlag, Vol. 48, 1992.

- [LiVar] Xiezhang Li and R. S. Varga, A note in the SSOR and USSOR iterative methods applied to p-cyclic matrices, *Numer. Math.*, Vol. 56, pp. 109-121, 1989.
- [LM1] M. A. Louka, N. M. Missirlis and F. I. Tzaferis, The impact of the eigenvalues locality on the convergence behavior of the PSD method for two-cyclic matrices, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 430, Issues 8-9, 2009, pp 1929-1944.
- [LM2] M. A. Louka, N. M. Missirlis and F. I. Tzaferis, Is Modified PSD equivalent to Modified SOR for two-cyclic matrices?, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 432, 2010, pp 2798-2815.
- [LM3] M. A. Louka and N. M. Missirlis, A comparison of the Extrapolated Successive Overrelaxation and the Preconditioned Simultaneous Displacement methods for augmented linear systems, *Num. Math.*, doi: 10.1007/s00211-015-0697-6, 2015.
- [Mis78] N. M. Missirlis, Preconditioned Iterative methods for solving elliptic partial differential equations, PhD thesis, University of Loughborough, Department of Computer Science, 1978.
- [MisEv1] N. M. Missirlis and D. J. Evans, On the convergence of some generalized preconditioned iterative methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 18, pp. 591-596, 1981.
- [Ortega87] J. M. Ortega, *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems*, Plenum, New York, 1987.
- [OrtVoi85] J. Ortega and R. Voigt, Solution of partial differential equations on vector and parallel computers, *SIAM Rev.*, Vol. 27, pp. 149-240, 1985.
- [R36] V. Romanovsky, Recherches sur les chaînes de Markoff, *Acta Math.*, Vol. 66, pp. 147-251, 1936.
- [Saad] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, SIAM, 2003.
- [Stewart94] W. J. Stewart, *Introduction to Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [T49] O. Taussky, A reccuring theorem on determinants, *Amer. Math. Monthly.*, Vol. 56, pp. 672-676, 1949.
- [Var1] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [XieAd99] D. Xie and L. Adams, "New Parallel SOR method by domain Partitioning", *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 20, No. 6, pp. 2261-2281, 1999.
- [Young] D. M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York, 1971.